

5ª edição

**James Stewart** 

# CÁLCULO Volume II



#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James Cálculo, volume 2 / James Stewart; tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. — São Paulo: Thomson Learning, 2007.

1. reimp. da 5. ed. de 2006 Titulo original: Calculus. ISBN 85-211-0484-0

1. Cálculo I. Título

05-8117

CDD-515

#### Índice para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 543

# CÁLCULO

# Volume II 5<sup>a</sup> edição

JAMES STEWART McMaster University

#### Tradução

Antonio Carlos Moretti

Doutor em Engenharia Industrial pelo Georgia Institute of Technology e Professor Livre-Docente do Imecc – Unicamp

Antonio Carlos Gilli Martins

Doutor em Matemática pela Unicamp e Professor Doutor do Imecc - Unicamp

THOMSON

Austrália Brasil Canadá Cingapura Espanha Estados Unidos México Reino Unido

#### THOMSON

**Gerente Editorial:** 

Dulcy Grisolia

Editora de Desenvolvimento:

Ada Santos Seles

Supervisora de Produção Editorial:

Patricia La Rosa

**Produtora Editorial:** 

Ligia Cosmo Cantarelli

Produtora Gráfica:

Fabiana Alencar Albuquerque

Copidesque:

Sandra Ferraz Brazil

Revisão:

Silvana Gouveia Iná de Carvalho

Diagramação:

ERJ – Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.

Capa:

FZ.Dáblio Design Studio

Título Original:

Calculus — Early Transcendentals, 5<sup>th</sup> ed

ISBN 0-534-39321-7

Tradução Técnica:

Antonio Carlos Gilli Martins Antonio Carlos Moretti

COPYRIGHT © 2003 de Brooks/Cole Publishing Inc., uma divisão da Thomson Learning™. COPYRIGHT © 2006 para a Língua Portuguesa adquirido por Thomson Learning Edições Ltda., uma divisão da Thomson Learning, Inc. Thomson Learning™ é uma marca registrada aqui utilizada sob licença.

Impresso no Brasil. Printed in Brazil. 5 6 7 8 09 08 07

Condomínio E-Business Park Rua Werner Siemens, 111 Prédio 20 – Espaço 3 Lapa de Baixo – CEP 05069-900 São Paulo – SP Tel.: (11) 3665-9900 Fax: (11) 3665-9901 sac@thomsonlearning.com.br www.thomsonlearning.com.br Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregados, sem a permissão, por escrito, da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume 2 / James Stewart;
tradução
Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos
Gilli Martins. — São Paulo: Thomson
Learning, 2007.
1. reimp. da 5. da ed. de 2006
Título original: Calculus.
ISBN 85-211-0484-0
1. Cálculo I. Título
05-8117 — CDD-515

Índice para catálogo sistemático:

1. Cálculo: Matemática 543



Para meus alunos, antigos e presentes



#### Prefácio

Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.

George Polya

A arte de ensinar, segundo Mark van Doren, é a de tomar parte em descobertas. Tentei escrever um livro que tome parte na descoberta do cálculo pelos estudantes – por seu aspecto prático, bem como por sua surpreendente beleza. Nesta edição, como nas quatro anteriores, pretendi transmitir aos estudantes um sentido de utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, mas também me empenhei em dar uma avaliação da beleza intrínseca do assunto. Newton sem dúvida experimentou uma sensação de triunfo no momento de suas grandes descobertas. Eu gostaria que os estudantes partilhassem dessa emoção.

A ênfase está na compreensão dos conceitos. Penso que todos concordam que essa deve ser a meta principal no ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o atual movimento de reforma do cálculo vem da Conferência de Tulane, de 1986, que formulou como recomendação fundamental:

#### Focalizar na compreensão conceitual.

Tentei implementar essa meta através da Regra de Três: "Tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente". Visualização, experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram radicalmente a forma de ensinar o raciocínio conceitual. Mais recentemente, a Regra de Três foi expandida tornando-se a Regra de Quatro com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo.

#### O Que É Novo Nesta Edição

Enquanto preparava a quinta edição deste livro, passei um ano na Universidade de Toronto ensinando Cálculo utilizando a edição anterior. Eu ouvia atentamente as perguntas de meus alunos e as sugestões de meus colegas. E, cada vez que preparava uma aula, ficava pensando se algum exercício a mais era necessário ou se uma frase deveria ser melhorada ou, ainda, se uma seção deveria ter mais exercícios de um certo tipo. Além disso, prestei muita atenção às sugestões enviadas por vários leitores e aos comentários dos meus revisores.

Uma fonte não muito comum de problemas novos foi um telefonema de um amigo meu, Richard Armstrong. Richard é sócio de uma firma de consultoria em engenharia e orienta os clientes que controem hospitais e hotéis. Ele me disse que, em certas partes do mundo, os sistemas de *sprinklers* de prédios grandes são abastecidos de água por compartimentos localizados nos tetos desses prédios. Naturalmente ele sabia que a pressão da água diminui quando o nível de água decresce, mas queria quantificar esse decréscimo de maneira que seus clientes pudessem garantir uma certa pressão durante um dado período.

Eu lhe disse que poderia resolver esse problema usando as equações diferenciais separáveis, porém ocorreu-me que esse problema poderia gerar um bom projeto de pesquisa quando combinado com outras idéias. (Veja o projeto na página 605).

A estrutura desta edição permanece praticamente a mesma da anterior, no entanto, há vários melhoramentos, pequenos e grandes:

- · Duas seções no Capítulo 10 foram combinadas em uma só.
- Eu reescrevi a Seção 12.2 para dar mais ênfase à descrição geométrica dos vetores.
- Novas frases e notas de rodapé foram inseridas no texto para dar mais clareza à exposição.
- · Vários trabalhos de arte foram redesenhados.
- Os dados em exemplos e os exercícios foram atualizados no tempo.
- · Foram incluídos alguns sites a mais em alguns dos exemplos já existentes.
- Cerca de 25% dos exercícios em cada capítulo são novos. Aqui estão alguns dos meus favoritos:

Exercícios	Página	Exercícios	Página	Exercício	Página
9.1 11-12	588	10.3 47-48	674	11.9 40	758
11.12 35	782	13.3 32-34	868	14.3 5-6	918
14.5 15-16	936				

Foram adicionados novos problemas nas seções Problemas Quentes. Veja, por exemplo, os Problemas 20 e 22 na página 790.



#### Características

#### **Exercícios Conceituais**

A maneira mais importante de encorajar a compreensão conceitual é por meio dos problemas que prescrevemos. Com essa finalidade, delineei vários tipos de novos problemas. Alguns conjuntos de exercícios começam com questões exigindo a explicação do significado do conceito básico da seção. (Veja, por exemplo, os exercícios nas Seções 11.2, 14.2 e 14.3.) Analogamente, todas as seções de revisão começam por uma verificação conceitual e um teste do tipo verdadeiro—falso. Outros exercícios testam a compreensão conceitual através de gráficos e tabelas. Veja os Exercícios 1-2 na Seção 13.2, Exercício 27 na Seção 13.3, Exercícios 1, 2, 5 e 31-34 na Seção 14.1, Exercícios 1, 2 e 36 na Seção 14.6, Exercícios 3-4 na Seção 14.7, Exercícios 5-10 na Seção 15.1, Exercícios 11-18 na Seção 16.1, Exercícios 17, 18 e 43 na Seção 16.2 e Exercícios 1, 2, 11 e 23 na Seção 16.3. Eu particularmente valorizo problemas que combinam e comparam abordagens gráficas, numéricas e algébricas (veja o Exercício 2 na Seção 9.5).

#### Conjuntos Gradativos de Exercícios

Mais do que 30% dos exercícios são novos. Cada conjunto de exercícios é cuidadosamente graduado, progredindo desde exercícios conceituais básicos e problemas destinados a desenvolvimento de habilidades até problemas mais desafiantes envolvendo aplicações e provas.

Meu assistente e eu gastamos um bom tempo em bibliotecas, contatando companhias e agências governamentais e procurando na Internet por dados do mundo real para introduzir, motivar e ilustrar os conceitos do cálculo. Como resultado, muitos de nossos exemplos e exercícios tratam de funções definidas por tais dados numéricos ou gráficos. Funções de duas variáveis são ilustradas por uma tabela de valores do fator de resfriamento do vento como uma função da temperatura do ar e da velocidade do vento (Exemplo 2 da Seção 14.1). As derivadas parciais são introduzidas na Seção 14.3, em que é examinada uma coluna na tabela de valores do índice de calor (temperatura do ar sentida) como uma função da temperatura real e da umidade relativa. Esse exemplo é aprofundado em conexão com as aproximações lineares (Exemplo 3 da Seção 14.4). Derivadas direcionais são introduzidas nas Seções 14.6 usando curvas de nível para estimar a taxa de variação da temperatura em Reno em direção a Las Vegas. Integrais duplas são usadas para estimar a média de queda de neve no Colorado durante o dia 24 de dezembro de 1982 (Exemplo 4 da Seção 15.1). Campos vetoriais são introduzidos na Seção 16.1 pela representação do padrão de ventos na baía de São Francisco.

**Projetos** 

Uma maneira de envolver os estudantes e então torná-los aprendizes ativos é fazê-los trabalhar (talvez em grupos) em projetos de extensão, que dão um grande sentimento de realização quando finalizados. Isso inclui quatro tipos de projetos: a) Projetos Aplicados, que envolvem aplicações destinadas a apelar para a imaginação dos estudantes. O projeto que segue a Seção 9.3 indaga se uma bola atirada para cima leva mais tempo para atingir sua altura máxima ou para cair até sua altura original. (A resposta poderá surpreendê-lo.) O projeto que segue a Seção 14.8 usa multiplicadores de Lagrange para determinar as massas dos três estágios do foguete de tal forma a minimizar a massa total enquanto lhe permite atingir a velocidade desejada. b) Projetos de Laboratório, que envolvem tecnologia. O projeto que segue a Seção 10.2 mostra como usar as curvas de Bézier para desenhar formas que representam letras para uma impressão a laser. c) Projetos Escritos, que pedem aos estudantes que comparem métodos atuais com aqueles usados pelos fundadores do cálculo - por exemplo, o método de Fermat para encontrar tangentes. São fornecidas referências. d) Projetos Descobertas, que antecipam resultados que serão discutidos posteriormente ou encorajam a descoberta através do reconhecimento do padrão. Outros exploram aspectos da geometria: tetraedro (após a Seção 12.4), hiperesferas (após a Seção 15.7) e a intersecção de três cilindros (após a Seção 15.8).

Tecnologia

A disponibilidade de tecnologia torna ainda mais importante compreender claramente os conceitos que fundamentam as imagens na tela. Quando usados adequadamente, calculadoras gráficas e computadores são ferramentas valiosas na descoberta e compreensão desses conceitos. Este livro pode ser usado com ou sem tecnologia, e usei dois símbolos especiais para indicar quando um tipo especial de máquina for necessário. O ícone indica um exemplo ou exercício que requer o uso de tal tecnologia, mas isso que não significa que ela não possa ser usada também em outros exercícios. O símbolo é reservado para os problemas em que é requerida toda a capacidade de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI-92). Todavia, a tecnologia não torna obsoletos o lápis e o papel. Cálculos à mão e esboços são freqüentemente preferíveis à tecnologia para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Professores e estudantes precisam desenvolver a habilidade para decidir quando é mais apropriado a máquina ou a mão.

#### Conteúdo

#### Capítulo 9 Eguações Diferenciais

Modelagem é o tema que unifica este tratamento introdutório das equações diferenciais. Campos de direção e o método de Euler são estudados antes das equações separáveis, e as equações lineares são resolvidas explicitamente; assim, é dado o mesmo peso para as abordagens qualitativa, numérica e analítica. Esses métodos são aplicáveis aos modelos exponencial, logístico e outros para o crescimento populacional. As cinco primeiras seções deste capítulo servem como uma boa introdução às equações diferenciais de primeira ordem. A seção final, opcional, usa os modelos predador-presa para ilustrar os sistemas de equações diferenciais.

#### Capítulo 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

As seções em áreas e tangentes para curvas paramétricas e comprimento de arco e área de superfície foram alinhados e combinados como Cálculo corn curvas paramétricas. Projeto de laboratório; os dois projetos apresentados aqui envolvem famílias de curvas e as curvas de Bézier. Um breve tratamento de seções cônicas em coordenadas polares prepara o caminho para as Leis de Kepler do Capítulo 13.

#### Capítulo 11 Seqüências Infinitas e Séries

Agora os testes de convergência têm justificações intuitivas (veja a página 723), bem como provas formais. As estimativas numéricas das somas das séries estão baseadas no teste usado para provar a convergência. A ênfase está em séries de Taylor e polinomiais e sua aplicação à física. Estimativas de erro incluem aquelas para recursos gráficos.

#### Capítulo 12 Vetores e a Geometria do Espaço

O material em geometria analítica em três dimensões e vetores foi dividido em dois capítulos. Este capítulo trata dos vetores, dos produtos escalar e vetorial, retas, planos, superfícies e coordenadas cilíndricas e esféricas.

#### Capítulo 13 Funções Vetoriais

Este capítulo cobre as funções a valores vetoriais, suas derivadas e integrais, o comprimento e a curvatura de curvas espaciais e a velocidade e aceleração ao longo de curvas espaciais, culminando nas leis de Kepler.

#### Capítulo 14 Derivadas Parciais

Funções de duas ou mais variáveis são estudadas dos pontos de vista verbal, numérico, visual e algébrico. Em particular, introduzi derivadas parciais observando uma coluna específica em uma tabela de valores do índice de calor (temperatura do ar sentida) como uma função da temperatura real e da umidade relativa. Derivadas direcionais são estimadas a partir de curvas de nível da temperatura, pressão e precipitação da neve.

#### Capítulo 15 Integrais Múltiplas

Curvas de nível e Regra do Ponto Médio são utilizadas para estimar a precipitação média de neve e a temperatura média em uma dada região. As integrais duplas e triplas são usadas para computar probabilidades, áreas de superfícies e (nos projetos) volumes de hiperesferas, e ainda, o volume da interseção de três cilindros.

#### Capítulo 16 Cálculo Vetorial

São introduzidos os campos vetoriais através de gráficos de velocidade mostrando os padrões de ventos da Baia de San Francisco. As similaridades entre o Teorema Fundamental para os Integrais de Linhas, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência são enfatizadas.

#### Capítulo 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Como as equações diferenciais de primeira ordem são estudas no capítulo 9, este último capítulo trata das equações diferenciais lineares de segunda ordem, sua aplicação às cordas vibrantes e circuitos elétricos, e soluções em série.



#### Agradecimentos

A preparação desta e das edições anteriores envolveu um bom tempo gasto na leitura dos ponderados conselhos de um grande número de revisores. Apreciei profundamente o tempo gasto por eles para entender a minha motivação na abordagem escolhida. De cada um deles aprendi alguma coisa. Sou grato a todos: Barbara Cortzen, Philip S. Crooke, Matthias K. Gobbert, Leonard Krop, F. J. Papp e Paul M. Wright.

Além disso, quero agradecer a George Bergman, Bill Ralph, Harvey Keynes, Doug Shaw, Saleem Watson, Lothar Redlin, David Leep, Gene Hecht e Tom DiCiccio, por suas recomendações e ajuda; a Andy Bulman-Fleming e Dan Clegg, por suas pesquisas em bibliotecas e na Internet; a Kevin Kreider, por sua crítica aos exercícios aplicados; a Fred Brauer, por sua permissão para usar seus manuscritos em equações diferenciais; e a Dan Clegg pelo preparo do manuscrito das respostas. Dan Clegg atuou como meu assistente em todo o trabalho; ele leu e marcou todos os erros, deu sugestões e contribuiu em muitos dos novos exercícios.

Agradeço ainda a Brian Betsill, Stephanie Kuhns, Kathi Townes, Śandy Senter, Jamie Sue Brooks, Caroline Croley, Debra Johnston e Carol Ann Benedict.

Fui muito afortunado por ter trabalhado com alguns dos melhores editores de matemática dos últimos vinte anos: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst e Gary W. Ostedt. Sou particularmente grato a meu atual editor, Gary W. Ostedt, por tornar mais fácil minha vida colocando a minha disposição uma equipe talentosa de pessoas que me assistiram na feitura deste livro.

JAMES STEWART



# Sumário

**9** Equações Diferenciais 582

	9.1	Modelagem com Equações Diferenciais 583	
	9.2	Campos de Direção e o Método de Euler 589	
	9.3	Equações Separáveis 597	
		Projeto Aplicado 🛭 Quão Rápido um Tanque Esvazia? 605	
		Projeto Aplicado 🕾 O Que É Mais Rápido: Subir ou Descer?	606
	9.4	Crescimento e Decaimento Exponencial 607	
		Projeto Aplicado a Cálculo e Beisebol 618	
	9.5	A Equação Logística 619	
	9.6	Equações Lineares 628	
	9.7	Sistemas Predador–Presa 634	
		Revisão 640	
	Prob	lemas Quentes 644	
10	Earn	ações Daramátricas a Caardanadas Balares (46	
· IV ()	Equ	ações Paramétricas e Coordenadas Polares 646	
	10.1	Curvas Definidas por Equações Paramétricas 647	
		Projeto de Laboratório 🛭 Rolando Círculos ao Redor de Círculos	655
	10.2	Cálculo com Curvas Paramétricas 655	
		Projeto de Laboratório 🖀 Curvas de Bézier 644	
	10.3	Coordenadas Polares 665	
	10.4	Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares 675	
	10.5	Seções Cônicas 680	
	10.6	Seções Cônicas em Coordenadas Polares 687	
		Revisão 692	
	Probl	lemas Quentes 696	
11	Saati	iôncias Infinitas o Cáulos (00	
	sequ	iências Infinitas e Séries 698	www.commonwo
	11.1	Seqüências 699	
		Projeto de Laboratório 🛭 Seqüências Logísticas 711	
	11.2	Séries 711	
	11.3	O Teste da Integral e Estimativas de Somas 721	
	11.4	Os Testes de Comparação 728	
	11.5	Séries Alternadas 733	
	11.6	Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz 738	
	11.7	Estratégia para Testar as Séries 745	
			×iii

	11.8	Séries de Potências 747
	11.9	Representações de Funções como Séries de Potências 752
	11.10	0 Séries de Taylor e de Maclaurin 758
		Projeto de Laboratório 🖰 Um Limite Elusivo 769
	11.1	1 A Série Binomial 770
		Projeto Escrito a Como Newton Descobriu a Série Binomial 773
	11.13	2 Aplicações de Polinômios de Taylor 774
		Projeto Aplicado Radiação Proveniente das Estrelas 782
		Revisão 783
	Prob	lemas Quentes 787
12	Veto	ores e a Geometria do Espaço 792
	12.1	Sistemas de Coordenadas Tridimensionais 793
	12.2	Vetores 798
	12.3	O Produto Escalar 806
	12.4	O Produto Vetorial 813
		Projeto Descoberta A Geometria do Tetraedro 821
	12.5	Equações de Retas e Planos 822
		Projeto de Laboratório 🗈 Pondo 3D em Perspectiva 831
	12.6	Superfícies Cilíndricas e Quádricas 831
	12.7	Coordenadas Cilíndricas e Esféricas 838
		Projeto de Laboratório S Famílias de Superfícies 843
	Dech	Revisão 843
	rrou	lemas Quentes 846
40 ×	т.	~ ***
13	Funç	ções Vetoriais 847
	13.1	Funções Vetoriais e Curvas Espaciais 848
	13.2	Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais 855
	13.3	Comprimento de Arco e Curvatura 861
	13.4	Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração 869
		Projeto Aplicado 🛭 Leis de Kepler 879
		Revisão 880
	Probl	lemas Quentes 882
14	Deri	vadas Parciais 884
	14.1	Funções de Várias Variáveis 885
	14.2	Limites e Continuidade 898
	14.3	Derivadas Parciais 907
	14.4	Planos Tangentes e Aproximações Lineares 920
	14.5	Regra da Cadeia 929
	14.6	Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente 938
	V.1.1	Delivipodo Difeciolidio e o vetor Gradicille 750

	14.7	Valores Máximo e Mínimo 951
		Projeto Aplicado 🗆 Projeto de uma Caçamba — 961
		Projeto Descoberta a Aproximação Quadrática e Pontos Críticos 962
	14.8	Multiplicadores de Lagrange 963
		Projeto Aplicado 🛭 Ciência dos Foguetes 💮 970
		Projeto Aplicado 🕾 Otimização de uma Turbina Hidráulica 971
		Revisão 972
	Prob.	lemas Quentes 976
15	Inte	grais Múltiplas 978
000.0000000000000000000000000000000000	15.1	Integrais Duplas sobre Retângulos 979
	15.2	Integrais Iteradas 988
	15.3	Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas 993
		Integrais Duplas em Coordenadas Polares 1001
	15.5	Aplicações das Integrais Duplas 1007
	15.6	
	15.7	Integrais Triplas 1020
		Projeto Descoberta 🗆 Volumes de Hiperesferas 1030
	15.8	Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas 1030
		Projeto Aplicado 🗆 Corrida na Rampa 🔝 1036
	1	Projeto Descoberta 🗈 A Interseção de Três Cilindros 1037
	15.9	Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 1038
		Revisão 1046
	Probl	emas Quentes 1050
16	Cálc	ulo Vetorial 1052
federate biological in access	1 ( 1	
	16.1	Campos Vetoriais 1053
	16.2	Integrais de Linha 1060
	16.3	Teorema Fundamental para as Integrais de Linha 1072
	16.4	Teorema de Green 1081
	16.5	Rotacional e Divergência 1088
	16.6	Superfícies Paramétricas e Suas Áreas 1096
	16.7	Integrais de Superfície 1106
	16.8	O Teorema de Stokes 1118
	160	Projeto Escrito Três Homens e Dois Teoremas 1123
	16.9	O Teorema da Divergência 1124
	10.10	Resumo dos Teoremas 1131

Revisão 1132 **Problemas Quentes 1135** 

#### xvi 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

17	Equações	Diferenciais	de	Segunda	Ordem	1137

- 17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1138
- 17.2 Equações Lineares Não-Homogêneas 1144
- 17.3 Aplicações das Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1151
- 17.4 Soluções em Série 1159 Revisão 1163

#### Apêndices

- F Provas de Teoremas A2
- G Números Complexos A5
- H Respostas dos Exercícios de Números Ímpares A13

Índice Analítico A45



#### Ao Estudante

Há uma diferença entre ler um texto de cálculo e um jornal ou um romance ou até mesmo um livro de física. Assim, não desanime se tiver de ler uma passagem mais de uma vez para poder entendê-la. Você deve ter lápis, papel e uma calculadora à mão para esboçar um diagrama ou fazer um cálculo.

Alguns estudantes começam a fazer suas tarefas de casa e lêem o texto somente quando empacam em algum exercício. Sugiro que leia e tente compreender uma seção do texto antes de começar os exercícios. Em particular, você deve examinar as definições para entender o significado exato dos termos. E antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolver o problema por seus próprios meios. Fazendo isto, você aprenderá muito mais do que simplesmente olhando para a solução.

Parte da meta deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Aprender a escrever a solução dos exercícios de uma forma conexa, passo a passo e com sentenças explicativas – e não uma fileira de equações desconexas ou fórmulas.

As respostas dos exercícios de número ímpar estão no fim do livro. Alguns deles pedem uma explicação verbal, uma interpretação ou uma descrição. Em tais casos, não existe uma maneira única de dar a resposta; logo, não se preocupe em obter a resposta definitiva. Além disso, há várias formas de expressar uma resposta numérica ou algébrica; assim, se sua resposta for diferente da minha, não conclua imediatamente que a sua está errada. Por exemplo, se a resposta dada no fim do livro for  $\sqrt{2}-1$  e você obtiver  $1/(1+\sqrt{2})$ , então você está certo, e racionalizando o denominador veremos que as respostas são iguais.

O ícone indica que definitivamente um exercício requer o uso de uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico. (A Seção 1.4 do Volume I discute o uso desses recursos e de algumas falhas que você poderá encontrar.) Porém, isso não significa que recursos gráficos não possam ser usados para verificar seu trabalho em outros exercícios. O símbolo sestá reservado para problemas em que se faz necessário o uso de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI 89-92). Você vai encontrar também o símbolo que o adverte sobre a possibilidade de cometer um erro. Esse símbolo aparece em situações nas quais observei que um grande número de estudantes tende a cometer o mesmo erro.

O cálculo – muito justamente – é considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. Espero que você descubra que ele não é somente útil, mas também intrinsecamente belo.

JAMES STEWART

る情報の発展を維

#### Erros de Aproximação\*

Se x' for uma aproximação para x, então:

$$E = |x - x'|$$

O número E é chamado de erro absoluto na aproximação.

- Se  $|x-x'| \le 10^{-p}$ , então x' aproxima x com um erro de no máximo  $10^{-p}$ .
- Se  $|x-x'| \le 5.10^{-p}$ , então x' aproxima x até a (p+1)-ésima casa decimal, ou até o  $1/(10)^{p+1}$  mais próximo.

#### Exemplos:

- Se  $|x-x'| \le 0.5$ , então x' aproxima x até o inteiro mais próximo.
- Se  $|x-x'| \le 0.005$ , então x' aproxima x até a segunda casa decimal, ou até o centésimo mais próximo.

Além disso, se x' aproxima x até a (p+1)-ésima casa decimal, dizemos que a aproximação x' é correta até a (p+1)-ésima casa decimal, ou que a aproximação x' tem (p+1) casas decimais de precisão.

#### Arredondamento'

Dado um número racional  $a_1a_2a_3a_4...a_n$ ,  $b_1b_2b_3...b_mb_{m+1}$ , então arredondamos para m casas decimais de acordo com a regra:

- Se  $5 \le b_{m+1} \le 9$ , então o número fica  $a_1 a_2 a_3 ... a_n, b_1 b_2 b_3 ... [(b_m) + 1]$ .
- Se  $0 \le b_{m+1} \le 4$ , então o número fica  $a_1a_2a_3...a_n$ ,  $b_1b_2b_3...b_m$ .

A expressão "usado correto até determinada casa decimal" implica que, se a correção for, por exemplo, até a décima casa decimal, o erro começará na décima primeira casa decimal.

#### Exemplos:

- \*  $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ ; 1.4 correta com uma casa decimal.
- 1,414  $< \sqrt{2} < 1,415$ ; 1,41 correta com duas casas decimais.

<sup>\*</sup>Nota do tradutor.

# CÁLCULO Volume II

# **9**Equações Diferenciais

Pela análise de pares de equações diferenciais, podemos entender melhor os ciclos populacionais de predadores e presas, tais como o lince canadense e a lebre da neve. Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando os físicos ou cientistas sociais usam o cálculo, em geral o fazem para analisar uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estão estudando. Embora seja freqüentemente impossível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial, veremos que as aproximações gráficas e numéricas fornecem a informação necessária.

## **9.1** Modelagem com Equações Diferenciais

☐ Agora é uma boa hora para ler (ou reler) a discussão sobre o modelo matemático da página 25 do Volume I.

Na descrição do processo de modelagem na Seção 1.2 (Volume I) falamos a respeito da formulação de um modelo matemático de um problema real através de raciocínio intuitivo sobre o fenômeno ou por meio de uma lei física baseada em evidência experimental. O modelo matemático freqüentemente tem o formato de uma equação diferencial, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que as mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Vamos começar examinando vários exemplos de como as equações diferenciais aparecem quando modelamos um fenômeno físico.

#### Modelos de Crescimento Populacional

Um modelo para o crescimento de uma população baseia-se na premissa de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população. É razoável presumir isso para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doencas).

Vamos identificar e denominar as variáveis nesse modelo:

t = tempo (a variável independente)

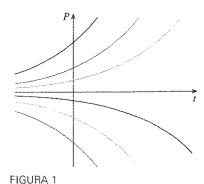
P = número de indivíduos da população (a variável dependente)

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt. Assim, nossa premissa de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é escrita como a equação

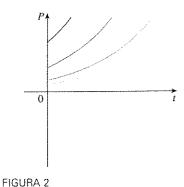
$$\frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A Equação 1 é nosso primeiro modelo para o crescimento populacional; é uma equação diferencial porque contém uma função desconhecida P e sua derivada dP/dt.

Tendo formulado um modelo, vamos olhar para suas consequências. Se desconsiderarmos uma população nula, então P(t)>0 para todo t. Dessa forma, se k>0, então a Equação 1 mostra que P'(t)>0 para todo t. Isso significa que a população está sempre aumentando. De fato, quando P(t) aumenta, a Equação 1 mostra que dP/dt torna-se maior. Em outras palavras, a taxa de crescimento aumenta quando a população cresce.



A família de soluções de dP/dt = kP



A família de soluções de  $P(t) = Ce^{kt}$ com C > 0 e  $t \ge 0$ 

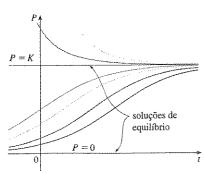


FIGURA 3 Soluções da equação logística

Vamos tentar pensar em uma solução para a Equação 1. Essa equação nos pede para achar uma função cuja derivada é um múltiplo constante dela mesma. Sabemos que as funções exponenciais têm essa propriedade. De fato, se fizermos  $P(t) = Ce^{kt}$ , então

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Portanto, qualquer função exponencial da forma  $P(t) = Ce^{kt}$  é uma solução da Equação 1. Quando estudarmos essa equação em detalhes na Seção 9.4, veremos que não existe outra solução.

Se fizermos C variar em todos os números reais, obtemos uma família de soluções  $P(t) = Ce^{kt}$  cujos gráficos são mostrados na Figura 1. Mas as populações têm apenas valores positivos e assim estamos interessados somente nas soluções com C > 0. E estamos provavelmente preocupados com valores de t maiores que o tempo inicial t = 0. A Figura 2 mostra as soluções com significado físico. Fazendo t = 0, temos  $P(0) = Ce^{k(0)} = C$ ; logo, a constante C torna-se a população inicial, P(0).

A Equação 1 é apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realístico deve refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população estabiliza quando ela se aproxima sua *capacidade de suporte K* (ou diminui em direção a *K* se ela excede o valor de *K*). Para um modelo considerar ambos os casos, estabelecemos duas premissas:

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$  se P for pequeno (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a P).
- $\frac{dP}{dt}$  < 0 se P > K (P diminui se excede K).

Uma expressão simples que incorpora ambas as premissas é dada pela equação

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Note que, se P é pequeno quando comparado com K, então P/K está próximo de 0 e, portanto,  $dP/dt \approx kP$ . Se P > K, daí 1 - P/K é negativo e assim dP/dt < 0.

A Equação 2 é chamada equação diferencial logística e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial. Desenvolveremos técnicas que nos permitam encontrar soluções explícitas da equação logística na Seção 9.5, mas, enquanto isso, podemos deduzir as características qualitativas das soluções diretamente da Equação 2. Primeiro, observamos que as funções constantes P(t) = 0 e P(t) = K são soluções, porque, em qualquer um dos casos, um dos fatores do lado direito da Equação 2 é zero. (Isso certamente tem sentido físico: se a população for 0 ou estiver na capacidade de suporte, permanecerá dessa maneira.) Essas duas soluções constantes são denominadas soluções de equilíbrio.

Se a população inicial P(0) estiver entre 0 e K, então o lado direito da Equação 2 é positivo; assim, dP/dt > 0 e a população aumenta. Se a população ultrapassa a capacidade de suporte (P > K), então 1 - P/K é negativo; assim dP/dt < 0 e a população diminui. Note que, em qualquer um dos casos, se a população se aproxima da capacidade de suporte  $(P \to K)$ , então  $dP/dt \to 0$ , o que significa que a população estabiliza. Dessa forma, esperamos que as soluções da equação diferencial logística tenham gráficos que se pareçam com aqueles da Figura 3. Observe que os gráficos se distanciam da solução de equilíbrio P = 0 e se aproximam da solução de equilíbrio P = K.

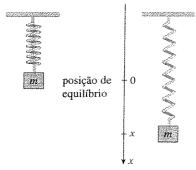


FIGURA 4

Vamos olhar agora para um modelo físico. Consideramos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola vertical (como na Figura 4). Na Seção 6.4 do Volume I discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

força elástica = 
$$-kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante da mola*). Se ignorarmos qualquer força externa de resistência (devido à resistência do ar ou ao atrito), então, pela segunda Lei de Newton (força é igual à massa vezes a aceleração), temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Esse é um exemplo do que chamamos equação diferencial de segunda ordem, porque envolve as derivadas segundas. Vamos ver o que podemos deduzir da solução diretamente da equação. Podemos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que diz que a derivada segunda de x é proporcional a x, mas tem o sinal oposto. Conhecemos duas funções com essa propriedade, as funções seno e co-seno. De fato, todas as soluções da Equação 3 podem ser escritas como combinações de certas funções seno e co-seno (veja o Exercício 3). Isso não é surpreendente; esperamos que a mola oscile ao redor de sua posição de equilíbrio e, assim, é natural pensar que funções trigonométricas estejam envolvidas.

## Equações Diferenciais Gerais

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a mesma da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as Equações 1 e 2 são as de primeira ordem e a Equação 3 é uma de segunda ordem. Em todas as três equações, a variável independente é chamada *t* e representa o tempo, mas, em geral, a variável independente não precisa representar o tempo. Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$y' = xy$$

entendemos que y seja a função desconhecida de x.

Uma função f é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando y = f(x) e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Mas, em geral, resolver uma equação diferencial não é uma tarefa fácil. Não existe uma técnica sistemática que nos permita resolver todas as equações diferencias. Na Seção 9.2, contudo, veremos como esboçar os gráficos das soluções mesmo quando não temos uma fórmula explícita. Também aprenderemos como achar as aproximações numéricas para as soluções.

EXEMPLO 1 
Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial  $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ .

SOLUÇÃO Usamos a Regra do Quociente para diferenciar a expressão em relação a y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$=\frac{ce'-c^2e^{2t}+ce'+c^2e^{2t}}{(1-ce')^2}=\frac{2ce'}{(1-ce')^2}$$

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1 + ce'}{1 - ce'} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 + ce')^2 - (1 - ce')^2}{(1 - ce')^2} \right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2}=\frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é uma solução da equação diferencial.

E07

A STATE OF

 $\Box$  A Figura 5 ilustra os gráficos de sete membros da família do Exemplo 1. A equação diferencial mostra que se  $y \approx \pm 1$ , então  $y' \approx 0$ . Isso é apresentado visivelmente pelo achatamento dos gráficos próximo de y = 1 e y = -1.

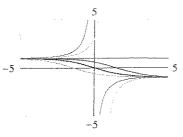


FIGURA 5

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a solução geral) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo  $y(t_0) = y_0$ . Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas-solução e escolhemos uma que passe pelo ponto  $(t_0, y_0)$ . Fisicamente, isso corresponde à medida do estado de um sistema a um tempo  $t_0$  e ao uso da solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

EXEMPLO 2  $\Box$  Encontre uma solução da equação diferencial  $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$  que satisfaça a condição inicial y(0) = 2.

SOLUÇÃO Substituindo os valores t = 0 e y = 2 na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1, obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c, temos 2-2c=1+c, o que fornece  $c=\frac{1}{3}$ . Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

## 9.1

#### Exercícios

- 1. Mostre que  $y = x x^{-1}$  é uma solução da equação diferencial xy' + y = 2x.
- 2. Verifique que  $y = \sin x \cos x \cos x$  é uma solução para o problema de valor inicial

$$y' + (tg x) y = cos^2 x$$
  $y(0) = -$   
no intervalo  $-\pi/2 < x < \pi/2$ .

- (a) Para quais valores não-nulos de k a função y = sen kt satisfaz a equação diferencial y'' + 9y = 0?
- (b) Para aqueles valores de k, verifique que todo membro da família de funções

$$y = A \sin kt + B \cos kt$$

é também uma solução.

**4.** Para quais valores de r a função  $y = e^{rt}$  satisfaz a equação diferencial y'' + y' - 6y = 0?

#### 588 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

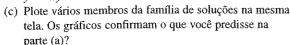
- 5. Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial y'' + 2y' + y = 0?
  - (a)  $y = e^{t}$

7

- (b)  $y = e^{-t}$
- (c)  $y = te^{-t}$
- (d)  $y = t^2 e^{-t}$
- **6.** (a) Mostre que cada membro da família de funções  $y = Ce^{x^2/2}$  é uma solução para a equação diferencial y' = xy.
  - (b) Ilustre a parte (a) plotando vários membros da família de soluções na mesma tela.
  - (c) Encontre a solução da equação diferencial y' = xy que satisfaça a condição inicial y(0) = 5.
  - (d) Encontre a solução da equação diferencial y' = xy que satisfaça a condição inicial y(1) = 2.
- (a) O que você pode dizer da solução da equação  $y' = -y^2$  apenas olhando a equação diferencial?
  - (b) Verifique que todos os membros da família y = 1/(x + C) são soluções da equação na parte (a).
  - (c) Você pode pensar em uma solução da equação diferencial  $y' = -y^2$  que não seja membro da família na parte (b)?
  - (d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = -y^2$$
  $y(0) = 0.5$ 

- **8.** (a) O que você pode dizer sobre o gráfico de uma solução da equação  $y' = xy^3$  quando x está próximo de 0? E se x for grande?
  - (b) Verifique que todos os membros da família  $y = (c x^2)^{-1/2}$  são soluções da equação diferencial  $y' = xy^3$ .



(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Uma população é modelada pela equação diferencial

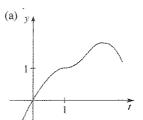
$$\frac{dP}{dt} = 1.2P \left( 1 - \frac{P}{4.200} \right)$$

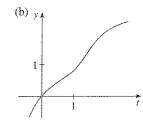
- (a) Para quais valores de P a população está aumentando?
- (b) Para quais valores de P a população está diminuindo?
- (c) Quais são as soluções de equilíbrio?
- 10. A função y(t) satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

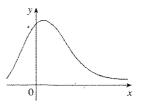
- (a) Quais são as soluções constantes da equação?
- (b) Para quais valores de y a função está aumentando?
- (c) Para quais valores de y a função está diminuindo?
- Explique por que as funções cujos gráficos são dados a seguir não podem ser soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$$





- **12.** A função, cujo gráfico é dado a seguir, é uma solução de uma das seguintes equações diferenciais. Decida qual é a equação correta e justifique sua resposta.
  - (a) y' = 1 + xy
  - (b) y' = -2 xy
  - (c) y' = 1 2xy



- Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as curvas de aprendizado. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função P(t), o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada dP/dt representa a taxa na qual o desempenho melhora.
  - (a) Quando você acha que P aumenta mais rapidamente? O que acontece a dP/dt quando t aumenta? Explique.
  - (b) Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ uma constante positiva}$$

- é um modelo razoável para o aprendizado.
- (c) Faça um esboço de uma possível solução para a equação diferencial.
- 14. Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95 °C em uma sala onde a temperatura é de 20 °C.
  - (a) Quando você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento com o passar do tempo? Explique.
  - (b) A Lei de Newton do Resfriamento estabelece que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Newton do Resfriamento nessa situação particular. Qual a condição inicial? Tendo em vista sua resposta na parte (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?
  - (c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial na parte (b).

Infelizmente é impossível resolver a maioria das equações diferenciais no sentido de obter uma fórmula explícita para a solução. Nesta seção, mostraremos que, mesmo sem uma solução explícita, podemos ainda aprender muito sobre uma solução através de uma abordagem gráfica (campos de direção) ou de uma abordagem numérica (método de Euler).

## Campos de Direção

Suponha que nos peçam para esboçarmos o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Não conhecemos uma fórmula para a solução, então como é possível que esbocemos seus gráficos? Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa. A equação y' = x + y nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado *curva-solução*) é igual à soma das coordenadas x e y no ponto (veja a Figura 1). Em particular, como a curva passa pelo ponto (0, 1), sua inclinação ali deve ser 0 + 1 = 1. Assim, uma pequena porção da curva de solução próximo ao ponto (0, 1) parece um segmento de reta curto através de (0, 1) com inclinação 1 (veja a Figura 2).

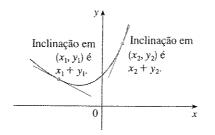


FIGURA 2

Uma solução de y' = x + y

FIGURA 1

Início da curva solução através de (0, 1)

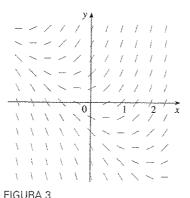
0

(0,1)

Inclinação em (0, 1)

60+1=1.

Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em um número de pontos (x, y) com inclinação x + y. O resultado, denominado campo de direções, é mostrado na Figura 3. Por exemplo, o segmento de reta no ponto (1, 2) tem inclinação 1 + 2 = 3. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas de solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.



Campo de direções para y' = x + y

FIGURA 4

A curva de solução através de (0, 1)

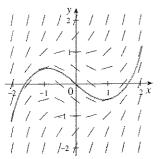


FIGURA 6

FIGURA 5

Agora podemos esboçar a curva de solução pelo ponto (0, 1) seguindo o campo de direções como na Figura 4. Note que desenhamos a curva de modo a torná-la paralela aos segmentos de reta vizinhos.

Em geral, suponha uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde F(x, y) é alguma expressão em x e y. A equação diferencial diz que a inclinação da curva-solução no ponto (x, y) na curva é F(x, y). Se desenharmos pequenos segmentos de reta com inclinação F(x, y) em vários pontos (x, y), o resultado será chamado **campo de direções** (ou **campo de inclinações**). Esses segmentos de reta indicam a direção na qual uma curva-solução está seguindo, assim o campo de direções nos ajuda a visualizar o formato geral dessas curvas.

#### EXEMPLO 1

- (a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial  $y' = x^2 + y^2 1$ .
- (b) Use a parte (a) para esboçar a curva-solução que passa pela origem.

#### **SOLUÇÃO**

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

Х	-2	<b>– 1</b>	0	1	2	-2	- 1	0	1	2	
у	0	0	0	0	0	quoter	1	1	1	1	
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	— <b>I</b>	0	3	4	1	0	1	4	

Agora podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

(b) Podemos começar na origem e mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação –1). Continuamos a desenhar a curva-solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva-solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva-solução para a esquerda da mesma maneira.

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores são muito bons para essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas-solução exibidas na Figura 8 com interceptos y iguais a -2, -1, 0, 1 e 2.

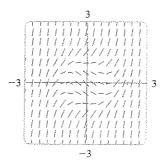


FIGURA 7

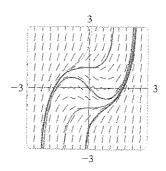


FIGURA 8

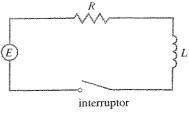


FIGURA 9

Depois disso vamos ver como campos de direções dão uma compreensão das situações físicas. O circuito elétrico simples, mostrado na Figura 9, contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de E(t) volts (V) e uma corrente de I(t) ampères (A) em um tempo t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms  $(\Omega)$  e um indutor com indutância de L henrys (H).

A Lei de Ohm fornece a queda na voltagem devido ao resistor como RL A queda de voltagem devido ao indutor é L(dI/dt). Uma das leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida E(t). Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem que modela a corrente I no tempo t.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Suponha que no circuito simples da Figura 9 a resistência seja 12  $\Omega$ , a indutância de 4 H e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.

- (a) Desenhe um campo de direções para a Equação 1 com esses valores.
- (b) O que você pode dizer sobre o valor limitante da corrente?
- (c) Identifique quaisquer soluções de equilíbrio.
- (d) Se o interruptor for fechado quando t = 0 de forma que a corrente comece com
- I(0) = 0, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

#### SOLUÇÃO

(a) Se fizermos L = 4, R = 12 e E(t) = 60 na Equação 1, obteremos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

O campo de direções para essa equação diferencial é mostrado na Figura 10.

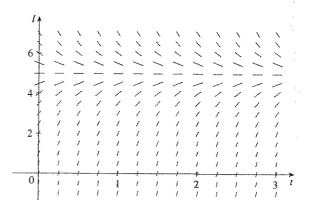


FIGURA 10

 $\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$ 

(b) Do campo de direções parece que todas as soluções se aproximam do valor 5 A, isto é,

$$\lim_{t\to\infty}I(t)=5$$

(c) Parece que a função constante 
$$I(t) = 5$$
 é uma solução de equilíbrio. De fato, podemos verificar isso diretamente da equação diferencial. Se  $I(t) = 5$ , então o lado esquerdo é  $dI/dt = 0$  e o lado direito é  $15 - 3(5) = 0$ .

(d) Usamos o campo de direções para esboçar a curva-solução que passa por (0, 0), como indicado na Figura 11.

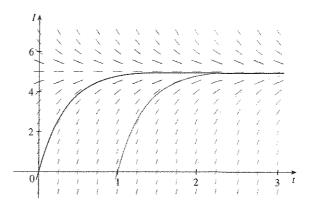


FIGURA 11

Note que na Figura 10 os segmentos de reta ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos. Isso ocorre porque a variável independente t não aparece do lado direito da equação I' = 15 - 3I. Em geral, uma equação diferencial do tipo

$$y' = f(y)$$

em que a variável independente não aparece do lado direito, é chamada **autônoma**. Para tal equação, as inclinações correspondentes a dois pontos diferentes com a mesma coordenada y devem ser iguais. Isso significa que, se conhecermos uma solução para uma equação diferencial autônoma, então poderemos obter infinitas outras apenas pelo deslocamento do gráfico da solução conhecida para a esquerda ou para a direita. Na Figura 11, mostramos as soluções que resultam do deslocamento da curva-solução do Exemplo 2, uma ou duas unidades em segundos para a direita. Elas correspondem ao fechamento do interruptor quando t=1 ou t=2.

#### Método de Euler

A idéia básica por trás dos campos de direções pode ser usada para encontrar aproximações numéricas para as soluções das equações diferenciais. Ilustramos o método no problema de valor inicial que utilizamos para introduzir os campos de direções:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

A equação diferencial nos conta que y'(0) = 0 + 1 = 1; dessa forma, a curva-solução tem inclinação 1 no ponto (0, 1). Como uma primeira aproximação para a solução, poderíamos usar uma aproximação linear L(x) = x + 1. Em outras palavras, poderíamos usar a reta tangente em (0, 1) como uma aproximação grosseira para a curva-solução (veja a Figura 12).

A idéia de Euler era melhorar essa aproximação prosseguindo apenas uma pequena distância ao longo da reta tangente e, então, fazer uma correção no meio do caminho, mudando a direção, como indicado pelo campo de direções. A Figura 13 mostra o que acontece se começamos ao longo da reta tangente, mas paramos quando x=0.5. (Essa distância horizontal percorrida é denominada passo.) Como L(0.5)=1.5, temos  $y(0.5)\approx 1.5$  e tomamos (0.5, 1.5) como o ponto de partida para um novo segmento de reta. A equação diferencial nos diz que y'(0.5)=0.5+1.5=2, assim, usamos a função linear

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como uma aproximação para a solução para x > 0.5 (veja o segmento azul na Figura 13). Se diminuirmos o passo de 0.5 para 0.25, obteremos uma aproximação de Euler melhor (veja a Figura 14).

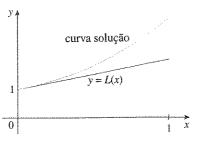
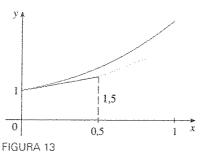


FIGURA 12 Primeira aproximação de Euler



0 0,25 FIGURA 14

Aproximação de Euler com o passo 0.5

Aproximação de Euler com o passo 0,25

Em geral, o método de Euler diz para começarmos no ponto dado pelo valor inicial e prosseguirmos na direção indicada pelo campo de direções. Pare após um pequeno espaço de tempo, olhe para a inclinação na nova localização e prossiga naquela direção. Continue parando e mudando de direção de acordo com o campo de direções. O método de Euler não produz a solução exata para um problema de valor inicial. Mas, pela diminuição do passo (e, portanto, aumentando o número de correções no meio do caminho), obtemos sucessivamente melhores aproximações para a solução exata. (Compare as Figuras 12, 13 e 14.)

Para o problema de valor inicial de primeira ordem geral y' = F(x, y),  $y(x_0) = y_0$ , nosso objetivo é encontrar valores aproximados para a solução em números igualmente espaçados  $x_0$ ,  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_1 + h$ , ..., onde h é o passo. A equação diferencial nos conta que a inclinação em  $(x_0, y_0)$  é  $y' = F(x_0, y_0)$ , assim a Figura 15 nos mostra que o valor aproximado para a solução quando  $x = x_1$  é

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$
  
Similarmente,  $y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$   
Em geral,  $y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$ 

EXEMPLO 3 

Use o método de Euler com o passo 0,1 para construir uma tabela de valores aproximados para a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUÇÃO Nos é dado que  $h = 0,1, x_0 = 0, y_0 = 1$  e F(x, y) = x + y. Desse modo, temos

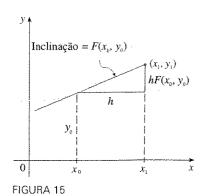
$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$
  

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$
  

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Isso significa que, se y(x) é a solução exata, então  $y(0,3) \approx 1,362$ . Prosseguindo com cálculos similares, temos os valores na tabela:

n	$X_R$	$y_n$	n	$X_n$	$y_n$
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485



syrag Skoll

Para uma tabela com valores mais precisos no Exemplo 3, poderíamos diminuir o tamanho do passo. Contudo, para um número grande de pequenos passos a quantidade de cálculos é considerável e, assim, precisamos programar uma calculadora ou um computador para fazer os cálculos. A seguinte tabela mostra os resultados da aplicação do método de Euler com diminuição do tamanho do passo para o problema de valor inicial do Exemplo 3.

☐ Pacotes computacionais que produzem aproximações numéricas para as soluções de equações diferenciais usam métodos que são refinamentos do método de Euler. Embora o método de Euler seja simples, ele não é preciso, mas é a idéia básica na qual os métodos mais precisos se baseiam.

Passo	Estimativa de Euler para y (0,5)	Estimativa de Euler para y(1)		
0,500	1,500000	2,500000		
0,250	1,625000	2.882813		
0,100	1,721020	3,187485		
0,050	1,757789	3,306595		
0,020	1,781212	3.383176		
0,010	1,789264	3.409628		
0,005	1,793337	3.423034		
0,001	1,796619	3,433848		

Note que as estimativas de Euler na tabela parecem estar aproximando limites, a saber, os valores verdadeiros de y(0,5) e y(1). A Figura 16 mostra os gráficos das aproximações de Euler com os passos 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01 e 0,005. Eles estão aproximando a curva-solução exata quando o passo h se aproxima de 0.

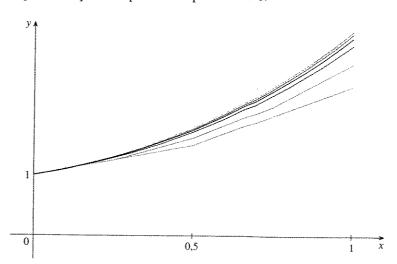


FIGURA 16

Aproximações de Euler tendendo à solução exata

**EXEMPLO 4**  $\Box$  No Exemplo 2 discutimos um circuito elétrico simples com resistência 12  $\Omega$ , indutância 4 H e uma pilha com voltagem 60 V. Se o interruptor estiver fechado quando t=0, modelamos a corrente I no tempo t pelo problema de valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime a corrente no circuito meio segundo após o fechamento do interruptor.

SOLUÇÃO Usamos o método de Euler com F(t, I) = 15 - 3I,  $t_0 = 0$ ,  $I_0 = 0$  e o passo h = 0,1 segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2,55 + 0,1(15 - 3 \cdot 2,55) = 3,285$$

$$I_4 = 3,285 + 0,1(15 - 3 \cdot 3,285) = 3,7995$$

$$I_5 = 3,7995 + 0,1(15 - 3 \cdot 3,7995) = 4,15965$$

Assim a corrente após 0,5 s é

$$I(0,5) \approx 4,16 \text{ A}$$

## Exercícios

- 1. Um campo de direções para a equação diferencial  $y' = y(1 - \frac{1}{4}y^2)$  é mostrado.
  - (a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

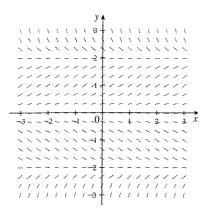
(i) 
$$y(0) = 1$$

(ii) 
$$y(0) = -1$$

(iii) 
$$y(0) = -3$$

(iv) 
$$y(0) = 3$$

(b) Ache todas as equações de equilíbrio.



- 2. Um campo de direções para a equação diferencial  $y' = x \operatorname{sen} y \text{ \'e mostrado}.$ 
  - (a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(i) 
$$y(0) = 1$$

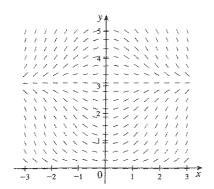
(ii) 
$$y(0) = 2$$

(iii) 
$$y(0) = \pi$$

$$(iv) y(0) = 4$$

$$(v) y(0) = 5$$

(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



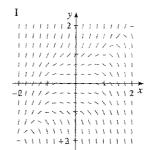
3-6 🗆 Ligue a equação diferencial a seu campo de direções (I-IV). Dê as razões para sua resposta.

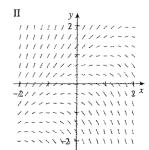
3. 
$$y' = y - 1$$

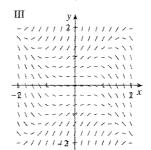
4. 
$$y' = y - x$$

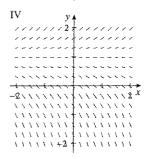
5. 
$$y' = y^2 - x^2$$











7. Use o campo de direções I (para os Exercícios 3-6) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(a) 
$$y(0) = 1$$

(b) 
$$y(0) = 0$$

(c) 
$$y(0) = -1$$

8. Repita o Exercício 7 para o campo de direções III.

9-10 □ Esboce o campo de direções para a equação diferencial. Use-o para esboçar três curvas-solução.

9. 
$$y' = 1 + y$$

10. 
$$y' = x^2 - y^2$$

11-14 🗆 Esboce o campo de direções das equações diferenciais dadas. Use-os para esboçar a curva-solução que passa pelo ponto dado.

**11.** 
$$y' = y - 2x$$
 (1, 0)

**12.** 
$$y' = 1 - xy$$
 (0, 0)

**13.** 
$$y' = y + xy$$
 (0, 1)

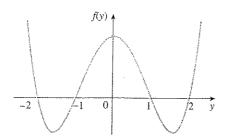
**14.** 
$$y' = x - xy$$
 (1. 0)

💢 15-18 🗆 Use um sistema algébrico computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial dada. Obtenha uma impressão e esboce uma curva-solução que passe por (0, 1). Use o CAS para desenhar a curva-solução e compare o resultado com seu esboço.

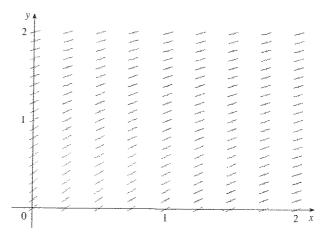
**15.** 
$$y' = y \sin 2x$$

**16.** 
$$y' = \text{sen}(x + y)$$

- 17. Use um sistema algébrico computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial  $y' = y^3 - 4y$ . Obtenha uma impressão e esboce as soluções que satisfazem a condição inicial y(0) = c para os diversos valores de c. Para quais valores de c o limite  $\lim_{t\to\infty} y(t)$  existe? Quais são os possíveis valores para esse limite?
- 18. Faça o esboço de um campo de direções para a equação diferencial autônoma y' = f(y), onde o gráfico de f é como o exibido. Como o comportamento-limite das soluções depende do valor de y(0)?



- 19 (a) Use o método de Euler com cada um dos passos dados para estimar o valor de y(0,4), onde y é a solução do problema de valor inicial y' = y, y(0) = 1. (i) h = 0.4
- (ii) h = 0.2
- (iii) h = 0.1
- (b) Sabemos que a solução exata do problema de valor inicial na parte (a) é  $y = e^x$ . Desenhe, o mais preciso que você puder, o gráfico de  $y = e^x$ ,  $0 \le x \le 0.4$ , junto com as aproximações de Euler usando os passos da parte (a). (Seus esboços devem se parecer com as Figuras 12, 13 e 14.) Use seus esboços para decidir se suas estimativas na parte (a) estão abaixo ou acima.
- (c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule os erros na parte (a) usando o método de Euler para estimar o verdadeiro valor de y(0, 4); a saber,  $e^{0,4}$ . O que acontece com o erro cada vez que o passo cai pela metade?
- 20. Um campo de direções para uma equação diferencial é apresentado. Desenhe, com uma régua, os gráficos das aproximações de Euler para a curva-solução que passa pela origem. Use os passos h = 1 e h = 0.5. As estimativas de Euler estarão acima ou abaixo? Explique.



- 21. Use o método de Euler com o passo 0,5 para calcular os valores aproximados de y, y1, y2, y3 e y4 para a solução do problema de valor inicial y' = y - 2x, y(1) = 0.
- 22. Use o método de Euler com o passo 0.2 para estimar v(1). onde y(x) é a solução para o problema de valor inicial y' = 1 - xy, y(0) = 0.
- **23.** Use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar y(0,5), onde y(x) é a solução do problema de valor inicial y' = y + xy, y(0) = 1.
- 24. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar y(1, 4), onde y(x) é a solução do problema de valor inicial y' = x - xy, y(1) = 0.
  - (b) Repita a parte (a) com o passo 0,1.
- 25. (a) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler para calcular y(1), onde y(x) é a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

- (i) h = 1(iii) h = 0.01
- (ii) h = 0.1(iv) h = 0.001
- (b) Verifique que  $y = 2 + e^{-x^3}$  é a solução exata da equação diferencial.
- (c) Encontre os erros ao usar o método de Euler para calcular y(1) com os passos da parte (a). O que acontece com o erro quando o passo é dividido por 10?
- 26. (a) Programe seu sistema algébrico computacional usando o método de Euler com o passo 0,01 para calcular y(2), onde y é a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^3 - y^3$$
  $y(0) = 1$ 

- (b) Verifique seu trabalho usando o CAS para desenhar a curva-solução.
- 27. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com resistência de R ohms  $(\Omega)$ . A queda de voltagem no

capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso a Lei de Kirchhoff fornece

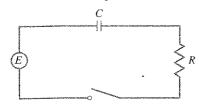
$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas I = dQ/dt, assim temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5  $\Omega$ , a capacitância seja 0,05 F e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.

- (a) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.
- (b) Qual é o valor-limite da carga?



- (c) Existe uma solução de equilíbrio?
- (d) Se a carga inicial for Q(0) = 0 C, use o campo de direções para esboçar a curva-solução.
- (e) Se a carga inicial for Q(0) = 0 C, use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar a carga depois de meio segundo.
- 28. No Exercício 14 na Seção 9.1 consideramos uma xícara de café a 95 °C em uma sala com temperatura de 20 °C. Suponha que o café esfrie a uma taxa de 1 °C por minuto quando sua temperatura for 70 °C.
  - (a) Como se torna a equação diferencial nesse caso?
  - (b) Desenhe um campo de direções e use-o para esboçar a curva-solução para o problema de valor inicial. Qual é o valor-limite da temperatura?
  - (c) Use o método de Euler com o passo h = 2 minutos para estimar a temperatura do café após 10 minutos.

# 9.3 Equações Separáveis

Temos olhado para as equações diferenciais de primeira ordem a partir de um ponto de vista geométrico (campos de direções) e a partir de um ponto de vista numérico (método de Euler). E do ponto de vista simbólico? Seria bom ter uma fórmula explícita para uma solução de uma equação diferencial. Infelizmente isso não é sempre possível. Mas, nesta seção, examinaremos um tipo de equação diferencial que *pode* ser resolvida explicitamente.

Uma equação separável é aquela diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x vezes uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. De modo equivalente, se  $f(y) \neq 0$ , podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde h(y) = 1/f(y). Para resolver essa equação a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y) dy = g(x) dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então integramos ambos os lados da equação:

$$\int h(y) \, dy = \int g(x) \, dx$$

A Equação 2 define y implicitamente como uma função de x. Em alguns casos, poderemos resolver para y em termos de x.

☐ A técnica para resolver as equações diferenciais separáveis foi primeiro usada por James Bernoulli (em 1690) para resolver um problema sobre pêndulos e por Leibniz (em uma carta para Huygens em 1691). John Bernoulli explicou o método geral em um artigo publicado em 1694.

A justificativa para o passo na Equação 2 vem da Regra de Substituição: se h e g satisfazem (2), então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

logo

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

е

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

EXEMPLO 1 a

- (a) Resolva a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$ .
- (b) Ache a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial y(0) = 2.

SOLUÇÃO

(a) Escrevemos a equação em termos diferenciais e integramos os dois lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

 $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$ 

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante  $C_1$  no lado esquerdo e outra constante  $C_2$  no lado direito. Mas decidimos combiná-los em uma só constante no lado direito, fazendo  $C = C_2 - C_1$ .)

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde K = 3C. (Pois C é uma constante qualquer e assim será K.)

(b) Se fizermos x = 0 na equação geral da parte (a), temos  $y(0) = \sqrt[3]{K}$ . Para satisfazer a condição inicial y(0) = 2, devemos fazer  $\sqrt[3]{K}$  e assim temos K = 8.

Portanto, a solução do problema com valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

30% 30%

FYFMPIN 2 =

Resolva a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$ .

A Figura 1 ilustra o gráfico de vários membros da família de soluções da equação diferencial do Exemplo 1. A solução do problema com valor inicial da parte (b) é mostrada em azul.

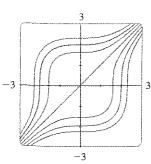
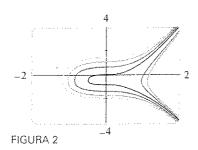


FIGURA 1

 Alguns sistemas algébricos computacionais podem plotar as curvas definidas por equações implícitas. A Figura 2 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções da equação diferencial no Exemplo 12. Olhando as curvas da esquerda para a direita, os valores de C são 3, 2, 1, 0, -1, -2 e -3.



□ Se uma solução y é uma função que satisfaça  $y(x) \neq 0$  para algum x, ela provém de um teorema de existência e unidade para soluções de equações diferenciais em que  $y(x) \neq 0$  para todo x.

SOLUÇÃO

3

Escrevendo a equação em uma forma diferencial e integrando ambos os lados, temos

$$(2y + \cos y) dy = 6x^2 dx$$

$$\int (2y + \cos y) dy = \int 6x^2 dx$$

$$y^2 + \sin y = 2x^3 + C$$

onde C é uma constante. A Equação 3 fornece uma solução geral implícita. Nesse caso é impossível resolver a equação para expressar y explicitamente como uma função de x.

EXEMPLO 3  $\Box$  Resolva a equação  $y' = x^2y$ .

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Se  $y \neq 0$ , podemos reescrevê-la em uma notação diferencial e integrá-la:

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Essa equação define y implicitamente como uma função de x. Mas, nesse caso, podemos resolver explicitamente para y, como a seguir

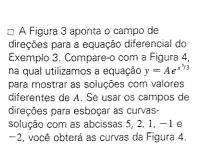
> $|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3) + C} = e^C e^{x^3/3}$  $v = \pm e^{C} e^{x^{3}/3}$

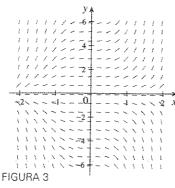
Assim

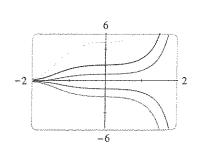
Notamos que a função y=0 é também uma solução da equação diferencial dada. Dessa forma, podemos escrever a solução geral na forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

onde A é uma constante arbitrária ( $A = e^{C}$  ou  $A = -e^{C}$  ou A = 0).







208

FIGURA 4

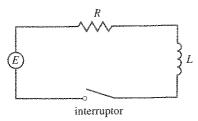


FIGURA 5

**EXEMPLO 4**  $\square$  Na Seção 9.2, modelamos a corrente I(t) no circuito elétrico mostrado na Figura 5 pela equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é 12  $\Omega$ , a indutância é 4 H, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor é ligado quando t=0. Qual o valor-limite da corrente?

SOLUÇÃO Com L=4, R=12 e E(t)=60, a equação torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$$

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

ou

e o problema de valor inicial é

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconhecemos essa equação como separável e a resolvemos da seguinte forma:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\frac{1}{3} \ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \frac{1}{3}Ae^{-3t}$$

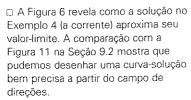
Como I(0) = 0, temos  $5 - \frac{1}{3}A = 0$ , assim A = 15 e a solução é

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

A corrente-limite, em ampères, é

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t}$$
$$= 5 - 0 = 5$$

\$1000 \$1000



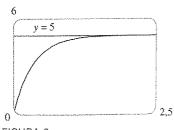


FIGURA 6

## Trajetórias Ortogonais

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta cada curva da família ortogonalmente, isto é, com ângulos retos (veja a Figura 7). Por exemplo, cada membro da família y = mx de retas que passa pela origem é uma trajetória ortogonal da família  $x^2 + y^2 = r^2$  de círculos concêntricos com o centro na origem (veja a Figura 8). Dizemos que as duas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

trajetória ortogonal

FIGURA 7

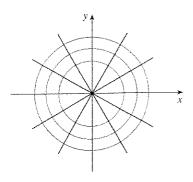


FIGURA 8

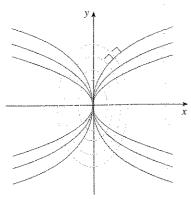


FIGURA 9

EXEMPLO 5  $\Box$  Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas  $x=ky^2$ , onde k é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO As curvas  $x = ky^2$  formam uma família de parábolas cujo eixo de simetria é o eixo x. A primeira etapa é encontrar uma equação diferencial única que é satisfeita por todos os membros da família. Se diferenciarmos  $x = ky^2$ , obteremos

$$1 = 2ky \frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Essa é uma equação diferencial que depende de k, mas precisamos de uma equação que seja válida para todos os valores k simultaneamente. Para eliminar k notamos que, da equação geral da parábola dada  $x = ky^2$ , temos  $k = x/y^2$ , e assim a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\frac{x}{v^2}y}$$

ou

£

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Isso significa que a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das parábolas é y' = y/(2x). Em uma trajetória ortogonal a inclinação da reta tangente deve ser o inverso dessa inclinação. Portanto, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Essa equação diferencial é separável e a resolvemos como segue:

$$\int y \, dy = -\int 2x \, dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$
$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

onde C é uma constante arbitrária positiva. Então as trajetórias ortogonais são a família de elipses dada pela Equação 4 e esboçada na Figura 9.

As trajetórias ortogonais ocorrem em vários ramos da física. Por exemplo, em um campo eletrostático, as linhas de força são ortogonais às linhas de potencial constante. Também as linhas de fluxo em aerodinâmica são trajetórias ortogonais às curvas de velocidade eqüipotenciais.

#### Problemas de Misturas

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). A solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se y(t) denota a quantidade de substância no tanque no tempo t, então y'(t) é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação freqüentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sangüínea.

EXEMPLO 6 □ Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5.000 L de água. A água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO Seja y(t) a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Nos foi dado que y(0) = 20 e queremos encontrar y(30). Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que é satisfeita por y(t). Note que dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal, assim

$$\frac{dy}{dt} = (\tan de \, \arctan da) - (\tan de \, \sin da)$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

taxa de entrada = 
$$\left(0,03 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0,75 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5.000 L de líquido, então a concentração no tempo t é y(t)/5.000 (medida em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

taxa de saída = 
$$\left(\frac{y(t)}{5.000} \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200} \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

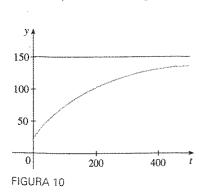
$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$
$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Como y(0) = 20, temos  $-\ln 130 = C$ , logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto  $|150 - y| = 130e^{-t/200}$ 

☐ A Figura 10 mostra o gráfico da função y(i) do Exemplo 6. Note que, com o passar do tempo, a quantidade de sal se aproxima de 150 kg.



Como y(t) é contínua, y(0) = 20 e o lado direito nunca é zero, deduzimos que -150 - y(t) é sempre positiva. Então, |150 - y| = 150 - y e daí

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

## Exercícios

1-10 🗆 Resolva a equação diferencial.

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

2. 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{4v^3}$$

3. 
$$(x^2 + 1)y' = xy$$

4. 
$$y' = y^2 \sin x$$

5. 
$$(1 + tg y) y' = x^2 + 1$$

**6.** 
$$\frac{du}{dr} = \frac{1 + \sqrt{r}}{1 + \sqrt{u}}$$
  
**8.**  $y' = \frac{xy}{2 \ln y}$ 

$$7. \ \frac{dy}{dt} = \frac{te'}{y\sqrt{1+y^2}}$$

$$8. \quad y' = \frac{xy}{2 \ln y}$$

9. 
$$\frac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$$

$$10. \frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$$

11-18 🗆 Ache a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.

**11.** 
$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$
,  $y(1) = 0$ 

12. 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + y^2}, \quad y(0) = 1$$

13. 
$$x \cos x = (2y + e^{3y})y'$$
,  $y(0) = 0$ 

**14.** 
$$\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, P(1) = 2$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$$

$$\mathbf{16.} \ \frac{dy}{dt} = te^{y}, \quad y(1) = 0$$

17. 
$$y' \text{ tg } x = a + y, \ y(\pi/3) = a, \ 0 < x < \pi/2$$

**18.** 
$$xy' + y = y^2$$
,  $y(1) = -1$ 

- 19. Encontre uma equação da curva que satisfaça  $dy/dx = 4x^3y$  e cujo intercepto y é 7.
- 20. Determine uma equação da curva que passa pelo ponto (1, 1) e cuja inclinação em (x, y) é  $y^2/x^3$ .
- 21. (a) Resolva a equação diferencial  $y' = 2x \sqrt{1 y^2}$ . (b) Resolva o problema de valor inicial  $y' = 2x \sqrt{1 y^2}$ . y (0) = 0 e faça um gráfico de solução.
  - (c) O problema de valor inicial  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ , y(0) = 2tem solução? Explique.
- **22.** Resolva a equação  $e^{-y}y' + \cos x = 0$  e plote vários membros da família de soluções. Como a curva-solução muda quando a constante C varia?

- 23. Resolva o problema de valor inicial  $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$ ,  $y(0) = \pi/2$ , e plote a solução (se seu CAS fizer gráficos implícitos).
- **24.** Resolva a equação  $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$  e plote vários membros da famílià de soluções (se seu CAS fizer gráficos implícitos). Como muda a curva-solução quando a constante C varia?

.::1 25**−**29 ⊆

- (a) Use um sistema algébrico computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial. Imprima-o e esboce algumas curvas-solução sem resolver a equação diferencial.
- (b) Resolva a equação diferencial.
- (c) Use o CAS para desenhar vários membros da família de soluções obtida na parte (b). Compare com as curvas da parte (a).

8 5 9 3 c

**26.** 
$$y' = x^2/y$$

🌌 27-30 🗆 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas. Usando uma calculadora (ou um computador), desenhe vários membros de cada família na mesma tela.

**27.** 
$$y = kx^2$$

28. 
$$x^2 - v^2 = 1$$

**29.** 
$$y = (x + k)^{-1}$$

**30.** 
$$y = ke^{-x}$$

- 31. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 27 na Seção 9.2 para encontrar uma expressão para a carga no tempo t. Encontre o valor-limite da carga.
- 32. No Exercício 28 na Seção 9.2, discutimos uma equação diferencial que modela a temperatura de uma xícara de café a 95 °C em uma sala a 20 °C. Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para a temperatura do café no tempo t.
- No Exercício 13, na Seção 9.1, formulamos um modelo para o aprendizado na forma da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde P(t) mede o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade depois de um tempo de treinamento t, M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para P(t). Qual é o limite dessa expressão?

34. Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto C:
A + B → C. A lei de ação das massas estabelece que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

(Veja o Exemplo 4 na Seção 3.3. no Volume I.) Então, se as concentrações iniciais forem [A] = a mols/L e [B] = b mols/L e escrevermos x = [C], então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

- (a) Assumindo que  $a \neq b$ , encontre x como uma função de t. Use o fato de que a concentração inicial de C seja 0.
- (b) Encontre x(t) assumindo que a = b. Como essa expressão para x(t) é simplificada se soubermos que [C] = a/2 depois de 20 segundos?
- 35. Em contraste com a situação do Exercício 34, as experiências mostram que a reação H<sub>2</sub> + Br<sub>2</sub> → 2 HBr satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

e, portanto, para essa reação a equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

onde x = [HBr] e a e b são concentrações iniciais de hidrogênio e bromo.

- (a) Escreva x como uma função de t no caso onde a = b. Use o fato de que x (0) = 0.
- (b) Se a > b, escreva t como uma função de x. (Dica: ao efetuar a integração, faça a substituição  $u = \sqrt{b x}$ .)
- **36.** Uma esfera com raio de 1 m está a uma temperatura de 15°C. Ela está dentro de uma esfera concêntrica com raio de 2 m e temperatura de 25 °C. A temperatura T(r) a uma distância r do centro comum das duas esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fixarmos S = dT/dr, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para a temperatura T(r) entre as duas esferas.

37. Uma solução de glicose é administrada por via intravenosa na corrente sangüínea a uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sangüínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então um modelo para a concentração C = C(t) da solução de glicose na corrente sangüínea é

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Suponha que a concentração no tempo t = 0 é C<sub>0</sub>. Determine a concentração em um tempo qualquer t para resolver a equação diferencial.

- (b) Assumindo que  $C_0 < r/k$ , calcule  $\lim_{t \to \infty} C(t)$  e interprete sua resposta.
- 38. Um pequeno país tem \$ 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia \$ 50 milhões chegam nos bancos daquele lugar. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Denote por x = x(t) a quantidade de moeda nova em circulação no tempo t, com x(0) = 0.
  - (a) Formule um modelo matemático na forma de um problema de valor inicial que represente o "fluxo" da nova moeda em circulação.
  - (b) Resolva o problema de valor inicial encontrado na parte (a).
  - (c) Quanto tempo levará para a nova moeda representar 90% da moeda em circulação?
- 39. Um tanque contém 1.000 L de água salgada com 15 kg de sal dissolvido. A água pura entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida bem misturada e sai do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de 20 minutos?
- 40. Um tanque contém 1000 L de água pura. A água salgada com 0,05 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 5 L/min. A água salgada com 0,04 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 L/min. Quanto sal está no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de uma hora?
- 41. Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho; assim, sua massa em um tempo t é uma função de t, m(t). A taxa do aumento da massa é km(t) para alguma constante positiva k. Quando aplicamos a Lei do Movimento de Newton à gota de chuva, obtemos (mv)' = gm, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A velocidade terminal da gota de chuva é lim₁→∞ v(t). Encontre uma expressão para a velocidade terminal em termos de g e k.
- **42.** Um objeto de massa *m* está se movendo horizontalmente através de um meio que resiste ao movimento com uma força que é uma função da velocidade; isto é,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

onde v = v(t) e s = s(t) representam a velocidade e a posição do objeto no tempo t, respectivamente. Por exemplo, pense em um barco se movendo pela água.

- (a) Suponha que a força de resistência seja proporcional à velocidade, isto é, f(v) = -kv, k uma constante positiva.
  (Esse modelo é apropriado para os valores pequenos de v) Sejam v(0) = v<sub>0</sub> e s(0) = s<sub>0</sub> os valores iniciais de v e s.
  Determine v e s em um tempo qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre a partir do tempo t = 0?
- (b) Suponha que a força de resistência seja proporcional ao quadrado da velocidade, isto é,  $f(v) = -kv^2$ , k > 0. (Este modelo foi pela primeira vez proposto por Newton.) Sejam  $v_0$  e  $s_0$  os valores iniciais de v e s. Determine v e s em um tempo qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre nesse caso?

- 43. Seja A(t) a área de uma cultura de tecido em um tempo t e seja M a área final do tecido quando o crescimento está completo. A maioria das divisões celulares ocorre na periferia do tecido, e o número de células na periferia é proporcional a √A(t). Assim, um modelo razoável para o crescimento de tecido é obtido assumindo-se que a taxa de crescimento da área seja proporcional a √A(t) em conjunto com M − A(t).
  - (a) Formule uma equação diferencial e use-a para mostrar que o tecido cresce mais rápido quando A(t) = M/3.
  - (b) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para A(t). Use um sistema algébrico computacional para fazer a integração.
- 44. De acordo com a Lei de Newton da Gravitação Universal, a força gravitacional de um objeto de massa m que tenha sido lançado verticalmente para cima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

onde x=x(t) é a distância do objeto acima da superfície no tempo t; R, o raio da Terra; e g, a aceleração da gravidade. Também, pela Segunda Lei de Newton, F=ma=m(dv/dt) e dessa forma

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

(a) Suponha que um foguete seja lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial  $v_0$ . Seja h a altura máxima acima da superfície alcançada pelo objeto. Mostre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$$

- [Dica: Pela Regra da Cadeia, m (dv/dt) = mv (dv/dx).]
- (b) Calcule  $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$ . Esse limite é chamado velocidade de escape da Terra.
- (c) Use R = 3.960 milhas e g = 32 pés/s<sup>2</sup> para calcular  $v_e$  em pés por segundo e em milhas por segundo.

### Projeto Apiicado

### Quão Rápido um Tanque Esvazia?

Se água (ou outro líquido) está vazando de um tanque, esperamos que o fluxo seja maior no começo (quando o tanque estiver mais cheio) e vai gradualmente diminuindo à medida que o nível de água do tanque diminui. Mas queremos uma descrição matemática mais precisa de como o fluxo decresce a fim de responder às perguntas que os engenheiros fazem: após quanto tempo o tanque estará completamente vazio? Quão cheio o tanque deve estar para garantir uma pressão mínima a um sistema sprinkler?

Sejam h(t) e V(t) a altura e o volume de água em um tanque no tempo t. Se a água escorre através de um buraco com área a no fundo do tanque, então a Lei de Torricelli diz que:

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

onde g é a aceleração devido a gravidade. Logo, a taxa na qual a água flui do tanque é proporcional à raiz quadrada da altura da água.

1. (a) Suponha que o tanque seja cilíndrico com altura igual a 6 pés e raio igual a 2 pés e que o buraco seja um círculo com raio igual a 1 pol. Se tomarmos g = 32 pés/ $s^2$  então mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

- (b) Resolva esta equação para encontrar a altura da água no tempo t, supondo que o tanque esteja cheio em t=0.
- (c) Quanto tempo iria demorar para o tanque ficar completamente vazio?
- 2. O modelo teórico dado pela Equação 1 não é muito preciso, se levarmos em conta a rotação e viscosidade do líquido. Ao contrário, o modelo

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

é o mais usado e a constante k (a qual depende das propriedades físicas do líquido) é determinada a partir dos dados relacionados com o vazamento do tanque.

□ Esta parte do projeto é melhor indicada como uma demonstração em classe ou como um projeto em grupo com três estudantes em cada grupo, um para marcar o tempo, outro para estimar a alfura a cada 10 segundos e um terceiro para registrar esses valores.

- (a) Suponha que o buraco esteja posicionado na lateral de uma garrafa e que a altura h da água (acima do buraco) decresça de 10 cm para 3 cm em 68 segundos. Use a Equação 2 para encontrar uma expressão para h(t). Avalie h(t) para t=10, 20, 30, 40, 50, 60.
- (b) Perfure um buraco de 4 mm perto do fundo de uma garrafa plástica de um refrigerante de 2 litros. Faça marcas de 0 a 10, com "0" correspondendo ao topo do buraco. Com um dedo tampando o buraco, encha a garrafa com água até a marca de 10 cm. Tire seu dedo do buraco e registre os valores de h(t) para t = 10, 20, 30, 40, 50, 60 segundos. (Provavelmente, você vai descobrir que demorará cerca de 68 segundos para o nível chegar a h = 3 cm.) Compare seus dados com os valores de h(t) da parte (a). Quão bem o modelo previu os valores reais?
- 3. Em muitas partes do mundo, a água para os sistemas sprinkler em grandes hotéis e hospitais é fornecida sob ação da gravidade, por tanques cilíndricos colocados nos telhados desses prédios. Suponha que tanque tenha um raio de 10 pés e o diâmetro de sua saída de água seja de 2,5 polegadas. Um engenheiro tem de garantir que a pressão da água seja, no mínimo, de 2.160 lb/pés por um período de 10 minutos. (Quando um incêndio acontece, o sistema elétrico pode falhar e pode levar cerca de 10 minutos para que o gerador de emergência e bombas antiincêndio sejam ativados.) Qual a altura que o engenheiro deve especificar para o tanque a fim de garantir essa exigência? (Use o fato de que a pressão da água a uma profundidade de d pés é P = 62,5 d. Veja a Seção 8.3.)
- **4.** Nem todos os tanques têm a forma de cilindros. Suponha que um tanque tenha uma área A(h) para um corte seccional em uma altura h. Então, o volume de água até a altura h é  $V = \int_0^h A(u) \ du$  e, portanto, o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá  $\frac{dv}{dh} = A(h)$ . De maneira que temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

e assim a Lei de Torriclelli torna-se

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponha que o tanque tenha o formato de uma esfera de raio igual a 2 m e está cheia, inicialmente, com a metade de sua capacidade de água. Se o raio do buraco circular é 1 cm e assumimos que  $g=10~{\rm m/s^2}$ , mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$(4h - h^2) \frac{dh}{dt} = -0,0001 \sqrt{20h}$$

(b) Em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

#### Projeto Aplicacio

### O Que É Mais Rápido: Subir ou Descer?

Suponha que você jogue uma bola no ar. Você acha que ela leva mais tempo para alcançar sua altura máxima ou para cair de volta para a Terra de sua altura máxima? Resolveremos esse problema neste projeto, mas, antes de começar, pense sobre a situação e dê um palpite baseado em sua intuição física.

1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva  $v_0$ . Assumimos que as forças agindo na bola sejam a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com

🗆 Na modelagem da força devido a resistência do ar, várias funções têm sido usadas, dependendo das características físicas e da velocidade da bola. Aqui nós usamos um modelo linear, -pv, mas um modelo quadrático ( $-pv^2$  na subida e  $pv^2$  na descida) é outra possibilidade para velocidades mais altas (veja Exercício 42 na Seção 9.3). Para uma bola de golfe, experimentos têm mostrado que um bom modelo é  $-pv^{1,3}$ na ascendência e  $|p||v||^{1.3}$  na descendência. Mas não importa qual função força -f(v) seja usada [Aqui f(v)>0 para v>0 e f(v)<0 para v < 0], a resposta para a questão permanece a mesma. Veja F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually" Amer. Math. Monthly 108 (2001), p. 437-440.

grandeza  $p \mid v(t) \mid$  onde p é uma constante positiva e v(t) é a velocidade da bola no tempo t. Na subida e na descida, a força total agindo na bola é -pv - mg. (Durante a subida, v(t) é positiva e a resistência age para baixo; durante a descida, v(t) é negativa e a resistência age para cima.) Assim, pela Segunda Lei de Newton, a equação de movimento é

$$mv' = -pv - mg$$

Resolva essa equação diferencial para mostrar que a velocidade é

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Mostre que a altura da bola, até ela atingir o chão, é

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right) \frac{m}{p} \left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

3. Seja  $t_1$  o tempo que a bola leva para alcançar sua altura máxima. Mostre que

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln \left( \frac{mg + pv_0}{mg} \right)$$

Calcule esse tempo para uma bola com massa 1 kg e velocidade inicial 20 m/s. Suponha que a força de resistência do ar seja  $\frac{1}{10}$  da velocidade.

- 4. Seja  $t_2$  o tempo no qual a bola volta para a Terra. Para a bola do Problema 3, estime  $t_2$  usando um gráfico da função altura y(t). O que é mais rápido: ir para cima ou voltar para baixo?
  - **5.** Em geral, não é fácil encontrar  $t_2$  porque é impossível resolver a equação y(t) = 0 explicitamente. Podemos, entretanto, usar um método indireto para estabelecer se a subida ou a descida é mais rápida; determinamos se  $y(2t_1)$  é positivo ou negativo. Mostre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2} \left( x - \frac{1}{x} - 2 \ln x \right)$$

onde  $x = e^{\rho t_1/m}$ . Então determine que x > 1 e a função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

é crescente para x > 1. Use esse resultado para decidir se  $y(2t_1)$  é positiva ou negativa. O que você pode concluir? A subida ou a descida é mais rápida?

## 9.4

## Crescimento e Decaimento Exponencial

Um dos modelos para o crescimento populacional que consideramos na Seção 9.1 baseava-se na premissa de que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Essa é uma premissa razoável? Suponha uma população (de bactérias, por exemplo) com tamanho P=1.000 que esteja crescendo a uma taxa de P'=300 bactérias por hora. Agora tomemos outras 1.000 bactérias do mesmo tipo e as coloquemos com a primeira

população. Cada metade da nova população estava crescendo a uma taxa de 300 bactérias por hora. Esperaríamos que a população total de 2.000 aumentasse a uma taxa de 600 bactérias por hora inicialmente (desde que houvesse espaço e nutrientes suficientes). Assim, se dobrarmos o tamanho, dobraremos a taxa de crescimento. Em geral, parece razoável que a taxa de crescimento deva ser proporcional ao tamanho.

A mesma premissa também se aplica em outras situações. Na física nuclear, a massa de uma substância radioativa decai a uma taxa proporcional à massa. Na química, a taxa de uma reação de primeira ordem unimolecular é proporcional à concentração da substância. Em finanças, o valor de uma conta de poupança com juros compostos continuamente aumenta a uma taxa proporcional àquele valor.

Em geral, se y(t) é o valor de uma quantidade y a um tempo t e se a taxa de mudança de y em relação a t é proporcional a seu tamanho y(t) em um tempo qualquer, então

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada lei do crescimento natural (se k > 0) ou lei do decaimento natural (se k < 0). Uma vez que essa é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelos métodos da Seção 9.3:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \, dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

onde  $A = \pm e^C$  ou 0) é uma constante arbitrária. Para vermos o significado da constante A, observamos que

$$y(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Portanto A é o valor inicial da função.

Como a Equação 1 ocorre muito frequentemente na natureza, resumimos o que acabamos de provar para uso futuro.

#### [2] A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = y_0$$

 $y(t) = y_0 e^{kt}$ 

## Crescimento Populacional

é

Qual o significado da constante de proporcionalidade k? No contexto de crescimento populacional, podemos escrever

$$\frac{dP}{dt} = kP$$
 ou  $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$ 

A quantidade

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$$

é a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população; é denominada **taxa de crescimento relativo**. De acordo com (3), em vez de dizermos "a taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da população", poderíamos dizer "a taxa de crescimento relativo é constante". Então (2) diz que uma população com uma taxa de crescimento relativo constante deve crescer exponencialmente. Note que a taxa de crescimento relativo k aparece como o coeficiente de t na função exponencial  $y_0e^{kt}$ . Por exemplo, se

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

e t é medido em anos, então a taxa de crescimento relativo é k=0,02 e a população cresce a uma taxa de 2% ao ano. Se a população no tempo 0 for  $P_0$ , então a expressão para a população é

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

Presumindo que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho da população, use os dados da Tabela 1 para modelar a população do mundo no século XX. Qual é a taxa de crescimento relativo? Como o modelo se ajusta aos dados?

SOLUÇÃO Medimos o tempo t em anos e fazemos t=0 no ano 1900. Medimos a população P(t) em milhões de pessoas. Então P(0)=1.650. Estamos pressupondo que a taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da população; assim, o problema de valor inicial é

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 1.650$$

De (2) sabemos que a solução é

$$P(t) = 1.650e^{kt}$$

Uma maneira de estimar a taxa de crescimento relativo k é usar o fato de que a população em 1910 era de 1.750 milhões. Portanto

$$P(10) = 1.650e^{k(10)} = 1.750$$

Resolvemos essa equação para k:

$$e^{10k} = \frac{1.750}{1.650}$$
$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{1.750}{1.650} \approx 0,005884$$

#### TABELA 1

Ano.	População (milhões)										
1900 1910 1920 - 1930	1.650 1.750 1.860 2.070										
1940 : 1950 : 1960 : 1970 :	2.300 2.560 3.040 3.710 4.450										
1990 2000	5.280 5.080										

TABELA 2

<i></i>		
2.70	r/odelo	Popula (TI
.900	: 450	8.650
1910	1.750	1.750
:920	355	1.850
1930	1,963	2.070
1940	2.088	2.300
1950	2.214	2.580
1960	2,349	3,040
1970	2.491	3.716
1780	2,692	4,450
1990	2,302	5128Ú
<b>\$300</b>	2,972	5.030

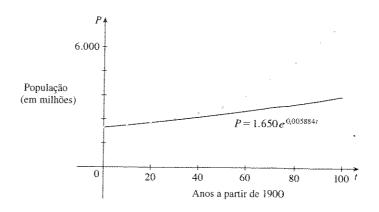
FIGURA 1 Um modelo possível para o

crescimento da população mundial

Então a taxa de crescimento relativo é cerca de 0,6% ao ano e o modelo torna-se

$$P(t) = 1.650e^{0.005884t}$$

A Tabela 2 e a Figura 1 nos permitem comparar as previsões desse modelo com os dados reais. Você pode ver que as previsões tornam-se imprecisas depois de cerca de 30 anos e estão subestimadas por um fator de quase 2 em 2000.



Outra possibilidade para estimar k seria usar a população dada para o ano de 1950, por exemplo, em vez de 1910. Então

$$P(50) = 1650e^{50k} = 2560$$
$$k = \frac{1}{50} \ln \frac{2560}{1650} \approx 0,0087846$$

A estimativa para a taxa de crescimento relativo é agora 0,88% ao ano, e o modelo é

$$P(t) = 1.650e^{0.0087846t}$$

As previsões com esse segundo modelo são mostradas na Tabela 3 e na Figura 2. Esse modelo exponencial é mais preciso ao longo de um período maior.

Na Seção 1.5, do Volume I, modelamos os mesmos dados com uma função exponencial, mas lá usamos o método dos mínimos quadrados.

TABELA 3

TABELA 3										
Ano	Modelo	População								
1900 1910 1920 1930	1.650 1.802 1.967 2.148	1,650 1,750 1,860 2,070								
1940 1950 1960 1970 1980	2.746 2.345 2.560 2.795 3.052 3.332 3.638	2.070 2.300 2.560 3.040 3.710 4.450 5.280								
2000	3.972	6.080								

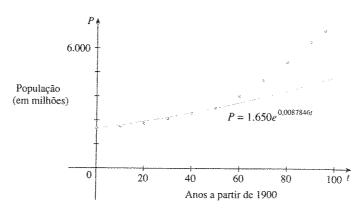


FIGURA 2 Outro modelo para o crescimento da população mundial

EXEMPLO Z — Use os dados da Tabela 1 para modelar a população do mundo na segunda metade do século XX. Utilize o modelo para estimar a população em 1993 e para prever a população no ano 2010.

SOLUÇÃO Aqui temos t=0 em 1950. Então o problema de valor inicial é

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 2.560$$

e a solução é

$$P(t) = 2.560e^{kt}$$

Vamos estimar k usando a população em 1960:

$$P(10) = 2.560e^{10k} = 3.040$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

A taxa de crescimento relativo é cerca de 1,7% ao ano e o modelo é

$$P(t) = 2.560e^{0.017185t}$$

Estimamos que a população mundial em 1993 era

$$P(43) = 2.560e^{0.017185(43)} \approx 5.360 \text{ milhões}$$

O modelo prediz que a população em 2010 será

$$P(60) = 2.560e^{0.017185(60)} \approx 7.179 \text{ milhões}$$

O gráfico na Figura 3 mostra que o modelo é bem preciso; assim, para 1993, a estimativa é bem confiável. Mas a previsão para 2010 é mais arriscada.

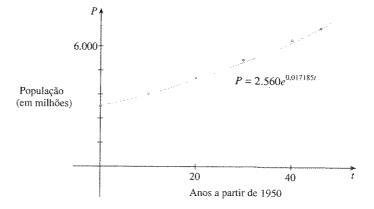


FIGURA 3

Um modelo para o crescimento populacional na segunda metade do século XX

### Decaimento Radioativo

As substâncias radioativas decaem pela emissão espontânea de radiação. Se m(t) é a massa remanescente da massa inicial  $m_0$  da substância depois de um tempo t, então a taxa de decaimento relativo

1

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

foi determinada experimentalmente como constante. (Como dm/dt é negativo, a taxa de decaimento é positiva.) Segue-se que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

onde k é uma constante negativa. Em outras palavras, as substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à massa remanescente. Isso significa que podemos usar (2) para mostrar que a massa decai exponencialmente:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Os físicos expressam a taxa de decaimento em termos de **meia-vida**, o tempo necessário para metade de qualquer quantidade decair.

EXEMPLO 3 C A meia-vida do rádio-226 (226 Ra) é de 1.590 anos.

- (a) Uma amostra de rádio-226 tem uma massa de 100 mg. Encontre uma fórmula para a massa de  $^{226}_{88}$ Ra que permanece após t anos.
- (b) Calcule a massa depois de 1.000 anos, com precisão de 1 miligrama.
- (c) Quando a massa será reduzida a 30 mg?

#### SOLUÇÃO

(a) Seja m(t) a massa de rádio-226 (em miligramas) que permanece após t anos. Então dm/dt = km e y(0) = 100; logo, (2) fornece

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinar o valor de k, usamos o fato de que  $y(1.590) = \frac{1}{2}(100)$ . Então

$$100e^{1.590k} = 50$$
 assim  $e^{1.590k} = \frac{1}{2}$ 

e

$$1.590k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$
$$k = -\frac{\ln 2}{1.590}$$

Portanto

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2/1590)t}$$

Poderíamos usar  $e^{\ln 2} = 2$  para escrever a expressão m(t) em uma forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1.590}$$

(b) A massa depois de 1.000 anos é

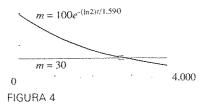
$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2/1590)1000} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Queremos encontrar um valor de t tal que m(t) = 30, isto é,

$$100e^{-(\ln 2/1.590)r} = 30$$
 ou  $e^{-(\ln 2/1.590)r} = 0.3$ 

Resolvemos essa equação para t tomando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$-\frac{\ln 2}{1.590}t = \ln 0.3$$



Então

$$t = -1.590 \frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2.762 \text{ anos}$$

Para verificar nosso trabalho no Exemplo 3, usamos um dispositivo gráfico para desenhar o gráfico de m(t) na Figura 4 junto com a reta horizontal m=30. Essas curvas se interceptam quando  $t \approx 2.800$  e isso está de acordo com a resposta na parte (c).

### Lei do Resfriamento de Newton

A Lei do Resfriamento de Newton para estabelece que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua redondeza, dado que essa diferença não seja muito grande. (Essa lei também se aplica ao aquecimento.) Se denotarmos T(t) como temperatura do objeto no tempo t e  $T_s$  como a temperatura em sua redondeza, então podemos formular a Lei de Newton para resfriamento como uma equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

onde k é uma constante. Podemos resolver essa equação como uma equação diferencial separável usando o método da Seção 9.3, mas um método mais fácil seria fazer uma troca de variável  $y(t) = T(t) - T_s$ . Como  $T_s$  é constante, temos y'(t) = T'(t)e assim a equação torna-se

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Podemos usar (2) para encontrar uma expressão para y, da qual acharemos T.

EXEMPLO 4 
Uma garrafa de soda limonada em temperatura ambiente (72 °F) é colocada em um refrigerador onde a temperatura é de 44 °F. Depois de meia hora a soda está resfriada a uma temperatura de 61 °F.

- (a) Qual é a temperatura da soda depois de mais 30 minutos na geladeira?
- (b) Quanto tempo demoraria para a soda atingir 50 °F?

#### SOLUÇÃO

(a) Seja T(t) a temperatura da soda após t minutos. A temperatura da redondeza é  $T_s = 44$  °F, logo, a Lei de Newton para Resfriamento estabelece que

$$\frac{dy}{dt} = k(T - 44)$$

Se fizermos y = T - 44, então y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28, portanto,  $y \notin a$  solução do problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

e por (2), temos

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Nos foi dado que T(30) = 61, assim sendo, y(30) = 61 - 44 = 17 e

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \frac{17}{28}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados, obtemos

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Portanto,

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Logo, após outra meia hora a soda terá se resfriado a uma temperatura aproximada de 54 °F. (b) Temos T(t) = 50, quando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \frac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92,6$$

A soda se resfriará a 50 °F depois de 1 hora e 33 minutos. Observe que no Exemplo 4, temos

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

o que já era esperado. O gráfico da função temperatura é mostrado na Figura 5.

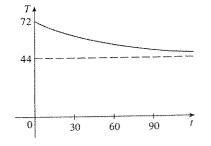


FIGURA 5

## Juros Compostos Continuamente

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Se \$ 1.000 são investidos com juros de 6%, compostos anualmente, depois de um ano o investimento vale \$ 1.000(1,06) = \$ 1.060, depois de dois anos vale \$ [1.000(1,06)]1,06 = \$ 1.123,60 e depois de t anos vale \$ 1.000  $(1,06)^t$ . Em geral, se uma quantidade  $A_0$  é investida com uma taxa de juros r (r = 0,06 neste exemplo), então depois de t anos vale  $A_0(1 + r)^t$ . Geralmente, contudo, os juros são compostos mais frequentemente, digamos, n vezes ao ano. Então, em cada período de composição, a taxa de juros é r/n e existem nt períodos de composição em t anos. Assim, o valor do investimento é

$$A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por exemplo, depois de três anos com juros de 6% um investimento de \$ 1.000 valerá

$$1.000(1,06)^3 = 1.191,02$$
 com composição anual

$$1.000(1,03)^6 = 1.194,05$$
 com composição semestral

$$1.000(1,015)^{12} = 1.195,62$$
 com composição trimestral

$$1.000(1,005)^{36} = 1.196,68$$
 com composição mensal

$$1.000 \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = 1.197,20$$
 com composição diária

Você pode ver que os juros pagos sobem com o aumento do número de períodos de composição (n). Se fizermos  $n \to \infty$ , então estaremos compondo os juros continuamente, e o valor do investimento será

$$A(t) = \lim_{n \to \infty} A_0 \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = \lim_{n \to \infty} A_0 \left[ \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[ \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[ \lim_{m \to \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{rt} \quad \text{(onde } m = n/r)$$

Mas o limite nessa expressão é igual ao número e (veja a Equação 3.8.6 no Volume I). Desse modo, com composição contínua de juros a uma taxa r, a quantidade depois de t anos é

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Se diferenciarmos essa equação, teremos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

que diz que, com a composição contínua de juros, a taxa de aumento de um investimento é proporcional a seu tamanho.

Retornando ao exemplo de \$ 1.000 investidos por três anos com juros de 6%, vemos que, com a composição contínua de juros, o valor do investimento será

$$A(3) = \$1.000e^{(0.06)3}$$
$$= \$1.000e^{0.18} = \$1.197,22$$

300

Note quão próxima essa quantidade está daquela que calculamos para a composição diária, \$ 1.197,20. Mas a quantidade é mais facilmente calculada se usarmos a composição contínua.

## Exercícios

- 1. Uma população de protozoários se desenvolve com uma taxa de crescimento relativo constante de 0,7944 por membro por dia. No dia zero, a população consiste em dois membros. Calcule o tamanho da população depois de seis dias.
- 2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria Escherichia coli. Uma célula dessa bactéria em um meio nutriente se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial da cultura é de 60 células.
  - (a) Encontre a taxa de crescimento relativo.
  - (b) Ache uma expressão para o número de células depois de t horas.
  - (c) Calcule o número de células depois de oito horas.
  - (d) Estabeleça a taxa de crescimento depois de oito horas.
  - (e) Quando a população alcançará 20.000 células?
- 3. Uma cultura de bactérias começa com 500 bactérias e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de três horas existem 8.000 bactérias.
  - (a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
  - (b) Calcule o número de bactérias depois de quatro horas.
  - (c) Estipule a taxa de crescimento depois de quatro horas.
  - (d) Ouando essa população alcançará 30.000?
- 4. Uma cultura de bactérias cresce com uma taxa de crescimento relativo constante. A contagem era 600 depois de duas horas e 75.000 depois de oito horas.
  - (a) Qual a população inicial da cultura?
  - (b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.
  - (c) Ache o número de célula após cinco horas.
  - (d) Encontre a taxa de crescimento após cinco horas.
  - (e) Quando a população será de 200.000?
- 5. A tabela fornece estimativas da população mundial, em milhões, por dois séculos:

Ano	População	Ano	População
1750	790	1900	1.650
1800	980	1950	2.560
1850	1.260	2000	6.080

- (a) Utilize o modelo exponencial e os números da população em 1750 e 1800 para prever a população mundial em 1900 e 1950. Compare com os dados reais.
- (b) Use o modelo exponencial e os dados populacionais para 1850 e 1900 para prever a população mundial em 1950. Compare com a população real.
- (c) Empregue o modelo exponencial e os dados populacionais para 1900 e 1950 para prever a população mundial em 2000. Compare com a população real e tente explicar a discrepância.

6. A tabela fornece a população dos Estados Unidos, em milhões, para os anos 1900-2000.

Ano	População	Ano	População
1900	76	1960	i79
1910	92	(970)	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	275
1950	150		

- (a) Use o modelo exponencial e os dados do censo para 1900 e 1910 para prever a população em 2000. Compare com os dados reais e tente explicar a discrepância.
- (b) Utilize o modelo exponencial e os dados do censo para 1980 e 1990 para prever a população em 2000. Compare com a população real. Então use esse modelo para prever a população nos anos 2010 e 2020.
- (c) Desenhe um gráfico mostrando ambas as funções exponenciais das partes (a) e (b) juntas com o gráfico da população real. Esses modelos são razoáveis?
- 7. Experimentos mostram que, se a reação química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

for realizada a 45 °C, a taxa de reação do pentóxido de nitrogênio é proporcional a sua concentração, como a seguir:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Veja o Exemplo 4 na Seção 3.3 no Volume I.)

- (a) Encontre uma expressão para a concentração de [N<sub>2</sub>O<sub>5</sub>] depois de t segundos se a concentração inicial for C.
- (b) Quanto tempo de reação levará para reduzir a concentração do N<sub>2</sub>O<sub>5</sub> para 90% de seu valor original?
- 8. O bismuto-210 tem uma meia-vida de cinco dias.
  - (a) Se uma amostra tem massa de 800 mg, encontre uma fórmula para a massa que restará depois de t dias.
  - (b) Calcule a massa depois de 30 dias.
  - (c) Quando a massa será reduzida para 1 mg?
  - (d) Esboce o gráfico da função massa.
- 9. A meia-vida do Césio-137 é de 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de 100 mg.
  - (a) Ache a massa que restará após t anos.
  - (b) Quanta massa a amostra terá após 100 anos?
  - (c) Depois de quanto tempo teremos apenas 1 mg da amostra?
- 10. Depois de três dias uma amostra de radônio-222 decaiu para 58% de sua quantidade original.
  - (a) Qual a meia-vida do radônio-222?
  - (b) Ouanto tempo levará para a amostra decair para 10% de sua quantidade original?

**12.** Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da curva a cada ponto *P* é duas vezes a coordenada *y* de *P*. Qual é a equação da curva?

nos dias de hoje. Estime a idade do pedaço de tecido.

cerca de 74% de 14C radioativo em relação às plantas terrestres

- 13. Um peru assado é retirado do forno quando sua temperatura alcança 185 °F e é colocado em uma mesa onde a temperatura é de 75 °F.
  - (a) Se a temperatura do peru for de 150 °F depois de meia hora, qual será a temperatura dele após 45 minutos?
  - (b) Quando terá o peru se resfriado a uma temperatura de 100 °F?
- 14. Um termômetro é levado de um cômodo no qual a temperatura é de 20 °C para o lado de fora onde a temperatura é 5 °C. Depois de um minuto a leitura do termômetro é de 12 °C.
  - (a) Qual será a leitura do termômetro depois de mais um minuto?
  - (b) Ouando a leitura do termômetro será de 6 °C?
- 15. Quando uma bebida gelada é retirada de um refrigerador, sua temperatura é de 5 °C. Depois de 25 minutos em um ambiente a 20 °C, sua temperatura aumenta para 10 °C.
  - (a) Qual é a temperatura da bebida após 50 minutos?
  - (b) Quando sua temperatura será de 15 °C?
- 16. Uma xícara de café fresco tem uma temperatura de 95 °C em um ambiente de 20 °C. Quando sua temperatura for de 70 °C sua taxa de resfriamento será de 1 °C por minuto. Quando isso ocorre?
- 17. A taxa de mudança da pressão atmosférica P em relação à altitude h é proporcional a P, desde que a temperatura seja constante. A 15 °C a pressão é 101,3 kPa ao nível do mar e 87,14 kPa a h = 1.000 m.
  - (a) Qual é a pressão a uma altitude de 3.000 m?
  - (b) Qual é a pressão no topo do monte McKinley, a uma altitude de 6.187 m?
- 18. (a) Se \$ 500 são emprestados a 14% de juros, calcule as quantidades devidas no final de dois anos se os juros forem compostos
  - (i) anualmente, (ii) trimestralmente, (iii) mensalmente,
  - (iv) diariamente, (v) por hora e (vi) continuamente.

- (b) Suponha que \$ 500 sejam emprestados e os juros sejam compostos continuamente. Se A(t) for a quantidade devida depois de t anos, onde  $0 \le t \le 2$ , plote A(t) para cada uma das taxas de juros 14%, 10% e 6% na mesma tela.
- 19. (a) Se \$ 3.000 são investidos a uma taxa de juros de 5%, calcule o valor do investimento no final de cinco anos se os juros forem compostos (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente e (vi) continuamente.
  - (b) Se A(t) for a quantidade de investimento no tempo t para o caso de composição contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeita por A(t).
- 20. (a) Quanto tempo levará um investimento para dobrar seu valor se a taxa de juros for 6% composta continuamente?
  - (b) Qual é taxa equivalente de juros anual?
- 21. Considere uma população P = P(t) com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e m são constantes posítivas. Assuma que  $\alpha > \beta$ . Então a taxa de variação da população em um tempo t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde} \quad k = \alpha - \beta$$

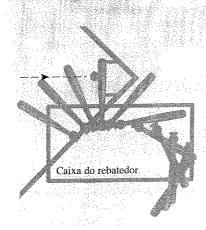
- (a) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial P(0) = P<sub>0</sub>.
- (b) Qual condição sobre *m* levará a uma expansão exponencial da população?
- (c) Qual condição sobre m levará a uma população constante? E ao declínio da população?
- (d) Em 1847, a população da Irlanda era cerca de 8 milhões, e a diferença entre as taxas relativas de natalidade e mortalidade era 1,6% da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210.000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou diminuindo naquela época?
- 22 Seja c um número positivo. A equação diferencial, do tipo

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

onde k é uma constante positiva, é chamada equação do juízo final porque o expoente na expressão  $ky^{1+c}$  é maior que aquele para o crescimento natural (isto é, ky).

- (a) Determine a solução que satisfaça a condição inicial  $y(0) = y_0$ .
- (b) Mostre que existe um tempo finito t = T (juízo final), de forma que  $\lim_{t\to T^-} y(t) = \infty$ .
- (c) Uma raça especialmente prolífica de coelhos tem o termo de crescimento  $ky^{1,01}$ . Se dois desses coelhos cruzam inicialmente e a coelha tem 16 coelhos depois de três meses, quando será o juízo final?

### Projeto Aplicado



Uma vista superior da posição de um taco de beisebol, mostrada a cada qüinquagésimo de segundo durante um movimento típico (adaptado de (*The Physics of Baseball*).

### Cálculo e Beisebol

Neste projeto exploraremos três das muitas aplicações do cálculo ao beisebol. As interações físicas do jogo, especialmente a colisão da bola com o taco, são complexas e seus modelos são discutidos em detalhes no livro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3. ed. (Nova York: HarperPerennial, 2002).

 Pode surpreendê-lo saber que a colisão entre bola de beisebol e o taco dura apenas cerca de um milésimo de segundo. Aqui estabeleceremos a força média no taco durante essa colisão calculando primeiro a mudança no momento da bola.

O momento p de um objeto é o produto de sua massa m e sua velocidade v, isto é, p = mv. Suponha que um objeto se movendo ao longo de uma linha reta seja influenciado por uma força F = F(t), que é uma função contínua do tempo.

(a) Mostre que a mudança no momento no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  é igual à integral de F de  $t_0$  a  $t_1$ ; isto é, mostre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt$$

Essa integral é chamada impulso da força no intervalo de tempo.

- (b) Um lançador joga uma bola rápida a 90 mi/h para o rebatedor, que a rebate diretamente de volta ao lançador. A bola está em contato com o taco por 0,001 s e deixa o taco com a velocidade de 110 mi/h. Uma bola de beisebol pesa 5 onças e, em unidades imperiais, sua massa é medida em slugs: m = w/g onde g = 32 pés/s².
  - (i) Calcule a mudança no momento da bola.
  - (ii) Determine a força média no taco.
- Neste problema calculamos o trabalho necessário para um lançador arremessar uma bola rápida a 90 mi/h primeiro considerando a energia cinética.

A energia cinética K de um objeto de massa m e velocidade v é dada por  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Suponha que um objeto de massa m se movendo em linha reta seja influenciado por uma força F = F(s) que depende de sua posição s. De acordo com a Segunda Lei de Newton

$$F(s) = ma = m \frac{dv}{dt}$$

onde a e v denotam a aceleração e a velocidade do objeto.

(a) Mostre que o trabalho realizado para mover o objeto de uma posição  $s_0$  para uma posição  $s_1$  é igual à variação na energia cinética do objeto; isto é, mostre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s) \ ds = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

onde  $v_0 = v(s_0)$  e  $v_1 = v(s_1)$  são as velocidades do objeto nas posições  $s_0$  e  $s_1$ . Dica: Pela Regra da Cadeia,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

- (b) Quantas libras-pés de trabalho são necessárias para jogar uma bola de beisebol a 90 mi/h?
- 3. (a) Um outfielder (jogador que ocupa o campo externo) apanha uma bola de beisebol a 280 pés do home plate e a joga diretamente para o pegador com uma velocidade inicial de 100 pés/s. Presuma que a velocidade v(t) da bola depois de t segundos satisfaça a equação diferencial dv/dt = -v/10 por causa da resistência do ar. Quanto tempo leva para a bola atingir o home plate? (Ignore qualquer movimento vertical da bola.)
  - (b) O diretor do time se pergunta se a bola alcançaria o home plate mais rápido se ela fosse revezada por um infielder (jogador da parte central do campo). O shortstop (jogador que fica entre a segunda e a terceira bases) pode se posicionar diretamente entre o outfielder e

o home plate, pegar a bola jogada pelo outfielder, girar e jogá-la para o pegador com uma velocidade inicial de 105 pés/s. O diretor cronometra o tempo de revezamento do shortstop (pegar, girar, jogar) em metade de um segundo. A que distância do home plate deve se posicionar o shortstop para minimizar o tempo total para a bola atingir a base? O diretor deve encorajar uma jogada direta ou uma jogada revezada? O que aconteceria se o shortstop pudesse jogar a bola a 115 pés/s?

(c) Para qual velocidade de arremesso do shortstop a jogada revezada leva o mesmo tempo que a direta?

#### 9.5A Equação Logística

Nesta seção discutiremos em detalhe um modelo para o crescimento populacional, o modelo logístico, que é mais sofisticado que o de crescimento exponencial. Fazendo isso, usamos todas as ferramentas à nossa disposição: campos de direções e método de Euler da Seção 9.2 e a solução explícita das equações diferenciais separáveis da Seção 9.3. Nos exercícios, investigaremos outros modelos possíveis para o crescimento populacional, alguns dos quais levam em conta a colheita e o crescimento sazonal.

## O Modelo Logístico

Como discutimos na Seção 9.1, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas eventualmente se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se P(t) for o tamanho da população no tempo t, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP$$
 se *P* for pequeno

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho. Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir sobre o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua capacidade de suporte K, a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas premissas é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg)$$

Multiplicando por P, obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a equação diferencial logística:

$$\frac{dP}{dt} = kP\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg)$$

Note na Equação 1 que, se P for pequeno comparado com K, então P/K é próximo de 0, e dessa forma  $dP/dt \approx kP$ . Contudo, se  $P \rightarrow K$  (a população aproxima sua capacidade de suporte), então  $P/K \to 1$ , assim  $dP/dt \to 0$ . Podemos deduzir informações sobre quando as soluções aumentam ou diminuem diretamente da Equação 1. Se a população P estiver entre 0 e K, então o lado direito da equação é positivo, desse modo dP/dt > 0 e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte (P > K), daí 1 - P/K é negativo, portanto dP/dt < 0 e a população diminui.

## Campos de Direções

Vamos começar nossa análise mais detalhada da equação diferencial logística olhando para um campo de direções.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Desenhe um campo de direções para a equação logística com k=0.08 e capacidade de suporte K=1.000. O que você pode deduzir sobre as soluções?

SOLUÇÃO Nesse caso a equação diferencial logística é

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \left( 1 - \frac{P}{1.000} \right)$$

Um campo de direções para essa equação é mostrado na Figura 1. Mostramos apenas o primeiro quadrante porque as populações negativas não têm significado e estamos interessados apenas no que acontece depois de t=0.

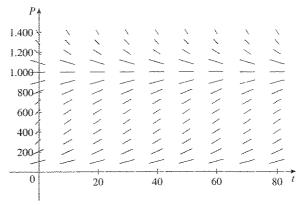


FIGURA 1 Campo de direções para a equação logística no Exemplo I

A equação logística é autônoma (dP/dt depende apenas de P, não de t); assim, as inclinações são as mesmas ao longo de qualquer reta horizontal. Como esperado, as inclinações são positivas para 0 < P < 1.000 e negativas para P > 1.000.

As inclinações são pequenas quando P está próximo de 0 ou 1.000 (a capacidade de suporte). Observe que as soluções se distanciam da solução de equilíbrio P = 0 e se aproximam da solução de equilíbrio P = 1.000.

Na Figura 2 usamos o campo de direções para esboçar as curvas-solução com populações iniciais P(0)=100, P(0)=400 e P(0)=1.300. Note que as curvas-solução abaixo de P=1.000 estão aumentando, e aquelas que começam acima de P=1.000 estão diminuindo. As inclinações são maiores quando  $P\approx500$ , portanto as curvas-solução que começam abaixo de P=1000 têm pontos de inflexão quando  $P\approx500$ . De fato, podemos provar que todas as curvas-solução que começam abaixo de P=500 têm um ponto de inflexão quando P é exatamente P=10000 (veja o Exercício 9).

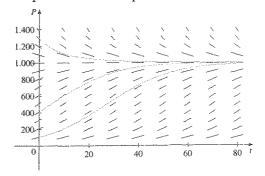


FIGURA 2 Curvas-solução para a equação logística no Exemplo 1

A seguir usaremos o método de Euler para obter estimativas numéricas para as soluções da equação diferencial logística em tempos específicos.

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Use o método de Euler com passos 20, 10, 5, 1 e 0,1 para estimar os tamanhos da população P(40) e P(80), onde P é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \left( 1 - \frac{P}{1.000} \right) \qquad P(0) = 100$$

SOLUÇÃO Com o passo de tamanho  $h=20, t_0=0, P_0=100$  e

$$F(t, P) = 0.08P \left(1 - \frac{P}{1.000}\right)$$

obtemos, utilizando a notação da Seção 9.2,

$$P_1 = 100 + 20F(0, 100) = 244$$

$$P_2 = 244 + 20F(20, 244) \approx 539,14$$

$$P_3 = 539,14 + 20F(40, 539,14) \approx 936,69$$

$$P_4 = 936,69 + 20F(60, 936,69) \approx 1.031,57$$

Então, nossas estimativas para os tamanhos da população nos tempos t = 40 e t = 80 são

$$P(40) \approx 539$$
  $P(80) \approx 1.032$ 

Para os passos de tamanhos menores, precisamos programar uma calculadora ou um computador. A tabela fornece os resultados.

Passo	Estimativa de Euler para P(40)	Estimativa de Euler para $P(80)$
20	539	1.032
10	647	997
5	695	991
1	725	986
0,1	73 ***	985

A Figura 3 mostra um gráfico das aproximações de Euler com passos h=10 e h=1. Vemos que a aproximação de Euler com h=1 se parece com a curva-solução mais baixa que desenhamos usando um campo de direções na Figura 2.

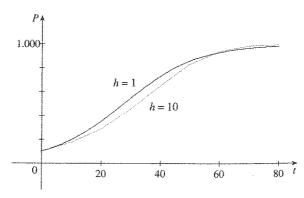


FIGURA 3

Aproximações de Euler para a curva-solução no Exemplo 2

### A Solução Analítica

A equação logística (1) é separável e podemos resolvê-la explicitamente usando o método da Seção 9.3. Como

$$\frac{dP}{dt} = kP\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg)$$

temos

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int k \, dt$$

Para avaliar a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1-P/K)} = \frac{K}{P(K-P)}$$

Usando frações parciais (veja a Seção 7.4, no Volume I) ternos,

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$$

Isso nos permite reescrever a Equação 2:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int k \, dt$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{K - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{K - P}{P}\right| = e^{-kt - C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt}$$

onde  $A = \pm e^{-C}$ . Resolvendo a Equação 3 para P, obtemos

$$\frac{K}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

assim

3

$$P = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de A colocando t=0 na Equação 3. Se t=0, então  $P=P_0$  (a população inicial); portanto,

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Então, a solução para a equação logística é

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

Usando a expressão para P(t) na Equação 4, vemos que

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=K$$

que é esperado.

EXEMPLO 3 

Escreva a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \left( 1 - \frac{P}{1.000} \right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar os tamanhos da população P(40) e P(80). Quando a população alcançará 900?

SOLUÇÃO A equação diferencial é uma equação logística com k=0.08, capacidade de suporte K=1.000 e população inicial  $P_0=100$ . Assim, a Equação 4 fornece a população no tempo t como

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + Ae^{-0.08t}}$$
 onde  $A = \frac{1.000 - 100}{100} = 9$ 

Então

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Assim, os tamanhos da população quando t = 40 e 80 são

$$P(40) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6$$
  $P(80) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$ 

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1.000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Resolvendo essa equação para t, temos

$$1 + 9e^{-0.08t} = \frac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \frac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \frac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

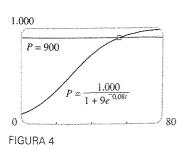
Dessa forma, a população atinge 900 quando t é aproximadamente 55. Como uma verificação de nosso trabalho, plotamos a curva-população na Figura 4 e observamos onde ela intercepta a reta P = 900. O cursor indica que  $t \approx 55$ .

☐ Compare esses valores com as estimativas de Euler do Exemplo 2:

$$P(40) \approx 731$$

$$P(80) \approx 985$$

☐ Compare a curva solução na Figura 4 com a curva solução mais baixa que desenhamos no campo de direções na Figura 2.



## Comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos

Nos anos 1930, o biólogo G. F. Gause conduziu um experimento com o protozoário Paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários. Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

			E	r											Ī		
t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	90	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EXEMPLO 4 

Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause.

Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste.

SOLUÇÃO Dadas a taxa de crescimento relativo k=0.7944 e a população inicial  $P_0=2$ , o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause usou o mesmo valor de k para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque  $P_0 = 2$  é pequeno comparado com a capacidade de suporte (K = 64). A equação

$$\left. \frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = k \left( 1 - \frac{2}{64} \right) \approx k$$

mostra que o valor de k para o modelo logístico é muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

Então a solução da equação logística na Equação 4 fornece

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

onde

$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Assim

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Usamos essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela.

t (dias)	0	passy	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	,						A-CONTRACTOR & CONTRACTOR A CON				

Notamos na tabela e no gráfico da Figura 5 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para  $t \ge 5$ , contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

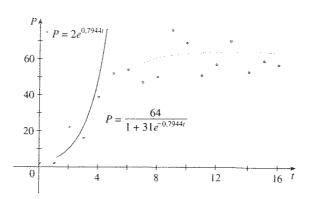


FIGURA 5
Os modelos exponencial e logístico para os dados do Paramécio

## Outros Modelos para o Crescimento Populacional

A Lei do Crescimento Natural e a equação diferencial logística não são as únicas equações propostas para modelar o crescimento populacional. No Exercício 14 veremos a função crescimento de Gompertz e nos Exercícios 15 e 16 investigaremos os modelos de crescimento sazonal.

Dois dos outros modelos são modificações do modelo logístico. A equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg) - c$$

tem sido usada para modelar as populações que estão sujeitas à "colheita" de uma maneira ou de outra. (Pense em uma população de peixes sendo capturada a uma taxa constante.) Essa equação é explorada nos Exercícios 11 e 12.

Para algumas espécies existe um nível mínimo populacional m abaixo do qual as espécies tendem a se extinguir. (Os adultos podem não encontrar pares adequados.) Essas populações têm sido modeladas pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg)\bigg(1 - \frac{m}{P}\bigg)$$

onde o fator extra, 1 - m/P, leva em conta as conseqüências de uma população esparsa (veja o Exercício 13).

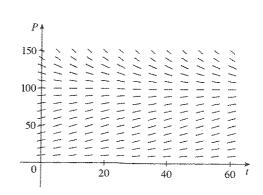
# 9.5 Exercícios

Suponha que uma população se desenvolva de acordo com a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

onde t é medido em semanas.

- (a) Qual é a capacidade de suporte? Qual é o valor de k?
- (b) Um campo de direções para essa equação é mostrado à direita. Onde as inclinações estão próximas de 0? Onde elas são maiores? Quais soluções são crescentes? Quais soluções são decrescentes?
- (c) Use o campo de direções para esboçar as soluções para as populações iniciais de 20, 40, 60, 80, 120 e 140. O que essas



soluções têm em comum? Como elas diferem? Quais soluções têm pontos de inflexão? A que nível populacional elas ocorrem?

- (d) Quais são as soluções de equilíbrio? Como as outras soluções estão relacionadas a essas soluções?
- Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com capacidade de suporte 6.000 e k = 0,0015 por ano.
  - (a) Escreva a equação diferencial logística para esses dados.
  - (b) Desenhe um campo de direções (ou à mão ou com um sistema algébrico computacional). O que ele lhe diz sobre as curvas-solução?
  - (c) Use o campo de direções para esboçar as curvas-solução para as populações iniciais de 1.000, 2.000, 4.000 e 8.000. O que você pode dizer sobre a concavidade dessas curvas? Qual o significado dos pontos de inflexão?
  - (d) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler com passo h = 1 para estimar a população depois de 50 anos se a população inicial for 1.000.
  - (e) Se a população inicial for 1.000, escreva uma fórmula para a população depois de *t* anos. Use-a para calcular a população depois de 50 anos e compare com sua estimativa na parte (d).
  - (f) Plote a solução da parte (e) e compare com a curvasolução que você esboçou na parte (c).
  - 3 O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky \left( 1 - \frac{y}{K} \right)$$

onde y(t) é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no tempo t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como  $K=8\times 10^7$  kg, e k=0.71 por ano.

- (a) Se  $y(0) = 2 \times 10^7$  kg, calcule a biomassa um ano depois.
- (b) Quanto tempo levará para a biomassa alcançar 4 × 10<sup>7</sup> kg?
- A tabela fornece o número de células de levedura em uma cultura nova de laboratório.

Tempo (horas)	Células de levedura	Tempo (horas)	Células de levedura
0	18	10	509
7.3	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

- (a) Plote os dados e use o gráfico para estimar a capacidade de suporte para a população de levedura.
- (b) Use os dados para estimar a taxa de crescimento inicial relativo.
- (c) Encontre um modelo exponencial e um modelo logístico para esses dados.
- (d) Compare os valores previstos com os valores observados, na tabela e nos gráficos. Compare como seus modelos se ajustam aos dados.

- (e) Utilize seu modelo logístico para estimar o número de células de levedura depois de sete horas.
- 5. A população mundial era cerca de 5,3 bilhões em 1990. A taxa de natalidade na década de 1990 variou entre 35 e 40 milhões por ano, e a taxa de mortalidade variou entre 15 e 20 milhões por ano. Vamos supor que a capacidade de suporte para a população mundial seja 100 bilhões.
  - (a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados. (Como a população inicial é pequena comparada à capacidade de suporte, você pode tomar k como uma estimativa da taxa de crescimento relativo inicial.)
  - (b) Utilize o modelo logístico para prever a população mundial em 2000 e compare a população real de 6,1 bilhões.
  - (c) Use o modelo logístico para prever a população mundial nos anos 2100 e 2500.
  - (d) Quais seriam as suas previsões se a capacidade de suporte fosse de 50 bilhões?
- 6. (a) Faça uma suposição para a capacidade de suporte da população dos Estados Unidos. Use-a, e também o fato de que a população era de 250 milhões em 1990, para formular um modelo logístico para a população norte-americana.
  - (b) Determine o valor de k em seu modelo usando o fato de que a população norte-americana em 2000 era de 275 milhões.
  - (c) Use seu modelo para prever a população dos Estados Unidos nos anos 2100 e 2200.
  - (d) Utilize seu modelo para prever o ano no qual a população ultrapassará 300 milhões.
- Um modelo para a propagação de um boato é que a taxa de propagação é proporcional ao produto da fração y da população que ouviu o boato e a fração que não ouviu o boato.
  - (a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y.
  - (b) Resolva a equação diferencial.
  - (c) Uma cidade pequena tem 1.000 habitantes. Às 8 horas 80 pessoas tinham ouvido o boato. Ao meio-dia metade da cidade tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?
- 8. Os biólogos colocaram em um lago 400 peixes e estimaram a capacidade de suporte (a população máxima de peixes daquela espécie no lago) como 10.000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.
  - (a) Presumindo que o tamanho da população de peixes satisfaça a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de *t* anos.
  - (b) Quanto tempo levará para a população aumentar para 5.000?
- $\blacksquare$  (a) Mostre que, se P satisfizer a equação logística (1), então

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{2P}{K}\right)$$

(b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade de sua capacidade de suporte.

- **10.** Para um valor fixo de K (digamos K = 10), a família de funções logísticas dada pela Equação 4 depende do valor inicial Po e da constante de proporcionalidade k. Plote vários membros dessa família. Como muda o gráfico quando Po varia? Como muda o gráfico quando k varia?
  - 11. Vamos modificar a equação logística do Exemplo 1 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \bigg( 1 - \frac{P}{1.000} \bigg) - 15$$

- (a) Suponha que P(t) represente uma população de peixes no tempo t, onde t é medido em semanas. Explíque o significado do termo -15.
- (b) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.
- (c) Quais são as soluções de equilíbrio?
- (d) Use o campo de direções para esboçar várias curvassolução. Descreva o que acontece à população de peixes para várias populações iniciais.
- (e) Resolva essa equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou com um sistema algébrico computacional. Use as populações iniciais de 200 e 300. Plote as soluções e compare com seus esboços na parte (d).
- 25 12. Considere a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \left( 1 - \frac{P}{1.000} \right) - c$$

como um modelo para uma população de peixes, onde t é medido em semanas e c é uma constante.

- (a) Use um CAS para desenhar campos de direções para diversos valores de c.
- (b) A partir dos campos de direções na parte (a), determine os valores de c para os quais há pelo menos uma solução de equilíbrio. Para quais valores de c a população de peixes sempre desaparece?
- (c) Use uma equação diferencial para provar o que você descobriu graficamente na parte (b).
- (d) Qual sua recomendação para o limite de pesca semanal para essa população de peixes?
- 3. Existe evidência considerável para apoiar a teoria de que, para algumas espécies, existe uma população mínima m de forma que as espécies se tornam extintas quando o tamanho da população cai abaixo de m. Essa condição pode ser incorporada à equação logística pela introdução do fator (1 - m/P). Então o modelo logístico modificado é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\bigg(1 - \frac{P}{K}\bigg)\bigg(1 - \frac{m}{P}\bigg)$$

- (a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se m < P < K e decrescente se 0 < P < m.
- (b) Para o caso onde k = 0.08, K = 1.000 e m = 200, desenhe um campo de direções e use-o para esboçar várias curvassolução. Descreva o que acontece à população para várias populações iniciais. Quais são as soluções de equilíbrio?

- (c) Resolva a equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou um sistema algébrico computacional. Use a população inicial  $P_0$ .
- (d) Use a solução na parte (c) para mostrar que se  $P_0 < m$ , então as espécies se tornarão extintas. [Dica: Mostre que o numerador em sua expressão para P(t) é 0 para alguns valores de t.]
- 14. Outro modelo para a função crescimento para uma população limitada é dado pela função de Gompertz, que é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln \left(\frac{K}{P}\right) P$$

onde c é uma constante e K é a capacidade de suporte.

- (a) Resolva essa equação diferencial.
- (b) Calcule  $\lim_{t\to\infty} P(t)$ .
- (c) Plote a função de crescimento de Gompertz para  $K = 1.000, P_0 = 100 \text{ e } c = 0.05, \text{ e compare-a com a}$ função logística no Exemplo 3. Quais são as similaridades? Quais são as diferenças?
- (d) Sabemos do Exercício 9 que a função logística cresce mais rapidamente quando P = K/2. Use a equação diferencial de Gompertz para mostrar que a função de Gompertz cresce mais rápido quando P = K/e.
- 15. Em um modelo de crescimento sazonal, uma função periódica de tempo é introduzida para considerar variações sazonais na taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.
  - (a) Encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

onde k,  $r \in \phi$  são constantes positivas.

- (b) Plotando a solução para vários valores de k,  $r \in \phi$ , explique como os valores de k, r e  $\phi$  afetam a solução. O que você pode dizer sobre  $\lim_{t\to\infty} P(t)$ ?
- 16. Suponha que alteremos a equação diferencial no Exercício 15 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

- (a) Resolva essa equação diferencial com a ajuda de uma tabela de integrais ou um CAS.
- (b) Plote a solução para vários valores de k,  $r \in \phi$ . Como os valores de k, r e  $\phi$  afetam a solução? O que você pode dizer sobre  $\lim_{t\to\infty} P(t)$  nesse caso?
- 17. Os gráficos das funções logísticas (Figuras 2 e 4) são respeitosamente similares ao gráfico da função tangente hiperbólica (Figura 3 na Seção 3.9). Explique a similaridade, mostrando que a função logística dada pela Equação 4 pode ser escrita como

$$P(t) = \frac{1}{2}K\left[1 + tgh\left(\frac{1}{2}k(t-c)\right)\right]$$

onde  $c = (\ln A)/k$ . Portanto, a função logística é apenas uma tangente hiperbólica translada.

## **9.6** Equações Lineares

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência, como veremos.

Um exemplo de uma equação linear é xy' + y = 2x porque, para  $x \ne 0$ , esta pode ser escrita na forma

$$\boxed{2} \qquad \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Note que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda podemos resolver a equação notando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação como

$$(xy)' = 2x$$

Se integrarmos ambos os lados dessa equação, obteremos

$$xy = x^2 + C$$
 ou  $y = x + \frac{C}{x}$ 

Se nos tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 2, teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x.

Decorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 1 por uma função adequada I(x) chamada fator integrante. Tentamos encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 1, quando multiplicado por I(x), torna-se a derivada do produto I(x)y:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

Se pudermos encontrar tal função I, a Equação 1 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Integrando ambos os lados teríamos

$$I(x)y = \int I(x)Q(x) dx + C$$

assim a solução seria

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)Q(x) \, dx + C \right]$$

53

Para encontrarmos esse I, expandimos a Equação 3 e cancelamos os termos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$
$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Essa é uma equação separável para I, que resolvemos como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x) \ dx$$

$$\ln |I| = \int P(x) \, dx$$

$$I = Ae^{\int P(x) \, dx}$$

onde  $A = \pm e^{c}$ . Estamos olhando para um fator de integração particular, não o mais comum; assim, tomamos A = 1 e usamos

$$I(x) = e^{\int P(x) \, dx}$$

Então, a fórmula para a solução geral da Equação 1 é fornecida pela Equação 4, onde I é dado pela Equação 5. Em vez de memorizar essa fórmula, contudo, apenas lembramos a forma do fator integrante.

Para resolver a equação diferencial linear y' + P(x)y = Q(x), multiplique ambos os lados pelo **fator integrante**  $I(x) = e^{\int P(x) dx}$  e integre ambos os lados.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Resolva a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ .

SOLUÇÃO A equação dada é linear porque ela tem a forma da Equação 1 com  $P(x) = 3x^2$  e  $Q(x) = 6x^2$ . Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por  $e^{x^3}$ , obtemos

$$e^{x^3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y = 6x^2 e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Integrando ambos os lados, temos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C$$
  
 $y = 2 + Ce^{-x^3}$ 

☐ A Figura 1 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções no Exemplo 1. Note que todos eles se aproximam de 2 quando  $x \to \infty$ .

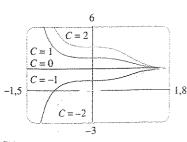


FIGURA 1

EXEMPLO 2 D Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1$$
  $x > 0$   $y(1) =$ 

SOLUÇÃO Devemos primeiro dividir ambos os lados pelo coeficiente de y' para colocar a equação diferencial na forma-padrão:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int (1/x) dx} = e^{\ln x} = x$$

A multiplicação de ambos os lados da Equação 6 por x fornece

$$xy' + y = \frac{1}{x}$$
 ou  $(xy)' = \frac{1}{x}$ 

Então

$$xy = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

e assim

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Como y(1) = 2, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$y = \frac{\ln x + 2}{r}$$

13

EXEMPLO 3  $\Box$  Resolva y' + 2xy = 1.

SOLUÇÃO A equação dada está na forma-padrão para uma equação linear. Multiplicando pelo fator integrante

$$e^{\int 2x \, dx} = e^{x^2}$$

obtemos

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

ou

$$(e^{x^2}y)'=e^{x^2}$$

Portanto

$$e^{x^2}y = \int e^{x^2} dx + C$$

Lembre-se da Seção 7.5, do Volume I, que  $\int e^{x^2} dx$  não pode ser expressa em termos de funções elementares. Apesar disso, é uma função perfeitamente boa e podemos deixar a resposta como

$$y = e^{-x^2} \int e^{x^2} dx + Ce^{-x^2}$$

□ A solução do problema de valor inicial no Exemplo 2 é mostrada na Figura 2.

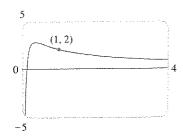


FIGURA 2

□ Embora as soluções da equação diferencial no Exemplo 3 sejam expressas em termos de uma integral, elas ainda podem ser plotadas por um sistema algébrico computacional (Figura 3).

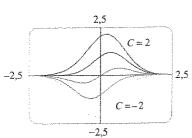


FIGURA 3

Outra maneira de escrever a solução é

$$y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^{-x^2}$$

(Qualquer número pode ser escolhido para o limite inferior de integração.)

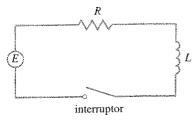


FIGURA 4

### Aplicação a Circuitos Elétricos

Na Seção 9.2 consideramos o circuito elétrico simples mostrado na Figura 4: uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) produz uma voltagem de E(t) volts (V) e uma corrente de I(t) ampères (A) em um tempo t. O circuito também contém um resistor com uma resistência de R ohms  $(\Omega)$  e um indutor com uma indutância de L henries (H).

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem devido ao resistor é RI. A queda de voltagem devido ao indutor é L(dI/dt). Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida E(t). Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem. A solução fornece a corrente I no tempo t.

EXEMPLO 4  $\Box$  Suponha que no circuito simples da Figura 4 a resistência seja 12  $\Omega$  e a indutância seja 4 H. Se uma pilha fornecer uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando t = 0, então a corrente começa com I(0) = 0. Encontre (a) I(t), (b) a corrente depois de 1 s e (c) o valor-limite da corrente.

#### SOLUÇÃO

ou

(a) Se colocarmos L=4, R=12 e E(t)=60 na Equação 7, obteremos o problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 I(0) = 0$$

 $\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$ 

Multiplicando pelo fator integrante  $e^{\int 3 dt} = e^{3t}$ , obtemos

$$e^{3t} \frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Como I(0) = 0, temos 5 + C = 0, assim C = -5 e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

☐ A equação diferencial no Exemplo 4 é linear e separável; assim, um método alternativo é resolvê-la como uma equação separável (Exemplo 4 na Seção 9.3). Se trocarmos a pilha por um gerador, contudo, obteremos uma equação que é linear, mas não é separável (Exemplo 5).

☐ A Figura 5 mostra como a corrente no Exemplo 4 se aproxima de seu valor-limite.

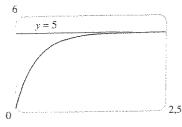


FIGURA 5

☐ A Figura 6 mostra o gráfico da corrente quando a pilha é trocada por um gerador.

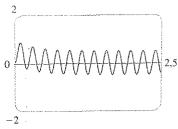


FIGURA 6

(b) Depois de um segundo a corrente é

(c) 
$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4,75 \text{ A}$$
$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} 5(1 - e^{-3t})$$
$$= 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t}$$

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Suponha que a resistência e a indutância permaneçam as mesmas como no Exemplo 4, mas, em vez de uma pilha, usaremos um gerador que produz uma voltagem variável de E(t) = 60 sen 30t volts. Encontre I(t).

= 5 - 0 = 5

SOLUÇÃO Dessa vez a equação diferencial torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \text{ sen } 30t$$
 ou  $\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \text{ sen } 30t$ 

O mesmo fator de integração  $e^{3t}$  fornece

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \sin 30t$$

Usando a Fórmula 98 da Tabela de Integrais, obtemos

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \sin 30t \, dt = 15 \, \frac{e^{3t}}{909} (3 \sin 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \frac{5}{101}(\text{sen } 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Como I(0) = 0, temos

$$-\frac{50}{101} + C = 0$$

assim

$$I(t) = \frac{5}{101}(\text{sen } 30t - 10\cos 30t) + \frac{50}{101}e^{-3t}$$

# 9.6 Exercícios

1-4 Determine se a equação diferencial é linear.

1. 
$$y' + e^x y = x^2 y^2$$

2. 
$$v + \sin x = x^3$$

$$3 \times v' + \ln x - x^2 v = 0$$

$$4 \cdot v' + \cos v = t \sigma r$$

5-14 □ Resolva a equação diferencial.

**5.** 
$$y' + 2y = 2e^x$$

**6.** 
$$y' = x + 5y$$

7. 
$$xy' - 2y = x^2$$

8. 
$$x^2y' + 2xy = \cos^2 x$$

$$9 \quad \chi \gamma' + \gamma = \sqrt{\chi}$$

10. 
$$1 + xy = xy'$$

11. 
$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2$$

12. 
$$\frac{dy}{dx} = x \sec 2x + y \lg x$$
,  $-\pi/2 < x < \pi/2$ 

Degi-

**13.** 
$$(1+t)\frac{du}{dt} + u = 1+t, \quad t > 0$$

$$14. \quad t \ln t \, \frac{dr}{dt} + r = te^t$$

15-20 □ Resolva o problema de valor inicial.

**15.** 
$$y' = x + y$$
,  $y(0) = 2$ 

**16.** 
$$t \frac{dy}{dt} + 2y = t^3$$
,  $t > 0$ ,  $y(1) = 0$ 

17. 
$$\frac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2e^{t^2}$$
,  $v(0) = 5$ 

**19.** 
$$xy' = y + x^2 \sin x$$
,  $y(\pi) = 0$ 

**20.** 
$$x \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x$$
,  $y(1) = 0$ ,  $x > 0$ 

21-22 
Resolva a equação diferencial e use uma calculadora gráfica ou um computador para plotar vários membros da família de soluções. Como a curva-solução muda quando C varia?

**21.** 
$$xy' + y = x \cos x$$
,  $x > 0$ 

**22.** 
$$y' + (\cos x)y = \cos x$$

23. Uma equação diferencial de Bernoulli [em homenagem a James Bernoulli (1654-1705)] é da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se n = 0 ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição  $u = y^{1-n}$  transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

24-26 

Use o método do Exercício 23 para resolver a equação diferencial.

**24.** 
$$xy' + y = -xy^2$$

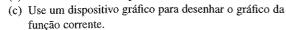
**25.** 
$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$$

**26.** 
$$y' + y = xy^3$$

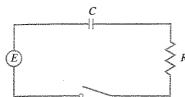
- 27. No circuito apresentado na Figura 4, uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é  $10 \Omega e I(0) = 0$ .
  - (a) Encontre I(t).
  - (b) Calcule a corrente após 0,1 s.
- 28. No circuito mostrado na Figura 4, um gerador fornece uma voltagem de E(t) = 40 sen 60t volts, a indutância é 1 H, a resistência é  $20 \Omega$  e I(0) = 1 A.
  - (a) Encontre I(t).

ΔV

(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.



29. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R ohms ( $\Omega$ ). A queda de voltagem



através do capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas I = dQ/dt (veja o Exemplo 3 na Seção 3.3 no Volume I), assim, temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5  $\Omega$  e a capacitância, 0,05 F; a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V e a carga inicial seja Q(0) = 0 C. Encontre a carga e a corrente no tempo t.

- **30.** No circuito do Exercício 29,  $R = 2 \Omega$ , C = 0.01 F, Q(0) = 0 e E(t) = 10 sen 60t. Calcule a carga e a corrente no tempo t.
- Seja P(t) o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. O gráfico de P é chamado curva de aprendizagem. No Exercício 13 na Seção 9.1 propusemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como um modelo razoável para a aprendizagem, onde k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial linear e use sua solução para plotar a curva de aprendizagem.

- 32. Dois novos trabalhadores foram contratados para uma linha de montagem. João processou 25 unidades durante a primeira hora e 45 unidades durante a segunda hora. Marcos processou 35 unidades durante a primeira hora e 50 unidades na segunda hora. Usando o modelo do Exercício 31 e assumindo que P(0) = 0, estime o número máximo de unidades por hora que cada trabalhador é capaz de processar.
- Na Seção 9.3 olhamos para os problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis (veja o Exemplo 6 naquela seção). Se as taxas de entrada e de saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear, mas não separável.

Um tanque contém 100 L de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 kg/L é adicionada a uma taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 L/min. Se y(t) for a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 minutos.

34. Um tanque com capacidade de 400 L está cheio com uma mistura de água e cloro com uma concentração de 0,05 g de cloro por litro. Para reduzir a concentração de cloro, água doce é bombeada no tanque a uma taxa de 4 L/s. A mistura é agitada e é retirada a uma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de cloro no tanque em função do tempo.

35. Um objeto com massa m é derrubado a partir do repouso e presumimos que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do objeto. Se s(t) for a distância percorrida depois de t segundos, então a velocidade é v = s'(t) e a aceleração é a = v'(t). Se g for a aceleração da gravidade, então a força para baixo no objeto é mg - cv, onde c é uma constante positiva, e a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resolva essa equação linear para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c} \left( 1 - e^{-ct/m} \right)$$

- (b) Qual é a velocidade-limite?
- (c) Calcule a distância que o objeto caiu depois de t segundos.
- 36. Se ignorarmos a resistência do ar, poderemos concluir que os objetos mais pesados não caem mais rápido que objetos mais leves. Mas, se considerarmos a resistência do ar, nossa conclusão muda. Use a expressão para a velocidade de queda de um objeto no Exercício 35(a) para calcular dv/dm e mostrar que os objetos mais pesados caem mais rápido que os mais leves.

# 9.7

#### Sistemas Predador-Presa

Temos olhado uma variedade de modelos para o crescimento de uma única espécie que vive sozinha em um ambiente. Nesta seção consideraremos os modelos mais realistas, que levam em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente. Veremos que esses modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas.

Primeiro consideraremos a situação na qual uma espécie, chamada presa, tem um amplo suprimento alimentar e a segunda espécie, denominada predador, se alimenta da presa. Exemplos de presa e predador incluem coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas e bactérias e amebas. Nosso modelo terá duas variáveis dependentes e ambas serão funções do tempo. Seja R(t) o número de presas (usando R para coelhos) e W(t) o número de predadores (com W para lobos) no tempo t.

Na ausência de predadores, o amplo suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial de presas, isto é,

$$\frac{dR}{dt} = kR \quad \text{onde } k \text{ \'e uma constante positiva}$$

Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{onde } r \text{ \'e uma constante positiva}$$

Com ambas as espécies presentes, contudo, pressupomos que a causa principal de morte entre as presas seja a de serem comidas por predadores, e as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependam da disponibilidade de comida, a saber, as presas. Também presumimos que as duas espécies se encontrem a uma taxa que é proporcional a ambas as populações e é, portanto, proporcional ao produto *RW*. (Quanto maior for qualquer uma das populações, maior é a chance do encontro.) Um sistema de duas equações diferenciais que incorporam essas premissas é mostrado a seguir:

W representa os predadores.

R representa as presas.

$$\frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

onde k, r, a e b são constantes positivas. Note que o termo -aRW diminui a taxa natural de crescimento das presas e o termo bRW aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.

☐ As equações de Lotka-Volterra foram propostas como um modelo para explicar as variações de tubarões e peixes no mar Adriático pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

As equações em (1) são conhecidas como **equações predador-presa**, ou **equações de Lotka-Volterra**. Uma **solução** desse sistema de equações é um par de funções R(t) e W(t), que descrevem as populações de presas e predadores como funções do tempo. Como o sistema é acoplado (R e W ocorrem em ambas as equações), não podemos resolver uma equação e depois a outra: temos de resolvê-las de maneira simultânea. Infelizmente, porém, em geral é impossível encontrar fórmulas explícitas para R e W como funções de t. Podemos, contudo, usar métodos gráficos para analisar as equações.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Suponha que as populações de coelhos e lobos sejam descritas pelas equações de Lotka-Volterra (1) com k=0.08, a=0.001, r=0.02 e b=0.00002. O tempo t é medido em meses.

- (a) Encontre as soluções constantes (chamadas **soluções de equilíbrio**) e interprete a resposta.
- (b) Use o sistema de equações diferenciais para encontrar uma expressão para dW/dR.
- (c) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano *RW*. Então use o campo de direções para esboçar algumas curvas-solução.
- (d) Suponha que, em algum ponto no tempo, existam 1.000 coelhos e 40 lobos. Desenhe a curva-solução correspondente e use-a para descrever as mudanças em ambos os níveis de população.
- (e) Use a parte (d) para fazer esboços de R e W como funções de t.

SOLUÇÃO

(a) Com os valores dados de k, a, r e b, as equações de Lotka-Volterra se tornam

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W serão constantes se ambas as derivadas forem 0, isto é,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Uma solução é dada por R=0 e W=0. (Isso faz sentido: se não existirem coelhos ou lobos, as populações não vão aumentar.) A outra solução constante é

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80$$
  $R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$ 

Assim as populações de equilíbrio consistem em 80 lobos e 1.000 coelhos. Isso significa que 1.000 coelhos são suficientes para sustentar uma população constante de 80 lobos. Não existem muitos lobos (o que resultaria em menos coelhos) nem poucos lobos (o que resultaria em mais coelhos).

(b) Usamos a Regra da Cadeia para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR} \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

assim

(c) Se pensarmos em W como uma função de R, teremos a equação diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Desenhamos o campo de direções para essa equação diferencial na Figura 1 e o usamos para esboçar várias curvas-solução na Figura 2. Se nos movermos ao longo de uma curva-solução, veremos como o relacionamento entre R e W muda com o passar do tempo. Observe que as curvas parecem estar fechadas no sentido de que, se viajamos ao longo de uma curva, sempre retornamos ao mesmo ponto. Note também que o ponto (1.000, 80) está dentro de todas as curvas solução. Esse ponto é denominado ponto de equilíbrio, porque corresponde à solução de equilíbrio R = 1.000, W = 80.

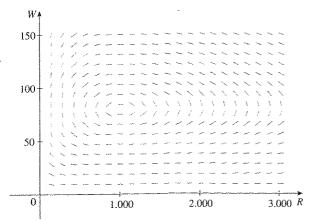


FIGURA 1 Campo de direções para o sistema predador-presa

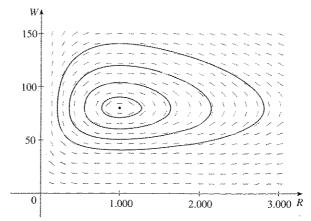


FIGURA 2 Retrato de fase do sistema

Quando representamos as soluções de um sistema de equações diferenciais como na Figura 2, referimo-nos ao plano *RW* como o **plano de fase** e chamamos as curvas-solução de **trajetórias de fase**. Assim, uma trajetória de fase é um caminho traçado pelas soluções (*R*, *W*) com o passar do tempo. Um **retrato de fase** consiste em pontos de equilíbrio e trajetórias de fase típicas, como mostrado na Figura 2.

(d) Começar com 1.000 coelhos e 40 lobos corresponde a desenhar a curva-solução no ponto  $P_0(1.000, 40)$ . A Figura 3 mostra essa trajetória de fase com o campo de direções removido. Começando no ponto  $P_0$  no tempo t=0 e deixando t aumentar, movemo-nos no sentido horário ou no anti-horário ao redor da trajetória de fase? Se colocarmos R=1.000 e

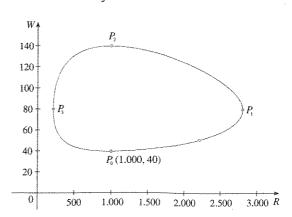


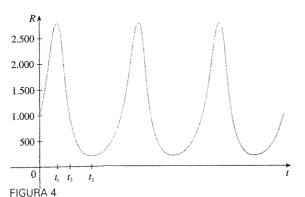
FIGURA 3 Trajetória de fase em (1.000, 40)

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1.000) - 0.001(1.000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Como dR/dt > 0, concluímos que R está aumentando em  $P_0$  e assim nos movemos no sentido anti-horário ao longo da trajetória de fase.

Vemos que em  $P_0$  não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; dessa forma, a população de coelhos aumenta. Isso resulta em mais lobos e eventualmente existem tantos lobos que os coelhos têm dificuldade para evitá-los. Assim, o número de coelhos começa a declinar (em  $P_1$ , onde estimamos que R atinja a população máxima ao redor de 2.800). Isso significa que algum tempo depois a população de lobos começa a cair (em  $P_2$ , onde R=1.000 e  $W\approx140$ ). Mas isso beneficia os coelhos; portanto, sua população depois começa a aumentar (em  $P_3$ , onde W=80 e  $R\approx210$ ). Como conseqüência, a população de lobos eventualmente começa a aumentar também. Isso acontece quando as populações retornam a seus valores iniciais de R=1.000 e W=40 e o ciclo inteiro começa novamente.

(e) Da descrição na parte (d) de como as populações de coelhos e lobos aumentam e diminuem, podemos esboçar os gráficos de R(t) e W(t). Suponha que os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  na Figura 3 sejam alcançados nos tempos  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ . Então podemos esboçar gráficos de R e W como na Figura 4.



Gráficos das populações de coelhos e lobos como função do tempo

Para tornar os gráficos mais fáceis de comparar, os desenhamos nos mesmos eixos, mas com escalas diferentes para R e W, como na Figura 5. Note que os coelhos atingem sua população máxima cerca de um quarto de ciclo antes dos lobos.

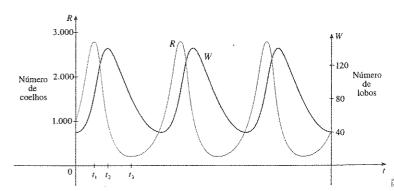


FIGURA 5 Comparação das populações de coelhos e lobos

Uma parte importante do processo de modelagem, como discutimos na Seção 1.2, é interpretar nossas conclusões matemáticas como previsões do mundo real e testar as previsões com dados reais. A Hudson's Bay Company, que começou comerciando peles de animais no Canadá em 1670, manteve os dados a partir de 1840. A Figura 6 mostra gráficos do número de peles de coelho selvagem e seu predador, o lince canadense, comerciado pela companhia em um período de 90 anos. Você pode ver que as oscilações acopladas na população de coelhos selvagens e linces, prevista pelo modelo de Lotka-Volterra, realmente ocorrem e o período desses ciclos é de aproximadamente dez anos.

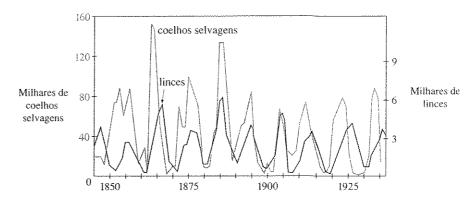


FIGURA 6

Relativa abundância de coelhos e linces dos registros da Hudson's Bay Company

Embora o modelo relativamente simples de Lotka-Volterra tivesse algum sucesso em explicar e prever as populações acopladas, os modelos mais sofisticados também têm sido propostos. Uma maneira de modificar as equações de Lotka-Volterra é assumir que, na ausência de predadores, a presa cresce de acordo com um modelo logístico com capacidade de suporte K. Então as equações de Lotka-Volterra (1) são substituídas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Esse modelo é investigado nos Exercícios 9 e 10.

Os modelos também têm sido propostos para descrever e prever níveis de população de duas espécies que competem pelos mesmos recursos ou cooperam por benefícios mútuos. Esses modelos serão explorados no Exercício 2.

# 9.7 Exercícios

1. Para cada sistema predador-presa, determine qual das variáveis, x ou y, representa a população de presas e qual representa a população de predadores. O crescimento das presas é restrito apenas pelos predadores ou por outros fatores também? Os predadores se alimentam apenas das presas ou eles têm outras fontes de alimentação? Explique.

(a) 
$$\frac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$$
  
 $\frac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$ 

(b) 
$$\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$$
  
 $\frac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$ 

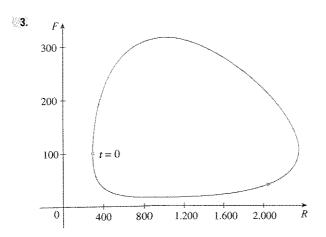
2. Cada sistema de equações diferenciais é um modelo para duas espécies que competem pelas mesmas fontes ou cooperam por mútuo benefício (plantas em floração e insetos polinizadores, por exemplo). Decida qual sistema descreve a competição ou a cooperação e explique por que este é um modelo razoável. (Pergunte-se qual é o efeito que o aumento de uma das espécies tem na taxa de crescimento da outra.)

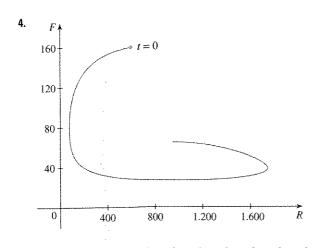
(a) 
$$\frac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$$
  
 $\frac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$ 

(b) 
$$\frac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$$
  
 $\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$ 

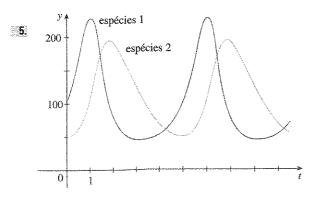
3-4  $\Box$  Uma trajetória de fase é mostrada para as populações de coelhos (R) e raposas (F).

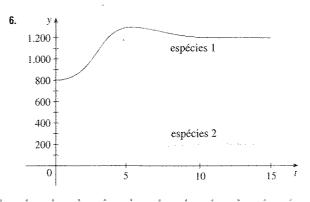
- (a) Descreva como cada população muda com o passar do tempo.
- (b) Use sua descrição para fazer um esboço grosseiro dos gráficos de R e F como funções do tempo.





5-6 Gráficos de populações de duas espécies são ilustrados. Use-os para esboçar a trajetória de fase correspondente.





No Exemplo 1(b) mostramos que as populações de coelhos e lobos satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, mostre que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

onde C é uma constante.

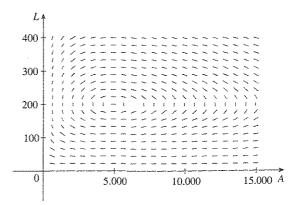
É impossível resolver essa equação para W como uma função explícita de R (ou vice-versa). Se você tiver um sistema algébrico computacional que plota curvas definidas implicitamente, use essa equação e seu CAS para desenhar a curva-solução que passa pelo ponto (1.000, 40) e compare com a Figura 3.

 As populações de pulgões e joaninhas são modeladas pelas equações

$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

- (a) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.
- (b) Encontre uma expressão para dL/dA.
- (c) O campo de direções para a equação diferencial na parte
   (b) é mostrado. Use-o para esboçar um retrato de fase.
   O que as trajetórias de fase têm em comum?

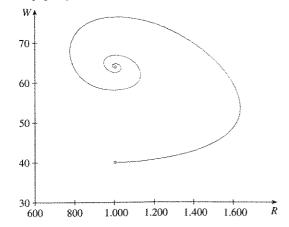


- (d) Suponha que no tempo t = 0 existam 1.000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como as populações variam.
- (e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. Como os gráficos estão relacionados?
- 9. No Exemplo 1 usamos as equações de Lotka-Volterra para modelar as populações de coelhos e lobos. Vamos modificar aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de coelhos na ausência dos lobos?



- (b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seus significados.
- (c) A figura mostra a trajetória de fase que começa no ponto (1.000, 40). Descreva o que finalmente ocorre às populações de coelhos e Iobos.
- (d) Esboce os gráficos das populações de coelhos e lobos como funções do tempo.
- 10. No Exercício 8 modelamos populações de pulgões e joaninhas com um sistema Lotka-Volterra. Suponha que modifiquemos aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0,0001A) - 0,01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

- (a) Na ausência de joaninhas, o que o modelo prevê sobre os pulgões?
- (b) Encontre as soluções de equilíbrio.
- (c) Encontre uma expressão para dL/dA.
- (d) Use um sistema algébrico computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial na parte (c). Então use o campo de direções para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?
- (e) Suponha que no tempo t = 0 existam 1.000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.
- (f) Use a parte (e) para fazer esboços das populações de pulgões e de joaninhas como funções de t. Como os gráficos são relacionados?



Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. (a) O que é uma equação diferencial?
  - (b) O que é a ordem de uma equação diferencial?
  - (c) O que é uma condição inicial?
- 2. O que você pode dizer sobre as soluções da equação y' = x² + y² apenas olhando para a equação diferencial?
- O que é um campo de direções para a equação diferencial y' = F(x, y)?
- 4. Explique como o método de Euler funciona.
- 5. O que é uma equação diferencial separável? Como você a resolve?
- 6. O que é uma equação diferencial linear de primeira ordem? Como você a resolve?

- 7. (a) Escreva uma equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural. O que ela diz em termos da taxa de crescimento relativo?
  - (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
  - (c) Quais são as soluções dessa equação?
- 8. (a) Escreva a equação logística.
  - (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
- **9.** (a) Escreva equações de Lotka-Volterra para modelar populações de peixes (*F*) e tubarões (*S*).
  - (b) O que essas equações dizem sobre cada população na ausência da outra?

#### TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, explique a razão. Se for falsa, explique a razão ou dê um contra-exemplo.

- 1. Todas as soluções da equação diferencial  $y' = -1 y^4$  são funções decrescentes.
- 2. A função  $f(x) = (\ln x)/x$  é uma solução da equação diferencial  $x^2y' + xy = 1.$
- 3. A equação y' = x + y é separável.
- 4. A equação y' = 3y 2x + 6xy 1 é separável.

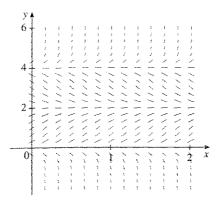
- 5. A equação  $e^x y' = y$  é linear.
- **6.** A equação  $y' + xy = e^y$  é linear.
- 7. Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

então  $\lim_{t\to\infty} y = 5$ .

#### **EXERCÍCIOS**

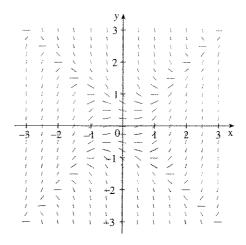
- 1. (a) Um campo de direções para a equação diferencial y' = y(y - 2)(y - 4) é mostrado. Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
  - (i) y(0) = -0.3
- (ii) y(0) = 1
- (iii) y(0) = 3
- (iv) y(0) = 4.3
- (b) Se a condição inicial for y(0) = c, para quais valores de c $\lim_{t\to\infty} y(t)$  é finito? Quais são as soluções de equilíbrio?



- 2. (a) Esboce um campo de direções para a equação diferencial y' = x/y. Então use-o para esboçar as quatro soluções que satisfazem as condições iniciais y(0) = 1, y(0) = -1, y(2) = 1 e y(-2) = 1.
  - (b) Verifique seu trabalho na parte (a) resolvendo a equação diferencial explicitamente. Que tipo de curva é cada curva-solução?
- 3. (a) Um campo de direções para a equação diferencial  $y' = x^2 - y^2$  é mostrado. Esboce a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^2 - y^2$$
  $y(0) = 1$ 

Use seu gráfico para estimar o valor de y(0,3).



- (b) Use o método de Euler com passo 0,1 para estimar y(0,3), onde y(x) é a solução do problema de valor inicial na parte (a). Compare com sua estimativa da parte (a).
- (c) Em que retas estão localizados os centros dos segmentos de reta horizontais do campo de direções da parte (a)? O que acontece quando uma curva-solução intercepta essas retas?
- **4.** (a) Use o método de Euler com passo 0,2 para estimar y(0,4), onde e y(x) é a solução do problema de valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

- (b) Repita a parte (a) com passo 0,1.
- (c) Encontre a solução exata da equação diferencial e compare com o valor em 0,4 com as aproximações nas partes (a) e (b).
- 5-8 □ Resolva a equação diferencial.

$$5. \ y' = xe^{-\sin x} - y \cos x$$

**5.** 
$$y' = xe^{-\sin x} - y \cos x$$
 **6.**  $\frac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$ 

7. 
$$(3y^2 + 2y)y' = x \cos x$$

8. 
$$x^2y' - y = 2x^3 e^{-1/x}$$

9-11 © Resolva o problema de valor inicial.

**9.** 
$$xyy' = \ln x$$
,  $y(1) = 2$ 

**10.** 
$$1 + x = 2xyy'$$
,  $x > 0$ ,  $y(1) = -2$ 

11. 
$$y' + y = \sqrt{x}e^{-x}$$
,  $y(0) = 3$ 

**12.** Resolva o problema de valor inicial  $2yy' = xe^x$ , y(0) = 1 e plote a solução.

13-14 © Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas.

**13.** 
$$kx^2 + y^2 = 1$$
 **14.**  $y = \frac{k}{1 + x^2}$ 

- 15. Uma cultura de bactérias começa com 1.000 bactérias, e a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias. Depois de duas horas a população é 9.000.
  - (a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de *t* horas.
  - (b) Calcule o número de bactérias depois de três horas.
  - (c) Calcule a taxa de crescimento depois de três horas.
  - (d) Quanto tempo leva para o número de bactérias dobrar?
- 16. Um isótopo de estrôncio, 90Sr, tem uma meia-vida de 25 anos.
  - (a) Calcule a massa de <sup>90</sup>Sr que resta a partir de uma amostra de 18 mg depois de t anos.
  - (b) Quanto tempo levaria para a massa decair para 2 mg?
- 17. Seja C(t) a concentração de um remédio na circulação sangüínea. À medida que o corpo elimina o remédio, C(t) diminui com uma taxa que é proporcional à quantidade de medicamento que está presente naquele momento. Então, C'(t) = -kC(t), onde k é um número positivo chamado constante de eliminação do remédio.
  - (a) Se  $C_0$  for a concentração no tempo t = 0, encontre a concentração no tempo t.
  - (b) Se o corpo eliminar metade do remédio em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% do medicamento?
- **18.** (a) A população mundial era de 5,28 bilhões em 1990 e 6,07 bilhões em 2000. Encontre um modelo exponencial para esses dados e use-o para prever a população mundial no ano 2020.
  - (b) De acordo com o modelo na parte (a), quando a população mundial excederá 10 bilhões?
  - (c) Use os dados na parte (a) para encontrar um modelo logístico para a população. Assuma a capacidade de suporte de 100 bilhões. Então use o modelo logístico para prever a população em 2020. Compare sua previsão com o modelo exponencial.
  - (d) De acordo com o modelo logístico, quando a população mundial excederá 10 bilhões? Compare com suas previsões na parte (b).
- **19.** O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento L(t) de um peixe em um período de tempo.

Se  $L_{\infty}$  for o maior comprimento para uma espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento no comprimento seja proporcional a  $L_{\infty}-L$ , o comprimento que ainda pode ser alcançado.

- (a) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para L(t).
- (b) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que L<sub>∞</sub> = 53 cm, L(0) = 10 cm, e a constante de proporcionalidade é 0,2. Como é a expressão para L(t) com esses dados?
- 20. Um tanque contém 100 L de água pura. A água salgada contendo 0,1 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é agitada e retirada do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque depois de seis minutos?
- 21. Um modelo para a propagação de uma epidemia é que a taxa de propagação é proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas. Em uma cidade isolada de 5.000 habitantes, 160 pessoas têm uma doença no começo da semana e 1.200, no final da semana. Quanto tempo levará para 80% da população se contaminar?
- **22.** A Lei de Brentano-Stevens em psicologia modela a maneira como um objeto de estudo reage a um estímulo. Ela estabelece que, se *R* representar a reação à quantidade de estímulo *S*, então as taxas relativas de aumento são proporcionais:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

onde k é uma constante positiva. Encontre R como uma função de S.

23. O transporte de uma substância através de uma parede capilar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V} \left( \frac{h}{k+h} \right)$$

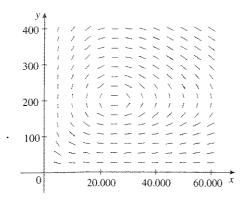
onde h é a concentração de hormônio na corrente sangüínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume do capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma relação entre h e t.

**24.** As populações de pássaros e insetos são modeladas pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy \qquad \frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

- (a) Quais das variáveis (x ou y) representa a população de pássaros e qual representa a população de insetos? Explique.
- (b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

- (c) Encontre uma expressão para dy/dx.
- (d) O campo de direções para a equação diferencial na parte (c) é mostrado. Use-o para esboçar a trajetória de fase correspondente às populações iniciais de 100 pássaros e 40.000 insetos. Então use a trajetória de fase para descrever como ambas as populações variam.

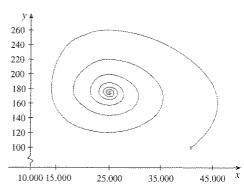


- (e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pássaros e insetos como funções do tempo. Como esses gráficos estão relacionados?
- **25.** Suponha que o modelo do Exercício 24 seja trocado pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x(1 - 0.000005x) - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

- (a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de insetos na ausência dos pássaros?
- (b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.
- (c) A figura mostra a trajetória de fase que começa com 100 pássaros e 40.000 insetos. Descreva o que ocorre finalmente com as populações de pássaros e insetos.

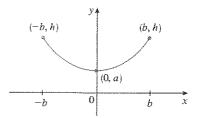


- (d) Esboce os gráficos das populações de pássaros e insetos como funções do tempo.
- 26. Bárbara pesa 60 kg e está em uma dieta de 1600 calorias por dia, das quais 850 são usadas diretamente pelo metabolismo basal. Ela gasta cerca de 15 cal/kg/dia vezes seu peso fazendo exercícios. Se 1 kg de gordura tiver 10.000 cal e assumirmos que a reserva de calorias na forma de gordura seja 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a para encontrar o peso dela em função do tempo. O peso de Bárbara finalmente se aproxima de um peso de equilíbrio?
- **27.** Quando um cabo flexível de densidade uniforme é suspenso entre dois pontos fixos e fica pendurado à mercê de seu próprio peso, a forma y = f(x) do cabo satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde k é uma constante positiva. Considere o cabo mostrado na figura.

- (a) Seja z = dy/dx na equação diferencial. Resolva a equação diferencial de primeira ordem (em z) e depois integre para encontrar y.
- (b) Determine o comprimento do cabo.



#### Problemas Quentes

1. Encontre todas as funções f tal que f' é contínua e

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\} dt$$
 para todo x real.

- 2. Um estudante esqueceu a Regra do Produto para a derivada e cometeu o erro de pensar que (fg)' = f'g'. Contudo, ele teve sorte e obteve a resposta certa. A função f que ele usou era f(x) = e<sup>x²</sup> e o domínio de seu problema era o intervalo (½, ∞). Qual era a função g?
- 3. Seja f uma função com a propriedade que f(0) = 1, f'(0) = 1 e f(a + b) = f(a)f(b) para todos os números reais a e b. Mostre que f'(x) = f(x) para todo x e deduza que  $f(x) = e^x$ .
- 4. Encontre todas as funções f que satisfazem a equação

$$\left(\int f(x) \, dx\right) \left(\int \frac{1}{f(x)} \, dx\right) = -1$$

- **5.** Uma torta de pêssego é tirada do forno às 17 horas. Quando saiu do forno tinha uma temperatura de 100 °C. Às 17h10, sua temperatura era de 80 °C; às 17h20, a temperatura era de 65 °C. Qual é a temperatura da sala?
- 6. Começa a cair neve durante a manhã do dia 2 de fevereiro e continua constantemente durante a tarde. Ao meio-dia um veículo removedor de neve começa a retirá-la de uma estrada com uma taxa constante. O veículo percorreu 6 km do meio-dia até a 1 hora da tarde, mas apenas 3 km da 1 hora até as 2 horas da tarde. Quando a neve começou a cair? [Dicas: Para começar, seja t o tempo medido em horas depois do meio-dia; seja x(t) a distância percorrida pelo veículo removedor de neve em um tempo t; então a velocidade do veículo é dx/dt. Seja b o número de horas antes do meio-dia quando começou a nevar. Encontre uma expressão para a altura da neve no tempo t. Então use a informação dada de que a taxa de remoção R (em m³/h) é constante.]
- 7. Um cachorro vê um coelho correndo em linha reta através de um campo aberto e começa a caçá-lo. Em um sistema de coordenadas retangular (como mostrado na figura), assuma:
  - (i) O coelho está na origem e o cachorro, no ponto (L, 0), no primeiro instante em que o cachorro vê o coelho.
  - (ii) O coelho corre no eixo y e o cachorro, em linha reta na direção do coelho.
  - (iii) O cachorro corre na mesma velocidade do coelho.
  - (a) Mostre que o caminho do cachorro é o gráfico da função y = f(x), onde y satisfaz a equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- (b) Determine a solução da equação na parte (a) que satisfaz as condições iniciais y = y' = 0 quando x = L. [Dica: Faça z = dy/dx na equação diferencial e resolva a equação de primeira ordem resultante para encontrar z; então integre z para encontrar y.]
- (c) O cachorro alcança o coelho?
- 8. (a) Suponha que o cachorro no Problema 7 corra duas vezes mais rápido que o coelho. Encontre uma equação diferencial para a trajetória do cachorro. Então resolva-a para encontrar o ponto onde o cachorro pega o coelho.
  - (b) Pressuponha que o cachorro corra com a metade da velocidade do coelho. Quão próximo o cachorro chega do coelho? Quais são suas posições quando eles estão o mais próximo possível?
- 9. Um engenheiro deve apresentar algumas estimativas à sua companhia sobre uma nova planta de alume considerando a capacidade de um silo desenhado para conter minério de bauxita até este ser processado em alume. O minério parece pó de talco cor-de-rosa e é despejado a partir de uma esteira transportadora no topo do silo. O silo é um cilindro de 100 pés de altura com

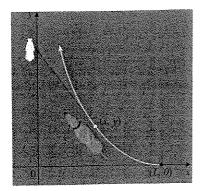


FIGURA PARA O PROBLEMA 7

raio de 200 pés. O transporte carrega  $60.000\pi$  pés³/h e o minério mantém um formato cônico cujo raio é 1,5 vez a sua altura.

- (a) Se, em um tempo t determinado, a pilha tiver 60 pés de altura, quanto tempo levará para ela alcançar o topo do sílo?
- (b) A administração quer saber quanto espaço será reservado no chão do silo quando a pilha tiver 60 pés de altura. Quão rápido está crescendo a área do chão quando a pilha estiver a essa altura?
- (c) Suponha que um carregador comece a remover o minério a uma taxa de 20.000π pés³/h quando a altura da pilha alcança 90 pés. Suponha também que a pilha continue a manter seu formato. Quanto tempo levará para a pilha atingir o topo do silo nessas condições?
- **10.** Ache a curva que passa através do ponto (3, 2) e tem a propriedade de que, se a reta tangente for desenhada em qualquer ponto *P* na curva, então a parte da reta tangente que está no primeiro quadrante é dividida em *P*.
- 11. Lembre-se de que a reta normal a uma curva em um ponto P na curva é a reta que passa através de P e é perpendicular à reta tangente em P. Ache a curva que passa através do ponto (3, 2) e tem a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto na curva, cortará o eixo y no ponto 6.
- **12.** Encontre todas as curvas com a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto *P* na curva, então a parte da reta normal entre *P* e o eixo *x* é dividida em duas partes iguais pelo eixo *y*.

# 10

# Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

As curvas paramétricas são usadas para representar letras e outros símbolos em impressoras a laser. Veja o Projeto de Laboratório na página 664 Até agora descrevemos as curvas planas, dando y como uma função de x [y = f(x)] ou x como uma função de y [x = g(y)] ou fornecendo a relação entre x e y que define y implicitamente como uma função de x [f(x, y) = 0]. Neste capítulo discutiremos dois novos métodos para descrever as curvas.

Algumas curvas, como a ciclóide, são mais bem manipuladas quando x e y são dados em termos de uma terceira variável t, chamada parâmetro [x=f(t),y=g(t)]. Outras curvas, como a cardióide, têm sua descrição mais conveniente quando usamos um novo sistema de coordenadas, denominado sistema de coordenadas polares.

# **10.1** Curvas Definidas por Equações Paramétricas

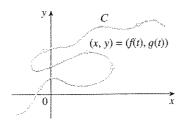


FIGURA 1

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva C, como mostrado na Figura 1. É impossível descrever C por uma equação do tipo y=f(x) porque C falha no Teste da Reta Vertical. Mas as coordenadas x e y da partícula são funções do tempo e, assim, podemos escrever x=f(t) e y=g(t). Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente de descrever uma curva e faz surgir a seguinte definição.

Suponha que x e y sejam ambas dadas como funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) pelas equações

$$x = f(t)$$
  $y = g(t)$ 

(chamadas **equações paramétricas**). Cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos plotar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto (x, y) = (f(t), g(t)) varia e traça a curva C, que chamamos **curva paramétrica**. O parâmetro t não representa o tempo necessariamente e, de fato, poderíamos usar outra letra em vez de t para o parâmetro. Porém, em muitas aplicações das curvas paramétricas, t denota tempo e, portanto, podemos interpretar (x, y) = (f(t), g(t)) como a posição de uma partícula no tempo t.

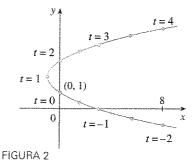
EXEMPLE 1 

Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUÇÃO Cada valor de t fornece um ponto na curva, como mostrado na tabela. Por exemplo, se t=0, então x=0, y=1 e assim o ponto correspondente é (0,1). Na Figura 2 plotamos os pontos (x,y) determinados por diversos valores do parâmetro e os unimos para produzir uma curva.

*	3	.)"
-2	8	1
-1	9	(
9	õ	ì
1	~~ <u>`</u>	2
2 3	0	3
3	3	2 3 4
4	8	5



Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção das setas quando t aumenta. Note que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não a distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera quando t aumenta.

Parece que, a partir da Figura 2, a curva traçada pela partícula pode ser uma parábola. Isso pode ser confirmado pela eliminação do parâmetro t, como a seguir. Obtemos t=y-1 a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação. Isso fornece

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

e assim a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola  $x = y^2 - 4y + 3$ .

Nenhuma restrição foi colocada no parâmetro *t* no Exemplo 1; assim, assumimos que *t* poderia ser qualquer número real. No entanto, algumas vezes restringimos *t* para ficar em um intervalo finito. Por exemplo, a curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \le t \le 4$$

mostrada na Figura 3 é a parte da parábola no Exemplo 1 que começa no ponto (0, 1) e termina no ponto (8, 5). A seta indica a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta de 0 até 4.

Em geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t)$$
  $y = q(t)$   $a \le t \le b$ 

tem ponto inicial (f(a), g(a)) e ponto final (f(b), g(b)).

EXEMPLO 2 
Que curva é representada pelas equações paramétricas  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ ?

SOLUÇÃO Se plotarmos os pontos, parece que a curva é círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de *t*. Note que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Então o ponto (x, y) se move no círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ . Note que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 4. Quando t aumenta de 0 até  $2\pi$ , o ponto  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  se move uma vez ao redor do círculo no sentido anti-horário partindo do ponto (1, 0).

EXEMPLO 3  $\subset$  Que curva é representada pelas equações paramétricas x = sen 2t,  $y = \cos 2t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ ?

SOLUÇÃO Novamente temos

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

assim as equações paramétricas representam o círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ . Mas quando t aumenta de 0 até  $2\pi$ , o ponto  $(x, y) = (\text{sen } 2t, \cos 2t)$  começa em (0, 1) e se move duas vezes ao redor do círculo no sentido horário, como indicado na Figura 5.

Os Exemplos 2 e 3 mostram que diferentes conjuntos de equações paramétricas podem representar a mesma curva. Então distinguimos uma *curva*, que é um conjunto de pontos, e uma *curva* paramétrica, na qual os pontos são traçados em uma ordem particular.

EXEMPLO 4  $\odot$  Esboce a curva com equações paramétricas x = sen t,  $y = \text{sen}^2 t$ .

SOLUÇÃO Observe que  $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$  e dessa forma o ponto (x, y) se move na parábola  $y = x^2$ . Mas note também que, como  $-1 \le \operatorname{sen} t \le 1$ , temos  $-1 \le x \le 1$ , assim as equações paramétricas representam apenas a parte da parábola onde  $-1 \le x \le 1$ . Como sen t é periódica, o ponto  $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$  se move para a frente e para trás infinitamente ao longo da parábola de (-1, 1) até (1, 1). (Veja a Figura 6.)

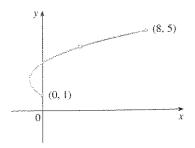


FIGURA 3

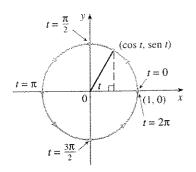


FIGURA 4

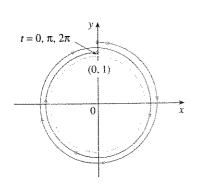


FIGURA 5

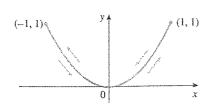
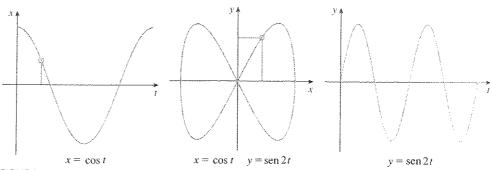


FIGURA 6



#### FIGURA 7

#### Aparelhos Gráficos

A maioria das calculadoras gráficas e dos programas gráficos computacionais pode ser usada para plotar as curvas definidas por equações paramétricas. De fato, é instrutivo olhar uma curva paramétrica sendo desenhada por uma calculadora gráfica, porque os pontos são plotados na ordem em que os valores do parâmetro correspondente aumentam.

EXEMPLO 5  $\Box$  Use um dispositivo gráfico para plotar a curva  $x = y^4 - 3y^2$ .

SOLUÇÃO Se fizermos o parâmetro ser t=y, então temos as equações

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando essas equações paramétricas para plotar a curva, obtemos a Figura 8. Seria possível resolver a equação dada  $(x = y^4 - 3y^2)$  para y como quatro funções de x e plotá-las individualmente, mas as equações paramétricas fornecem um método muito mais fácil.

Em geral, se precisarmos plotar uma equação do tipo x = g(y), poderemos usar as equações paramétricas

$$x = g(t)$$
  $y = t$ 

Note também que curvas com equações y = f(x) (aquelas com as quais estamos mais familiarizados – os gráficos de funções) também podem ser consideradas como curvas com equações paramétricas

$$x = t$$
  $y = f(t)$ 

Dispositivos gráficos são particularmente úteis quando esboçamos curvas complicadas. Por exemplo, seria virtualmente impossível produzir manualmente as curvas mostradas nas Figuras 9 e 10.

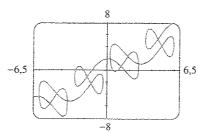


FIGURA 9  $x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$ ,  $y = t + 2 \operatorname{cos} 5t$  $-2\pi \le t \le 2\pi$ 

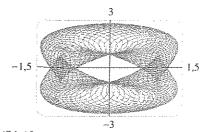


FIGURA 10  $x = \cos t - \cos 80t \sin t$ ,  $y = 2 \sin t - \sin 80t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ 

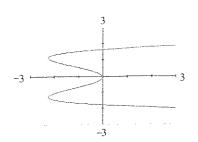


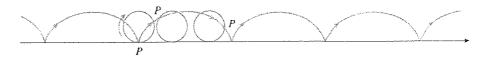
FIGURA 8

Um dos usos mais importantes das curvas paramétricas está no Computer-Aided Design (CAD). No Projeto de Laboratório depois da Seção 10.2, investigaremos as curvas paramétricas especiais, chamadas **curvas de Bézier**, que são usadas amplamente na produção, especialmente na indústria automobilística. Essas curvas também são empregadas na especificação de formatos de letras e outros símbolos em impressoras a laser.

#### A Ciclóide

EXEMPLO 6  $\supset$  A curva traçada pelo ponto P na circunferência de um círculo quando o círculo rola ao longo de uma linha reta é chamada **ciclóide** (veja a Figura 10). Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo do eixo x e se uma posição de P é a origem, encontre as equações paramétricas para a ciclóide.

FIGURA 11



SOLUÇÃO Escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação  $\theta$  do círculo ( $\theta=0$  quando P está na origem). Suponha que o círculo foi rotacionado por  $\theta$  radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Figura 12 que a distância girada a partir da origem é

$$|OT| = \operatorname{arc} PT = r\theta$$

Dessa forma, o centro do círculo será  $C(r\theta, r)$ . Sejam as coordenadas de P(x, y). Então a partir da Figura 12 vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Portanto as equações paramétricas da ciclóide são

$$x = r(\theta - \sin \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Um arco da ciclóide surge a partir de uma rotação do círculo e, assim, é descrito por  $0 \le \theta \le 2\pi$ . Embora as Equações 1 tenham sido derivadas a partir da Figura 12, que ilustra o caso onde  $0 < \theta < \pi/2$ , pode ser visto que essas equações ainda são válidas para outros valores de  $\theta$  (veja o Exercício 37).

Ainda que seja possível eliminar o parâmetro  $\theta$  das Equações 1, a equação cartesiana resultante em x e y é muito complicada e não é conveniente para trabalhar como as equações paramétricas.

Uma das primeiras pessoas a estudar a ciclóide foi Galileu, que propôs que pontes podem ser construídas no formato de ciclóides e que tentou encontrar a área sob um arco de uma ciclóide. Mais tarde essa curva apareceu em conexão com o problema da braquistócrona: encontre a curva ao longo da qual uma partícula deslizará no tempo mais curto (sob a influência da gravidade) a partir do ponto A até um ponto mais baixo B não diretamente abaixo de A. O matemático suíço John Bernoulli, que apresentou esse problema em 1696, mostrou que entre todas as curvas possíveis que ligam A e B, como na Figura 13, a partícula levará o menor tempo deslizando de A até B se a curva for um arco invertido de uma ciclóide.

O físico holandês Huygens já tinha mostrado que a ciclóide é também a solução para o problema da tautócrona; isto é, não importa onde a partícula P seja colocada em uma ciclóide invertida, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo (veja a Figura 14).

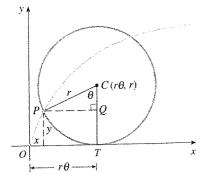


FIGURA 12

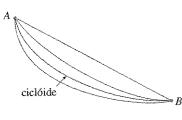


FIGURA 13

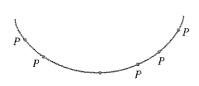


FIGURA 14

65

Huygens propôs que o pêndulo de relógio (que ele inventou) deveria oscilar em um arco cicloidal, porque então ele levaria o mesmo tempo para fazer uma oscilação completa por um arco maior ou menor.

#### Famílias de Curvas Paramétricas

EXEMPLO 7 

Investigue a família de curvas com equações paramétricas

$$x = a + \cos t$$
  $y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$ 

O que essas curvas têm em comum? Como muda o formato quando a aumenta?

SOLUÇÃO Usamos um dispositivo gráfico para produzir os gráficos para os casos  $a=-2,\,-1,\,-0.5,\,-0.2,\,0,\,0.5,\,1$  e 2 mostrados na Figura 15. Note que todas essas curvas (exceto no caso a=0) têm dois ramos e ambos se aproximam da assíntota vertical x=a quando x se aproxima de a a partir da esquerda ou da direita.

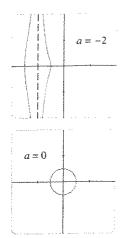
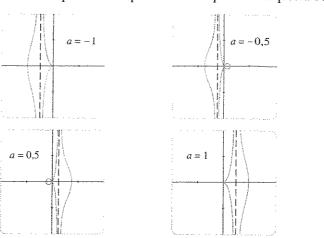
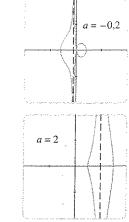


FIGURA 15 Membros da família  $x = a + \cos t$ ,  $y = a \operatorname{tg} t + \sin t$ , todos plotados na janela retangular [-4, 4] por [-4, 4].





wy

Quando a < -1, ambos os ramos são suaves; mas quando a se aproxima de -1, o ramo direito adquire um formato pontudo, chamado cúspide. Para a entre -1 e 0 a cúspide se torna um laço, que se torna maior quando a se aproxima de 0. Quando a = 0, ambos os ramos se juntam e formam um círculo (veja o Exemplo 2). Para a entre 0 e 1, o ramo esquerdo tem um laço, que se encolhe para se tornar uma cúspide quando a = 1. Para a > 1, os ramos se tornam suaves novamente e, quando a aumenta mais ainda, eles se tornam menos curvados. Note que as curvas com a positivo são reflexões ao redor do eixo a0 das curvas correspondentes com a1 negativo.

Essas curvas são denominadas de **conchóides de Nicomedes**, em homenagem ao antigo estudioso grego Nicomedes. Ele as chamou de conchóides porque o formato de seus ramos externos lembram uma concha.

# 10.1 Exercícios

1-4

Esboce a curva usando as equações paramétricas para plotar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

1. 
$$x = 1 + \sqrt{t}$$
,  $y = t^2 - 4t$ ,  $0 \le t \le 5$ 

2. 
$$x = 2 \cos t$$
,  $y = t - \cos t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ 

3. 
$$x = 5 \operatorname{sen} t$$
,  $y = t^2$ ,  $-\pi \le t \le \pi$   
4.  $x = e^{-t} + t$ ,  $y = e^t - t$ ,  $-2 \le t \le 2$ 

5-10 O

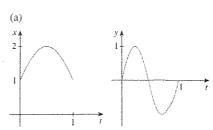
(a) Esboce a curva usando as equações paramétricas para plotar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

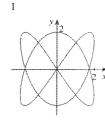
#### 652 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

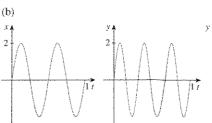
- (b) Elímine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva
- 5. x = 3t 5, y = 2t + 1
- **6.** x = 1 + t, y = 5 2t,  $-2 \le t \le 3$
- 7.  $x = t^2 2$ , y = 5 2t,  $-3 \le t \le 4$
- 8. x = 1 + 3t,  $y = 2 t^2$
- **9.**  $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 t$
- 10.  $x = t^2$ ,  $y = t^3$
- 3 2 2 2 4 4 4 4 4 7

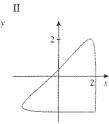
11-18

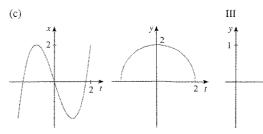
- (a) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.
- (b) Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.
- 11.  $x = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$ ,  $0 \le \theta \le \pi$
- 12.  $x = 4 \cos \theta$ ,  $y = 5 \sin \theta$ ,  $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
- **13.**  $x = \sin^2 \theta$ ,  $y = \cos^2 \theta$
- 14.  $x = \sec \theta$ ,  $y = \operatorname{tg} \theta$   $-\pi/2 < \theta < \pi/2$
- **15.** x = e',  $y = e^{-t}$
- **16.**  $x = \ln t$ ,  $y = \sqrt{t}$ ,  $t \ge 1$
- 17.  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$
- **18.**  $x = 1 + \cos \theta$ ,  $y = 2 \cos \theta 1$
- 19-22  $\Box$  Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) quando t varia no intervalo dado.
- **19.**  $x = \cos \pi t$ ,  $y = \sin \pi t$ ,  $1 \le t \le 2$
- **20.**  $x = 2 + \cos t$ ,  $y = 3 + \sin t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$
- **21.**  $x = 2 \sin t$ ,  $y = 3 \cos t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$
- **22.**  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \cos t$ ,  $0 \le t \le 4\pi$
- 23. Suponha que uma curva seja dada pela equação paramétrica
- x = f(t), y = g(t) onde a imagem de  $f \in [1, 4]$  e a imagem de  $g \in [2, 3]$ . O que você pode dizer sobre a curva?
- **24.** Associe os gráficos das equações paramétricas x = f(t) e y = g(t) em (a)–(d) com as curvas paramétricas rotuladas de I-IV. Dê razões para as suas escolhas.

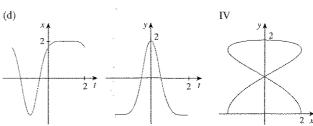




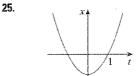


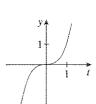


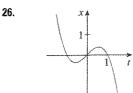


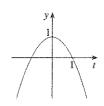


**25–27**  $\square$  Use os gráficos de x = f(t) e y = g(t) para adivinhar as curvas paramétricas x = f(t) e y = g(t). Indique com setas a direção na qual a curva é traçada à medida que t aumenta.

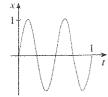


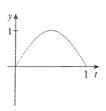






27.





28. Ligue as equações paramétricas aos gráficos de I-VI. Justifique sua escolha. (Não use um dispositivo gráfico.)

(a) 
$$x = t^3 - 2t$$
,  $y = t^2 - t$   
(b)  $x = t^3 - 1$ ,  $y = 2 - t^2$ 

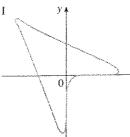
(b) 
$$x = t^3 - 1$$
,  $y = 2 - t^2$ 

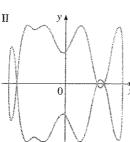
(c) 
$$x = \sin 3t$$
,  $y = \sin 4t$ 

(d) 
$$x = t + \sin 2t$$
,  $y = t + \sin 3t$ 

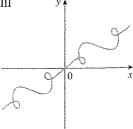
(e) 
$$x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t)$$
,  $y = \cos(t + \cos t)$ 

(f) 
$$x = \cos t$$
,  $y = \sin(t + \sin 5t)$ 

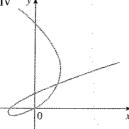


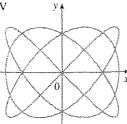


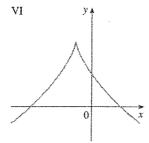
m



IV







**29.** Plote a curva 
$$x = y - 3y^3 + y^5$$
.

**30.** Plote as curvas 
$$y = x^5$$
 e  $x = y(y - 1)^2$  e encontre seus pontos de interseção, com precisão de uma casa decimal.

31. (a) Mostre que as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
  $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$   
onde  $0 \le t \le 1$  descrevem o segmento de reta que une os  
pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ .

(b) Encontre as equações paramétricas para representar o segmento de reta de (-2, 7) até (3, -1).

32. Usando um dispositivos gráfico e o resultado do Exercício 31(a), desenhe o triângulo com vértices A(1, 1), B(4, 2) e C(1, 5).

33. Encontre as equações paramétricas para a trajetória de uma partícula que se move ao longo do círculo  $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ da seguinte maneira:

(a) Uma vez no sentido horário, a partir de (2, 1).

(b) Três vezes no sentido anti-horário, a partir de (2, 1).

(c) Meia-volta no sentido anti-horário, a partir de (0, 3).

34. Plote o semicírculo traçado pela partícula no Exercício 33(c).

35. (a) Encontre equações paramétricas para a elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . [Dica: Modifique as equações de um

círculo no Exemplo 2.] (b) Use as equações paramétricas para plotar a elipse quando a = 3 e b = 1, 2, 4 e 8.

(c) Como muda o formato da elipse quando b varia?

36. Encontre três conjuntos diferentes de equações paramétricas para representar a curva  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

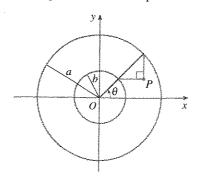
37. Derive as Equações 1 para o caso  $\pi/2 < \theta < \pi$ .

38. Seja P um ponto a uma distância d do centro de um círculo de raio r. A curva traçada por P quando o círculo se move ao longo de uma linha reta é chamada trocóide. (Pense no movimento de um ponto sobre um raio de uma roda de bicicleta.) A ciclóide é um caso especial de trocóide com d=r. Usando o mesmo parâmetro  $\theta$  para a ciclóide e presumindo que a reta seja o eixo  $x \in \theta = 0$  quando P está em um de seus pontos mais baixos, mostre que as equações paramétricas para a trocóide são

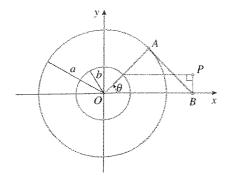
$$x = r\theta - d \sin \theta$$
  $y = r - d \cos \theta$ 

Esboce a trocóide para os casos d < r e d > r.

39. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P determinados, como mostrado na figura, usando o ângulo  $\theta$  como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva.



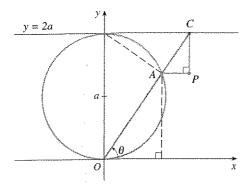
40. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P determinados, como mostrado na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. O segmento de reta AB é tangente ao círculo maior.



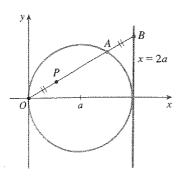
41. Uma curva, denominada bruxa de Maria Agnesi, consiste em todos os pontos P determinados, como apresentado na figura. Mostre que equações paramétricas para essa curva podem ser escritas como

$$x = 2a \cot \theta$$
  $y = 2a \sin^2 \theta$ 

Esboce a curva.



42. Encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P determinados, como mostrado na figura, tal que | OP | = |AB|. Esboce a curva. (Essa curva é chamada cissóide de Diocles, em homenagem ao estudioso grego Diocles, que introduziu a cissóide como um método gráfico para a construção do vértice de um cubo cujo volume é o dobro daquele do cubo dado.)



**43.** Suponha que a posição de uma partícula no tempo *t* seja dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t$$
  $y_1 = 2 \operatorname{cos} t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

e a posição de uma segunda partícula seja dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

- (a) Plote as trajetórias de ambas as partículas. Quantos pontos de interseção existem?
- (b) Alguns desses pontos de interseção são pontos de colisão? Em outras palavras, essas partículas alguma vez estão no mesmo lugar ao mesmo tempo? Se isso ocorrer, encontre os pontos de colisão.
- (c) Descreva o que acontecerá se a trajetória da segunda partícula for dada por

$$x_2 = 3 + \cos t$$
  $y_2 = 1 + \sin t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

**44.** Se um projétil for atirado com uma velocidade inicial  $v_0$  metros por segundo com um ângulo  $\alpha$  acima da horizontal e a resistência do ar for considerada desprezível, então sua posição depois de t segundos é dada pelas equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t$$
  $y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ 

onde g é a aceleração da gravidade (9,8 m/s<sup>2</sup>).

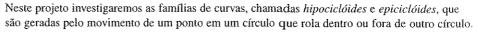
- (a) Se uma arma for disparada com  $\alpha = 30^{\circ}$  e  $v_0 = 500$  m/s, quando a bala atingirá o solo? A que distância da arma a bala atingirá o solo? Qual a altura máxima alcançada pela bala?
- (b) Use um dispositivo gráfico para verificar suas respostas na parte (a). Então plote a trajetória do projétil para vários outros valores do ângulo α para ver onde a bala atinge o solo. Resuma o que você encontrou.
- (c) Mostre que a trajetória é parabólica, eliminando o parâmetro.
- Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas  $x = t^2$ ,  $y = t^3 ct$ . Como muda o formato quando c aumenta? Ilustre, plotando vários membros da família.
- 46. As curvas de catástrofe em forma de cauda de andorinha são definidas pelas equações paramétricas  $x = 2ct 4t^3$ ,  $y = -ct^2 + 3t^4$ . Plote várias dessas curvas. Quais as características que essas curvas têm em comum? Como elas variam quando c aumenta?
- As curvas com equações x = a sen nt, y = b cos t são chamadas **figuras de Lissajous**. Investigue como essas curvas mudam quando a, b e n variam. (Tome n como um inteiro positivo.)
- **48.** Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas

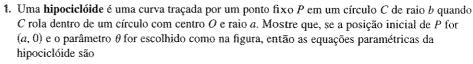
$$x = \operatorname{sen} t (c - \operatorname{sen} t)$$
  $y = \cos t (c - \operatorname{sen} t)$ 

Como muda o formato quando c varia? Em particular, você deveria identificar os valores de transição de c para os quais o formato básico da curva muda.

#### Projeto de Laboratório

#### Rolando Círculos ao Redor de Círculos





$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a - b}{b}\theta\right)$$
  $y = (a - b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a - b}{b}\theta\right)$ 

2. Use um dispositivo gráfico para desenhar os gráficos de hipociclóides com a um inteiro positivo e b = 1. Como o valor de a afeta o gráfico? Mostre que, se tomarmos a = 4, então as equações paramétricas da hipociclóide se reduzirão a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\sin^3\theta$$

Essa curva é denominada hipociclóide de quatro cúspides, ou astróide.

- 3. Agora tente b = 1 e a = n/d, uma fração onde n e d não têm fator comum. Primeiro faça n = 1 e tente determinar graficamente o efeito do denominador d no formato do gráfico. Então faça n variar mantendo d constante. O que acontece quando n = d + 1?
- **4.** O que acontece se b=1 e a for irracional? Experimente com um número irracional do tipo  $\sqrt{2}$  ou e-2. Tome valores cada vez maiores para  $\theta$  e conjecture sobre o que deveria acontecer se plotássemos a hipociclóide para todos os valores reais de  $\theta$ .
- 5. Se o círculo C rolar do lado de fora de um círculo fixo, a curva traçada por P será dita epiciclóide. Encontre equações paramétricas para a epiciclóide.
- 6. Investigue os possíveis formatos para a epiciclóide. Use métodos similares aos Problemas 2-4.

# 10.2

(a, 0)

#### Cálculo com Curvas Paramétricas

Tendo visto como representar as curvas por equações paramétricas, vamos agora aplicar os métodos de cálculo nessas curvas paramétricas. Em particular, vamos resolver os problemas envolvendo tangentes, área, arco e superfície de área.



#### **Tangentes**

Na seção anterior, vimos que algumas curvas definidas por equações paramétricas x = f(t) e y = g(t) podem também ser expressas pela eliminação do parâmetro na forma y = F(x). (Veja o Exercício 67 para as condições gerais sob as quais isso é possível.) Se substituirmos x = f(t) e y = g(t) na equação y = F(x), obteremos

$$g(t) = F(f(t))$$

assim, se g, F e f forem diferenciáveis, a Regra da Cadeia fornece

$$q'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$$

Note que  $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{2}}$ 

Se  $f'(t) \neq 0$ , podemos resolver para F'(x):

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Como a inclinação da tangente à curva y = F(x) em (x, F(x)) é F'(x), a Equação 1 nos permite encontrar tangentes a curvas paramétricas sem ter de eliminar o parâmetro. Usando a notação de Leibniz podemos reescrever a Equação 1 de uma maneira fácil de lembrar:

Se pensarmos em uma curva paramétrica sendo traçada pelo movimento de uma partícula, então 
$$dy/dt$$
 e  $dx/dt$  são as velocidades vertical e horizontal da partícula e a Fórmula 2 diz que a inclinação da tangente é a razão dessas velocidades.

Podemos ver da Equação 2 que a curva tem uma tangente horizontal quando dy/dt = 0 (desde que  $dx/dt \neq 0$ ) e tem uma tangente vertical quando dx/dt = 0 (desde que  $dy/dt \neq 0$ ). Essa informação é útil para esboçar as curvas paramétricas.

Como sabemos do Capítulo 4, é também útil considerar  $d^2y/dx^2$ . Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na Equação 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

 $\frac{1}{dt}$ 

EXEMPLO 1  $\Box$  Uma curva C é definida pelas equações paramétricas  $x = t^2$  e  $y = t^3 - 3t$ .

(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto (3, 0) e encontre suas equações.(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade se encontra para cima ou para baixo.

(d) Esboce a curva.

**SOLUÇÃO** 

(a) Note que  $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$  quando t = 0 ou  $t = \pm \sqrt{3}$ . Portanto, o ponto (3, 0) em C surge de dois valores do parâmetro,  $t = \sqrt{3}$  e  $t = -\sqrt{3}$ . Isso indica que C intercepta ele mesmo em (3, 0). Como

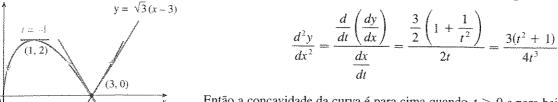
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$$

a inclinação da tangente quando  $t = \pm \sqrt{3}$  é  $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm \sqrt{3}$ ; assim, as equações das tangentes em (3, 0) são

$$y = \sqrt{3}(x - 3)$$
 e  $y = -\sqrt{3}(x - 3)$ 

(b) C tem uma tangente horizontal quando dy/dx = 0 isto é, quando dy/dt = 0 e  $dx/dt \neq 0$ . Uma vez que  $dy/dt = 3t^2 - 3$ , isso é apropriado quando  $t^2 = 1$ , isto é  $t = \pm 1$ . Os pontos correspondentes em C são (1, -2) e (1, 2). C tem uma tangente vertical quando dx/dt = 2t = 0, isto é, t = 0. (Aqui, note que  $dy/dt \neq 0$ .) O ponto correspondente em C é (0, 0).

(c) Para determinar a concavidade, calculamos a derivada segunda:



Então a concavidade da curva é para cima quando t > 0 e para baixo quando t < 0.

(d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboçamos C na Figura 1.

#### EXEMPLO 2 [

- (a) Encontre a tangente para a ciclóide  $x = r(\theta \sin \theta)$ ,  $y = r(1 \cos \theta)$ , no ponto onde  $\theta = \pi/3$ . (Veja o Exemplo 6 na Seção 10.1.)
- (b) Em que ponto a tangente é horizontal? Quando é vertical?

#### SOLUÇÃO

FIGURA 1

(a) A inclinação da reta tangente é

(a) 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r \sin \theta}{r(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

Quando  $\theta = \pi/3$ , temos

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Portanto, a inclinação da tangente é  $\sqrt{3}$  e sua equação é

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3} \left( x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2} \right)$$
 ou  $\sqrt{3} x - y = r \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 \right)$ 

A tangente está esboçada na Figura 2.

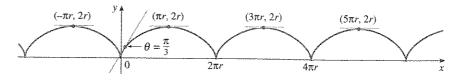


FIGURA 2

(b) A tangente é horizontal quando dy/dx=0, o que ocorre quando sen  $\theta=0$  e  $1-\cos\theta\neq 0$ , isto é,  $\theta=(2n-1)\pi$ , n um inteiro. O ponto correspondente na ciclóide é  $((2n-1)\pi r,2r)$ .

Quando  $\theta = 2n\pi$ , tanto  $dx/d\theta$  e  $dy/d\theta$  são 0. A partir do gráfico parece que as tangentes verticais estão naqueles pontos. Podemos verificar isso usando a Regra de L'Hôspital, como a seguir:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \infty$$

Um cálculo similar mostra que  $dy/dx \to -\infty$  quando  $\theta \to 2n\pi^-$ ; assim, realmente existem tangentes verticais quando  $\theta = 2n\pi$ , isto é, quando  $x = 2n\pi r$ .

#### Áreas

Sabemos que a área sob uma curva y = F(x) de a até b é  $A = \int_a^b F(x) \, dx$ , onde  $F(x) \ge 0$ . Se a curva for dada por equações paramétricas x = f(t), y = g(t) e for percorrida quando t aumenta de  $\alpha$  para  $\beta$ , então podemos adaptar a fórmula anterior usando a Regra da Substituição para Integrais Definidas como a seguir:

$$A = \int_a^b y \, dx = \int_a^\beta g(t) f'(t) \, dt$$

$$\left[ \text{ ou } \int_{\beta}^{\alpha} g(t)f'(t) dt \text{ se } (f(\beta), g(\beta)) \text{ for o extremo esquerdo} \right]$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Encontre a área sob um arco da ciclóide  $x = r(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = r(1 - \cos \theta)$ . (Veja a Figura 3.)

SOLUÇÃO Um arco da ciclóide é dado por  $0 \le \theta \le 2\pi$ . Usando a Regra da Substituição com  $y = r(1 - \cos \theta)$  e  $dx = r(1 - \cos \theta) d\theta$ , temos

$$A = \int_0^{2\pi r} y \, dx = \int_0^{2\pi} r (1 - \cos \theta) r (1 - \cos \theta) \, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[ 1 - 2\cos \theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] \, d\theta$$

$$= r^2 \left[ \frac{3}{2} \theta - 2\sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2 \left( \frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) = 3\pi r^2$$



FIGURA 3

☐ O resultado do Exemplo 3 diz que a área sob um arco da ciclóide é três vezes a área do circulo que rola e gera a ciclóide (veja o Exemplo 6 na Seção 10.1). Galileu estimou esse resultado, mas, primeiro, este foi provado pelos matemáticos francês, Roberval, e italiano, Torricelli.

#### Comprimento de Arco

Já sabemos como encontrar o comprimento L de uma curva C dada na forma y = F(x),  $a \le x \le b$ , A Fórmula 8.1.3, no Volume I, diz que, se F' for contínua, então

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

Suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas x=f(t) e y=g(t),  $\alpha \le t \le \beta$ , onde dx/dt=f'(t)>0. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$  e  $f(\alpha)=a$ ,  $f(\beta)=b$ . Colocando a Fórmula 2 na Fórmula 3 e usando a Regra da Substituição, obtemos

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} dx = \int_{a}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^{2}} \frac{dx}{dt} dt$$

659

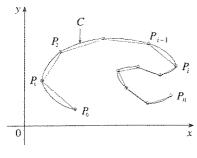


FIGURA 4

Como dx/dt > 0, temos

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Mesmo que C não possa ser expressa na forma y = F(x), a Fórmula 4 ainda é válida, mas a obtemos por polígonos de aproximação. Dividimos o intervalo do parâmetro  $[\alpha, \beta]$  em n subintervalos de comprimentos iguais  $\Delta t$ . Se  $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$  forem os extremos desses subintervalos, então  $x_i = f(t_i)$  e  $y_i = g(t_i)$  são as coordenadas dos pontos  $P_i(x_i, y_i)$  que estão em C e o polígono com vértices  $P_0, P_1, \ldots, P_n$  aproxima C (veja a Figura 4).

Como na Seção 8.1 do Volume I, definimos o comprimento L de C como o limite dos comprimentos desses polígonos aproximadores quando  $n \to \infty$ ;

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

O Teorema do Valor Médio, quando aplicado a f no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , fornece um número  $t_i^*$  em  $(t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Se fizermos  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  e  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ , essa equação torna-se

$$\Delta x_i = f'(t_i^*) \, \Delta t$$

Similarmente, quando aplicado a g, o Teorema do Valor Médio fornece um número  $t_i^{**}$  em  $(t_{i-1}, t_i)$  de forma que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**}) \Delta t$$

Portanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2}$$

$$= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2} \Delta t$$

e assim

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2} \Delta t$$

A soma em (5) se parece com a de Riemann para a função  $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ , contudo, não é exatamente uma soma de Riemann, porque  $t_i^* \neq t_i^{**}$  em geral. Mesmo assim, se f' e g' forem contínuas, pode ser mostrado que o limite em (5) é o mesmo que se  $t_i^*$  e  $t_i^{**}$  fossem iguais; a saber,

$$L = \int_{a}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^{2} + [g'(t)]^{2}} dt$$

Então, usando a notação de Leibniz, temos o seguinte resultado, que possui a mesma forma de (4).

[6] Teorema Se uma curva C for descrita pelas equações paramétricas x=f(t), y=g(t),  $\alpha \le t \le \beta$ , onde f' e g' são contínuas em  $[\alpha,\beta]$  e C for percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$ , então o comprimento de C é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Note que a fórmula no Teorema 6 é consistente com as fórmulas gerais  $L = \int ds$  e  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  da Seção 8.1 do Volume I.

**EXEMPLO** 4 Se usarmos a representação do círculo unitário dada no Exemplo 2 na Seção 10.1,

$$x = \cos t$$
  $y = \sin t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

então  $dx/dt = -\sin t$  e  $dy/dt = \cos t$ ; assim, o Teorema 6 fornece

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como o esperado. Se, por outro lado, utilizarmos a representação dada no Exemplo 3 na Seção 10.1,

$$x = \text{sen } 2t$$
  $y = \cos 2t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

então  $dx/dt = 2\cos 2t$ ,  $dy/dt = -2\sin 2t$  e a integral do Teorema 6 fornece

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi$$

Note que a integral fornece o dobro do comprimento do arco do círculo, porque t aumenta de 0 até 2π, o ponto (sen 2t, cos 2t) percorre o círculo duas vezes. Em geral, ao encontrarmos o comprimento da curva C a partir de uma representação paramétrica, temos de tomar cuidado para ter a certeza de que C é percorrida apenas uma vez quando t aumenta de α até β.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Encontre o comprimento de um arco da ciclóide  $x = r(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = r(1 - \cos \theta)$ .

SOLUÇÃO Do Exemplo 3 vemos que um arco é descrito pelo intervalo paramétrico  $0 \le \theta \le 2\pi$ . Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta)$$
 e  $\frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta$ 

temos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (1 - \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta$$

Para avaliar essa integral, usamos a identidade  $\sec^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cos \theta = 2x$ , que fornece  $1 - \cos \theta = 2 \sec^2(\theta/2)$ . Como  $0 \le \theta \le 2\pi$ , temos  $0 \le \theta/2 \le \pi$ , e assim  $\sec(\theta/2) \ge 0$ . Portanto

☐ O resultado do Exemplo 5 diz que o comprimento de um arco de uma ciclóide é oito vezes o raio do círculo gerador (veja a Figura 5). Isso foi primeiramente provado em 1658 por sir Christopher Wren, que depois se tornou o arquiteto da Catedral de São Paulo, em Londres.

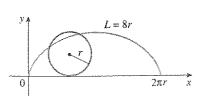


FIGURA 5

$$\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \sqrt{4\,\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\operatorname{sen}(\theta/2)\right| = 2\,\operatorname{sen}(\theta/2)$$

e dessa forma

$$L = 2r \int_0^{2\pi} \sec(\theta/2) d\theta = 2r [-2\cos(\theta/2)]_0^{2\pi}$$
$$= 2r[2+2] = 8r$$

#### Área da Superfície

Da mesma maneira como para o comprimento do arco, podemos adaptar a Fórmula 8.2.5 (do Volume I) para obter uma fórmula para a área da superfície. Se a curva dada pelas equações paramétricas x = f(t), y = g(t),  $\alpha \le t \le \beta$  girar ao redor do eixo x, onde f', g' são contínuas e  $g(t) \ge 0$ , então a área da superfície resultante é dada por

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

As fórmulas simbólicas gerais  $S = \int 2\pi y \, ds$  e  $S = \int 2\pi x \, ds$  (Fórmulas 8.2.7 e 8.2.8 do Volume I) ainda são válidas, mas para as curvas paramétricas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

EXEMPLO 6  $\Box$  Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio  $r \in 4\pi r^2$ .

SOLUÇÃO A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r \cos t$$
  $y = r \sin t$   $0 \le t \le \pi$ 

ao redor do eixo x. Portanto, a partir da Fórmula 7, temos

$$S = \int_0^{\pi} 2\pi r \sec t \sqrt{(-r \sec t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} r \sec t \sqrt{r^2 (\sec^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} r \sec t \cdot r dt = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sec t dt$$

$$= 2\pi r^2 (-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 4\pi r^2$$

# 10.2 Exercícios

1-2  $\square$  Encontre dy/dx.

1. 
$$x = t - t^3$$
,  $y = 2 - 5t$ 

**2.** 
$$x = te^{t}$$
,  $y = t + e^{t}$ 

3-6 
Encontre uma equação da tangente à curva no ponto correspondente ao valor do parâmetro dado.

3. 
$$x = t^4 + 1$$
,  $y = t^3 + t$ ;  $t = -1$ 

4. 
$$x = 2t^2 + 1$$
,  $y = \frac{1}{3}t^3 - t$ ;  $t = 3$ 

**5.** 
$$x = e^{\sqrt{t}}, y = t - \ln t^2; t = 1$$

**6.** 
$$x = \cos \theta + \sin 2\theta$$
,  $y = \sin \theta + \cos 2\theta$ ,  $\theta = 0$ 

7-8 □ Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado por dois métodos: (a) sem eliminar o parâmetro e (b) primeiro eliminando o parâmetro.

7. 
$$x = e^t$$
,  $y = (t - 1)^2$ ; (1.1)

**8.** 
$$x = \operatorname{tg} \theta$$
,  $y = \sec \theta$ ;  $(1, \sqrt{2})$ 

\$ 2 8 4 7 8 z 9-10 □ Encontre uma equação da(s) tangente(s) à curva no ponto dado. Então plote a curva e a(s) tangente(s).

**9.** 
$$x = 2 \text{ sen } 2t$$
,  $y = 2 \text{ sen } t$ ;  $(\sqrt{3}, 1)$ 

**10.** 
$$x = \text{sen } t$$
,  $y = \text{sen}(t + \text{sen } t)$ ;  $(0, 0)$ 

\$ % B G G C 4 3 11-16  $\Box$  Ache dy/dx e  $d^2y/dx^2$ . Para quais valores de t a curva é côncava para cima?

11. 
$$x = 4 + t^2$$
,  $y = t^2 + t^3$  12.  $x = t^3 - 12t$ ,  $y = t^2 - 1$ 

**12.** 
$$x = t^3 - 12t$$
,  $y = t^2 - 1$ 

**13.** 
$$x = t - e^t$$
,  $y = t + e^{-t}$  **14.**  $x$ 

**14.** 
$$x = t + \ln t$$
,  $y = t - \ln t$ 

**15.** 
$$x = 2 \sin t$$
,  $y = 3 \cos t$ ,  $0 < t < 2\pi$ 

**16.** 
$$x = \cos 2t$$
,  $y = \cos t$ ,  $0 < t < \pi$ 

2 2 2 2 2 2 5 5 8 6 8 0 A 17-20 Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical. Se você tem um dispositivo gráfico, plote a curva.

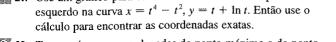
17. 
$$x = 10 - t^2$$
,  $y = t^3 - 12t$ 

**18.** 
$$x = 2t^3 + 3t^2 - 12t$$
,  $y = 2t^3 + 3t^2 + 1$ 

19. 
$$x = 2 \cos \theta$$
,  $y = \sin 2\theta$ 

**20.** 
$$x = \cos 3\theta$$
,  $y = 2 \sin \theta$ 

21. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto extremo



22. Tente estimar as coordenadas do ponto máximo e do ponto extremo esquerdo na curva  $x = te^{t}$ ,  $y = te^{-t}$ . Então encontre as coordenadas exatas. Quais são as assíntotas dessa curva?

🔏 23-24 🗆 Plote a curva em um visor retangular que mostre todos os aspectos importantes da curva.

**23.** 
$$x = t^4 - 2t^3 - 2t^2$$
,  $y = t^3 - t$ 

**24.** 
$$x = t^4 + 4t^3 - 8t^2$$
,  $y = 2t^2 - t$ 

**25.** Mostre que a curva  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t \cos t$  tem duas tangentes em (0, 0) e encontre suas equações. Esboce a curva.

**26.** Em que ponto a curva  $x = 1 - 2\cos^2 t$ ,  $y = (tg t)(1 - 2 cos^2 t)$  intercepta ela mesma? Encontre as equações de ambas as tangentes naquele ponto.

27. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocóide  $x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta$ ,  $y = r - d \operatorname{cos} \theta$  em termos de  $\theta$ . (Veja o Exercício 38 na Seção 10.1.)

(b) Mostre que, se d < r, então a trocóide não tem uma tangente vertical.

28. (a) Encontre a inclinação da tangente à astróide  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \operatorname{sen}^3 \theta$  em termos de  $\theta$ . (As astróides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 653.)

(b) Em que pontos a tangente é horizontal ou vertical?

(c) Em que pontos a tangente tem inclinação 1 ou −1?

**29.** Em que pontos na curva  $x = t^3 + 4t$ ,  $y = 6t^2$  a tangente é paralela à reta com equações x = -7t, y = 12t - 5?

**30.** Encontre as equações das tangentes à curva  $x = 3t^2 + 1$ ,  $y = 2t^3 + 1$  que passam pelo ponto (4, 3).

**31**. Use as equações paramétricas de uma elipse,  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \operatorname{sen} \theta$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ , para calcular a área limitada por essas curvas.

32. Calcule a área limitada pela curva x = t - 1/t, y = t + 1/te a reta y = 2.5.

33. Encontre a área limitada pela curva  $x = \cos t$ ,  $y = e^t$ ,  $0 \le t \le \pi/2$  e as retas y = 1 e x = 0.

**34.** Calcule a área da região limitada pela astróide  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \operatorname{sen}^3 \theta$ . (As astróides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 653.)

35. Encontre a área sob um arco da trocóide do Exercício 38 na Seção 10.1 para o caso d < r.

36. Seja  ${\mathcal R}$  a região dentro do laço da curva no Exemplo 1.

(a) Calcule a área de R.

(b) Se  $\Re$  girar ao redor do eixo x, encontre o volume do sólido resultante.

(c) Encontre o centróide de R.

37-48 🗆 Monte, mas não avalie, uma integral que represente o comprimento da curva.

**37.** 
$$x = t - t^2$$
,  $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$ ,  $1 \le t \le 2$ 

**38.** 
$$x = 1 + e^t$$
,  $y = t^2$ ,  $-3 \le t \le 3$ 

**39.** 
$$x = t + \cos t$$
,  $y = t - \sin t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ 

**40.** 
$$x = \ln t$$
,  $y = \sqrt{t+1}$ ,  $1 \le t \le 5$ 

41-44 □ Calcule o comprimento da curva.

**41.** 
$$x = 1 + 3t^2$$
,  $y = 4 + 2t^3$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**42.**  $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$ ,  $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ ,

**43.** 
$$x = \frac{t}{1+t}$$
,  $y = \ln(1+t)$ ,  $0 \le t \le 2$ 

**44.** 
$$x = e^t + e^{-t}$$
,  $y = 5 - 2t$ ,  $0 \le t \le 3$ 

45–47 □ Plote a curva e calcule seu comprimento.

5 Z R O 2 M 5 2

**45.**  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $0 \le t \le \pi$ 

**46.**  $x = \cos t + \ln(tg^{\frac{1}{2}}t)$ ,  $y = \sin t$ ,  $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$ 

**47.**  $x = e^t - t$ ,  $y = 4e^{t/2}$ ,  $-8 \le t \le 3$ 

= 2 5 4 6 2 5 d **48.** Ache o comprimento do laço da curva  $x = 3t - t^3$ ,  $y = 3t^2$ .

**49.** Use a Regra de Simpson com n = 6 para estimar o comprimento da curva  $x = t - e^t$ ,  $y = t + e^t$ ,  $-6 \le t \le 6$ .

50. No Exercício 41 na Seção 10.1 foi pedido para você derivar as equações paramétricas x = 2a co-tg  $\theta$ , y = 2a sen<sup>2</sup> $\theta$ para a curva chamada bruxa de Maria Agnesi. Use a Regra de Simpson com n = 4 para estimar o comprimento do arco dessa curva dada por  $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ .

51-52  $\Box$  Encontre a distância percorrida por uma partícula com posição (x, y) quando t varia em um dado intervalo de tempo. Compare com o comprimento da curva.

**51.** 
$$x = \sin^2 t$$
,  $y = \cos^2 t$ ,  $0 \le 1 \le 3\pi$ 

**52.** 
$$x = \cos^2 t$$
,  $y = \cos t$ ,  $0 \le t \le 4\pi$ 

53. Mostre que o comprimento total da elipse  $x = a \operatorname{sen} \theta$ ,  $y = b \cos \theta$ , a > b > 0, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, d\theta$$

onde e é a excentricidade da elipse (e = c/a), onde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

- **54.** Calcule o comprimento total da astróide  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$ , onde a > 0.
- 55. (a) Plote a epitrocóide com equações

$$x = 11 \cos t - 4 \cos(11t/2)$$

$$y = 11 \text{ sen } t - 4 \text{ sen}(11t/2)$$

Qual intervalo do parâmetro fornece a curva completa?
 (b) Use seu CAS para calcular o comprimento aproximado dessa curva.

56. Uma curva chamada espiral de Cornu é definida pelas equações paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2) du$$
$$y = S(t) = \int_0^t \sin(\pi u^2/2) du$$

onde C e S são as funções de Fresnel que foram introduzidas no Capítulo 5.

- (a) Plote essa curva. O que acontece quando  $t \to \infty$  e  $t \to -\infty$ ?
- (b) Calcule o comprimento da espiral de Cornu a partir da origem até o ponto com o valor do parâmetro t.

57-58  $\square$  Monte, mas não avalie, uma integral que represente a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

**57.** 
$$x = t - t^2$$
,  $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$ ,  $1 \le t \le 2$ 

**58.** 
$$x = \sin^2 t$$
,  $y = \sin 3t$ ,  $0 \le t \le \pi/3$ 

59-61  $\Box$  Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

**59.** 
$$x = t^3$$
,  $y = t^2$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**60.** 
$$x = 3t - t^3$$
,  $y = 3t^2$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**61.** 
$$x = a \cos^3 \theta$$
,  $y = a \sin^3 \theta$ ,  $0 \le \theta \le \pi/2$ 

62. Plote a curva

$$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$$
  $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ 

Se essa curva girar ao redor do eixo x, calcule a área da superfície resultante. (Use o gráfico para ajudar a encontrar o intervalo correto do parâmetro.)

63. Se a curva

$$x = t + t^3$$
  $y = t - \frac{1}{t^2}$   $1 \le t \le 2$ 

girar ao redor do eixo x, estime a área da superfície resultante com precisão de três casas decimais.

**64.** Se o arco da curva no Exercício 50 girar ao redor do eixo x, estime a área da superfície resultante usando a Regra de Simpson com n = 4.

55-66 □ Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva dada ao redor do eixo y.

**65.** 
$$x = 3t^2$$
,  $y = 2t^3$ ,  $0 \le t \le 5$ 

**66.** 
$$x = e^t - t$$
,  $y = 4e^{t/2}$ ,  $0 \le t \le 1$ 

- **67.** Se f' for contínua e  $f'(t) \neq 0$  para  $a \leq t \leq b$ , mostre que a curva paramétrica x = f(t), y = g(t),  $a \leq t \leq b$ , pode ser colocada na forma y = F(x). [Dica: Mostre que  $f^{-1}$  existe.]
- **68.** Use a Fórmula 2 para derivar a Fórmula 7 a partir da Fórmula 8.2.5 (do Volume I) para o caso no qual a curva pode ser representada na forma y = F(x),  $a \le x \le b$ .
- 69. A curvatura no ponto P da curva é definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

onde  $\phi$  é o ângulo de inclinação da reta tangente em P, como mostrado na figura. Então, a curvatura é o valor absoluto da taxa de mudança de  $\phi$  em relação ao comprimento de arco. Esta pode ser considerada como uma medida da taxa de mudança de direção da curva em P e vai ser estudada em mais detalhes no Capítulo 13.

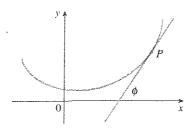
(a) Para a curva paramétrica x = x(t), y = y(t), derive a fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t, assim  $\dot{x} = dx/dt$ . [Dica: Use  $\phi = tg^{-1}(dy/dx)$  e a Equação 2 para encontrar  $d\phi/dt$ . Então use a Regra da Cadeia para achar  $d\phi/ds$ .]

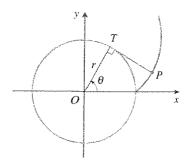
(b) Considerando uma curva y = f(x) como a curva paramétrica x = x, y = f(x), com o parâmetro x, mostre que a fórmula na parte (a) se torna

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

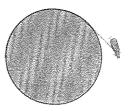


- **70.** (a) Use a fórmula no Exercício 69(b) para encontrar a curvatura da parábola  $y = x^2$  no ponto (1, 1).
  - (b) Em que ponto essa parábola tem curvatura máxima?
- 71. Use a fórmula no Exercício 69(a) para calcular a curvatura da ciclóide  $x = \theta \sin \theta$ ,  $y = 1 \cos \theta$  no topo de um dos arcos.
- 72. (a) Mostre que a curvatura a cada ponto de uma linha reta é  $\kappa = 0$ .
  - (b) Mostre que a curvatura a cada ponto do círculo de raio  $r \in \kappa = 1/r$ .
- 73. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada involuta do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for (r, 0) e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são

$$x = r(\cos \theta + \theta \sin \theta)$$
  $y = r(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ 



74. Uma vaca é amarrada a um silo com raio r por uma corda comprida o suficiente para alcançar apenas o outro lado do silo. Calcule a área disponível para a pastagem da vaca.



### Projeto de Laboratório

#### Curvas de Bézier

As curvas de Bézier são usadas em Computer-Aided Design (CAD) e têm esse nome em homenagem a Bézier (1910–1999), matemático francês que trabalhava na indústria automobilística. Uma curva cúbica de Bézier é determinada por quatro **pontos de controle**,  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  e  $P_3(x_3, y_3)$ , e é definida pelas equações paramétricas

$$x = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3$$

onde  $0 \le t \le 1$ . Note que, quando t = 0, temos  $(x, y) = (x_0, y_0)$ , e quando t = 1, obtemos  $(x, y) = (x_3, y_3)$ ; assim, a curva começa em  $P_0$  e termina em  $P_3$ .

- 1. Plote a curva de Bézier com os pontos de controle P<sub>0</sub>(4, 1), P<sub>1</sub>(28, 48), P<sub>2</sub>(50, 42) e P<sub>3</sub>(40, 5). Então, no mesmo gráfico, plote os segmentos de reta P<sub>0</sub>P<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> e P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>. (O Exercício 31 na Seção 10.1 mostra como fazer isso.) Note que os pontos de controle intermediários P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> não estão sobre a curva; a curva começa em P<sub>0</sub>, vai em direção a P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> sem alcançá-los e termina em P<sub>3</sub>.
- 2. A partir do gráfico no Problema 1 parece que a tangente em  $P_0$  passa por  $P_1$  e a tangente em  $P_3$  passa por  $P_2$ . Prove isso.
- 3. Tente produzir uma curva de Bézier com um laço mudando o segundo ponto de controle no Problema 1.
- 4. Algumas impressoras a laser usam as curvas de Bézier para representar letras e outros símbolos. Experimente com pontos de controle até você encontrar uma curva de Bézier que dê uma representação razoável da letra C.

# 10.3

 $P(r, \theta)$ 

 $(r, \theta)$ 

#### Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas. Até agora temos usado as coordenadas cartesianas, que são distâncias dirigidas a partir de dois eixos perpendiculares. Nesta seção descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado sistema de coordenadas polares, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Escolhemos um ponto no plano conhecido como **pólo** (ou origem) e o denominamos O. Então, desenhamos um raio (semi-reta) começando em O, chamado **eixo polar**. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja  $\theta$  o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP como na Figura 1. Daí o ponto P é representado pelo par ordenado  $(r,\theta)$  e r,  $\theta$  denominado **coordenadas polares** de P. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido antihorário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se P = O, então r = 0, e concordamos que  $(0,\theta)$  representa o pólo para qualquer valor de  $\theta$ .

Estendemos o significado de coordenadas polares para o caso no qual r é negativo concordando que, como na Figura 2, os pontos  $(-r, \theta)$  e  $(r, \theta)$  estão na mesma reta através de O e estão à mesma distância |r| a partir de O, mas em lados opostos de O. Se r > 0, o ponto  $(r, \theta)$  está no mesmo quadrante que  $\theta$ ; se r < 0, ele está no quadrante do lado oposto ao pólo. Note que  $(-r, \theta)$  representa o mesmo ponto que  $(r, \theta + \pi)$ .

EXEMPLO 1 

Plote os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

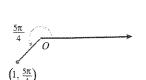
(a) 
$$(1, 5\pi/4)$$

(b) 
$$(2, 3\pi)$$

(c) 
$$(2, -2\pi/3)$$

(d) 
$$(-3, 3\pi/4)$$

SOLUÇÃO Os pontos são plotados na Figura 3. Na parte (d) o ponto  $(-3, 3\pi/4)$  está localizado três unidades a partir do pólo no quarto quadrante, porque o ângulo  $3\pi/4$  está no segundo quadrante e r=-3 é negativo.



eixo polar

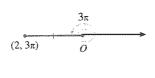
θ

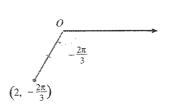
FIGURA 3

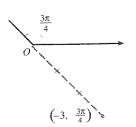
FIGURA 1

 $(-r, \theta)$ 

FIGURA 2







No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto  $(1, 5\pi/4)$  no Exemplo 1(a) poderia ser escrito como  $(1, -3\pi/4)$  ou  $(1, 13\pi/4)$  ou  $(-1, \pi/4)$ . (Veja a Figura 4.)

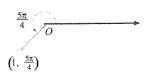
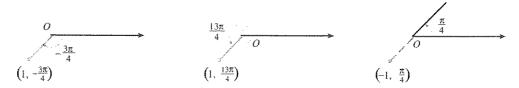


FIGURA 4



De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo  $2\pi$ , o ponto representado pelas coordenadas polares  $(r, \theta)$  é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi)$$
 e  $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ 

onde n é qualquer inteiro.

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 5, na qual o pólo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares  $(r, \theta)$ , então, a partir da figura, temos

$$P(r, \theta) = P(x, y)$$

$$Q = \frac{1}{x}$$
FIGURA 5

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$
  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 

e assim

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 5, que ilustra o caso onde r>0 e  $0<\theta<\pi/2$ , essas equações são válidas para todos os valores de r e  $\theta$ . (Veja a definição geral de sen  $\theta$  e cos  $\theta$  no Apêndice D do Volume I.)

As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrar  $r \in \theta$  onde  $x \in y$  são conhecidos, usamos as equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

que podem ser deduzidas a partir das Equações 1 ou simplesmente lidas a partir da Figura 5.

EXEMPLO 2  $\Box$  Converta o ponto  $(2, \pi/3)$  de coordenadas polares para cartesianas.

SOLUÇÃO Como r=2 e  $\theta=\pi/3$ , as Equações 1 fornecem

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
  
 $y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 

Portanto, o ponto é  $(1, \sqrt{3})$  nas coordenadas cartesianas.

EXEMPLO 3  $\odot$  Represente o ponto com coordenadas cartesianas (1, -1) em termos de coordenadas polares.

SOLUÇÃO Se escolhermos r positivo, então a Equação 2 fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
  
tg  $\theta = \frac{y}{x} = -1$ 

Como o ponto (1, -1) está no quarto quadrante, podemos escolher  $\theta = -\pi/4$  ou  $\theta = 7\pi/4$ . Então uma resposta possível é  $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ ; e outra é  $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ .

NOTA  $\Box$  As Equações 2 não determinam unicamente  $\theta$  quando x e y são dados, porque, como  $\theta$  aumenta através do intervalo  $0 \le \theta < 2\pi$ , cada valor de tg  $\theta$  ocorre duas vezes. Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar r e  $\theta$  que satisfaçam as Equações 2. Como no Exemplo 3, devemos escolher  $\theta$  de modo que o ponto  $(r, \theta)$  esteja no quadrante correto.

# r = 2

(3, 1)

Tabela de valores e gráfico

 $de r = 2 cos \theta$ 

FIGURA 6

-2, 1)

FIGURA 7

#### **Curvas Polares**

O gráfico de uma equação polar  $r = f(\theta)$ , ou mais genericamente  $F(r, \theta) = 0$ , consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação  $(r, \theta)$  cujas coordenadas satisfazem a equação.

EXEMPLO 4  $\equiv$  Que curva é representada pela equação polar r=2?

SOLUÇÃO A curva consiste em todos os pontos  $(r, \theta)$  com r = 2. Como r representa a distância do ponto ao pólo, a curva r=2 representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação r = a representa um círculo com centro O e raio |a|. (Veja a Figura 6.)

EXEMPLO 5  $\Box$  Esboce a curva polar  $\theta = 1$ .

SOLUÇÃO Essa curva consiste em todos os pontos  $(r, \theta)$  tal que o ângulo polar é 1 radiano. É uma linha reta que passa por O e forma um ângulo de 1 radiano com o eixo polar (veja a Figura 7). Note que os pontos (r, 1) na reta com r > 0 estão no primeiro quadrante, enquanto aqueles com r < 0 estão no terceiro quadrante.

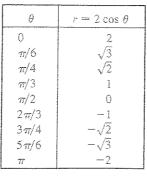


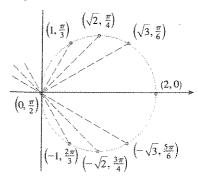
- (a) Esboce a curva com equação polar  $r = 2 \cos \theta$ .
- (b) Encontre a equação cartesiana para essa curva.

#### **SOLUÇÃO**

(a) Na Figura 8 encontramos os valores de r para alguns valores convenientes de  $\theta$ tamos os correspondentes pontos  $(r, \theta)$ . Então juntamos esses pontos para esboçar a , que parece ser um círculo. Usamos os valores de  $\theta$  apenas entre 0 e  $\pi$ , já que, se rmos  $\theta$  aumentar além de  $\pi$ , obtemos os mesmos pontos novamente.

x	e plot curva deixa	
	6	
	0	
	π/	
	$\pi/4$	
	π/:	
	2π,	
FIGURA 8	3 77	





(b) Para converter a equação dada em uma equação cartesiana, usamos as Equações 1 e 2. A partir de  $x = r \cos \theta$ , temos  $\cos \theta = x/r$ ; assim, a equação  $r = 2 \cos \theta$  torna-se r = 2x/r, que fornece

$$2x = r^2 = x^2 + y^2$$
 ou  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 

Completando o quadrado, obtemos

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

que é uma equação do círculo com centro (1, 0) e raio 1.

 $\square$  A Figura 9 mostra em uma ilustração geométrica que o círculo no Exemplo 6 tem a equação  $r=2\cos\theta$ . O ângulo OPQ é um ângulo reto (por quê?) e assim  $r/2=\cos\theta$ .

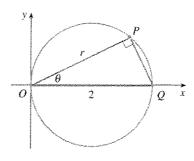


FIGURA 9

EXEMPLO 7  $\Box$  Esboce a curva  $r = 1 + \text{sen } \theta$ .

SOLUÇÃO Em vez de plotarmos os pontos como no Exemplo 6, primeiro esboçamos o gráfico de  $r=1+\sin\theta$  em coordenadas cartesianas na Figura 10 pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima. Isso nos permite ler facilmente os valores de r que correspondem a valores crescentes de  $\theta$ . Por exemplo, vemos que  $\theta$  aumenta de 0 até  $\pi/2$ , r (a distância a partir de  $\theta$ ) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na Figura 11(a). Quando  $\theta$  aumenta de  $\pi/2$  até  $\pi/2$ , a Figura 10 mostra que r diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva como na Figura 11(b). Quando  $\theta$  aumenta de  $\pi/2$  até  $\pi/2$ ,  $\pi/2$  diminui de 1 para 0, como apresentado na parte (c). Finalmente, quando  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d). Se deixássemos  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  até  $\pi/2$  aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d). Se deixássemos  $\pi/2$  até  $\pi/2$  a

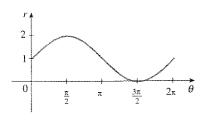


FIGURA 10  $r = 1 + \sin \theta \text{ em coordenadas}$ cartesianas,  $0 \le \theta \le 2\pi$ 

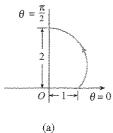
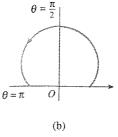
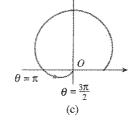
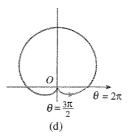
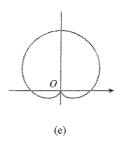


FIGURA 11
Estágios do esboço da cardióide  $r = 1 + \text{sen } \theta$ 









EXEMPLO 8  $\Box$  Esboce a curva  $r = \cos 2\theta$ .

SOLUÇÃO Como no Exemplo 7, primeiro esboçamos  $\dot{r}=\cos2\theta,\,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\,\mathrm{em}$  coordenadas cartesianas na Figura 12. Quando  $\theta$  aurmenta de 0 até  $\pi/4$ , a Figura 12 mostra que r diminui de 1 até 0, e assim desenhamos a parte correspondente da curva polar na Figura 13 (indicada por uma seta simples). Quando  $\theta$  aumenta de  $\pi/4$  até  $\pi/2$ , r varia de 0 até -1. Isso significa que a distância de O aumenta de 0 até 1, mas em vez de ser no primeiro quadrante essa parte da curva polar (indicada por uma seta dupla) está no lado oposto ao pólo no terceiro quadrante. O restante da curva é desenhado de uma maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as porções são traçadas. A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosa de quatro pétalas**.

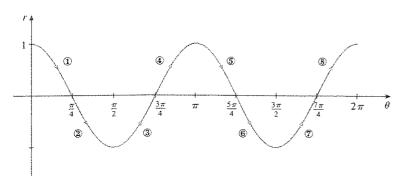


FIGURA 12  $r = \cos 2\theta$  em coordenadas cartesianas

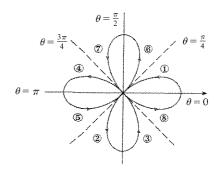


FIGURA 13 Rosa de quatro pétalas  $r = \cos 2\theta$ 

#### Simetria

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria. As três regras seguintes são explicadas pela Figura 14.

- (a) Se uma equação polar não mudar quando  $\theta$  for trocado por  $-\theta$ , a curva será simétrica ao redor do eixo polar.
- (b) Se a equação não mudar quando r for trocado por -r, ou quando  $\theta$  for trocado por  $\theta + \pi$ , a curva será simétrica ao redor do pólo. (Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° ao redor da origem.)
- (c) Se a equação não mudar quando  $\theta$  for trocado por  $\pi \theta$ , a curva será simétrica ao redor da reta vertical  $\theta = \pi/2$ .

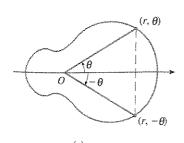
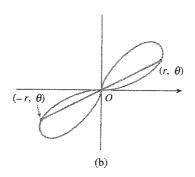
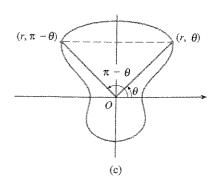


FIGURA 14





As curvas nos Exemplos 6 e 8 são simétricas ao redor do eixo polar, pois  $\cos(-\theta) = \cos\theta$ . As curvas nos Exemplos 7 e 8 são simétricas ao redor de  $\theta = \pi/2$  porque  $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$  e  $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$ . A rosa de quatro pétalas é também simétrica ao redor do pólo. Essas propriedades de simetria poderiam ser usadas para esboçar as curvas. Por exemplo, no Exemplo 6 só precisaríamos ter plotado pontos para  $0 \le \theta \le \pi/2$  e então refleti-los ao redor do eixo polar para obter o círculo completo.

#### Tangentes a Curvas Polares

Para encontrar a reta tangente a uma curva polar  $r = f(\theta)$ , vamos considerar  $\theta$  como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$
  $y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$ 

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas paramétricas (Equação 10.2.2), e a Regra do Produto temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta}$$

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde  $dy/d\theta = 0$  (desde que  $dx/d\theta \neq 0$ ). Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde  $dx/d\theta = 0$  (desde que  $dy/d\theta \neq 0$ ).

Note que, se estivermos olhando para as retas tangentes no pólo, então r=0 e a Equação 3 é simplificada para

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{tg} \theta$$
 se  $\frac{dr}{d\theta} \neq 0$ 

Por exemplo, no Exemplo 8 achamos que  $r = \cos 2\theta = 0$ , onde  $\theta = \pi/4$  ou  $3\pi/4$ . Isso significa que as retas  $\theta = \pi/4$  e  $\theta = 3\pi/4$  (ou y = x e y = -x) são retas tangentes a  $r = \cos 2\theta$  na origem.

#### EXEMPLO 9 $\Box$

- (a) Para a cardióide  $r=1+\sin\theta$  do Exemplo 7, calcule a inclinação da reta tangente quando  $\theta=\pi/3$ .
- (b) Encontre os pontos na cardióide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

SOLUÇÃO Usando a Equação 3 com  $r = 1 + \sin \theta$ , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta + (1 + \sin \theta) \cos \theta}{\cos \theta \cos \theta - (1 + \sin \theta) \sin \theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\,(1+2\,\mathrm{sen}\,\theta)}{1-2\,\mathrm{sen}^2\theta-\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{\cos\theta\,(1+2\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(1+\mathrm{sen}\,\theta)(1-2\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

(a) A inclinação da tangente no ponto onde  $\theta = \pi/3$  é

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1+2\sin(\pi/3))}{(1+\sin(\pi/3))(1-2\sin(\pi/3))}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}/2)(1-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta (1 + 2 \sin\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \sin\theta)(1 - 2 \sin\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Portanto existem tangentes horizontais nos pontos  $(2, \pi/2)$ ,  $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ ,  $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$  e tangentes verticais em  $(\frac{3}{2}, \pi/6)$  e  $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$ . Quando  $\theta = 3\pi/2$ ,  $dy/d\theta$  e  $dx/d\theta$  são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^{-}} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^{-}} \frac{1+2 \sin \theta}{1-2 \sin \theta}\right) \left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^{-}} \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^{-}} \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^{-}} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = \infty$$

Por simetria,

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Então existe uma reta tangente vertical no pólo (veja a Figura 15).

NOTA = Em vez de lembrarmos da Equação 3, poderíamos empregar o método usado para derivá-la. Por exemplo, no Exemplo 9, poderíamos ter escrito

$$x = r \cos \theta = (1 + \sin \theta) \cos \theta = \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$
  
 $y = r \sin \theta = (1 + \sin \theta) \sin \theta = \sin \theta + \sin^2 \theta$ 

Assim temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta + \cos2\theta} = \frac{\cos\theta + \sin2\theta}{-\sin\theta + \cos2\theta}$$

que é equivalente a nossa expressão prévia.

$$(3, \frac{\pi}{2})$$

$$m = -1$$

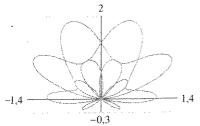
$$(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$$

$$(0, 0)$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$$

FIGURA 15 Retas tangentes para  $r = 1 + \sin \theta$ 



# FIGURA 16 $r = \sin \theta + \sin^{3}(5\theta/2)$

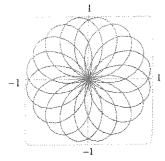


FIGURA 17  $r = \text{sen}(8\theta/5)$ 

□ No Exercício 53 pediremos para você provar analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 18.

#### Plotando Curvas Polares com Dispositivos Gráficos

Embora seja útil saber esboçar as curvas polares simples manualmente, precisamos usar uma calculadora gráfica ou um computador quando nos deparamos com uma curva complicada, como a mostrada na Figura 16.

Alguns dispositivos gráficos têm comandos que nos permitem plotar as curvas polares diretamente. Com outras máquinas precisamos fazer a conversão para as curvas paramétricas primeiro. No último caso, tomamos a equação polar  $r=f(\theta)$  e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
  $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ 

Algumas máquinas requerem que o parâmetro seja denominado t em vez de  $\theta$ .

EXEMPLO 10  $\Box$  Plote a curva  $r = \text{sen}(8\theta/5)$ .

SOLUÇÃO Vamos assumir que nosso dispositivo gráfico não tenha um comando para plotar as curvas polares. Nesse caso, precisamos trabalhar com as equações paramétricas correspondentes, que são

$$x = r \cos \theta = \sin(8\theta/5) \cos \theta$$
  $y = r \sin \theta = \sin(8\theta/5) \sin \theta$ 

Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para  $\theta$ . Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até a curva se repetir? Se a resposta for n, então

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que  $16n\pi/5$  seja um múltiplo par de  $\pi$ . Isso ocorrerá primeiro quando n=5. Portanto plotaremos a curva inteira se especificarmos que  $0 \le \theta \le 10\pi$ . Trocando de  $\theta$  para t, temos as equações

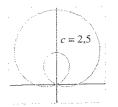
$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t$$
  $y = \text{sen}(8t/5)\sin t$   $0 \le t \le 10\pi$ 

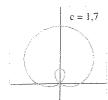
2

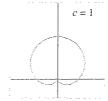
e a Figura 17 nos mostra a curva resultante. Note que essa rosa tem 16 laços.

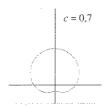
**EXEMPLO 11**  $\Box$  Investigue a família de curvas polares dada por  $r=1+c \sin \theta$ . Como o formato muda quando c varia? (Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.)

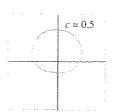
SOLUÇÃO A Figura 18 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para c>1 existe um laço que reduz de tamanho quando c diminui. Quando c=1 o laço desaparece e a curva torna-se a cardióide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e  $\frac{1}{2}$  a cúspide da cardióide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de  $\frac{1}{2}$  para 0, a limaçon parece oval. Essa oval torna-se mais circular quando  $c\to0$  e quando c=0 a curva é apenas o círculo c=1.

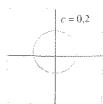


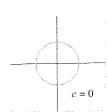


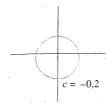


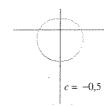


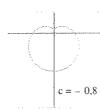


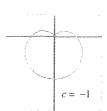












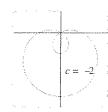


FIGURA 18 Membros da família de  $\lim_{n \to \infty} c_n = 1 + \sin \theta$ 

As partes restantes da Figura 18 mostram que, quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo.

#### Exercícios

1-2 🗆 Plote o ponto cujas coordenadas polares são dadas. Então encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com r > 0 e o outro com r < 0.

- 1. (a)  $(1, \pi/2)$

- **2**. (a) (3, 0)
- (b)  $(-2, \pi/4)$  (c) (3, 2)(b)  $(2, -\pi/7)$  (c)  $(-1, -\pi/2)$

3-4 🗆 Plote o ponto cujas coordenadas polares são dadas. Então encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

- **3.** (a)  $(3, \pi/2)$  (b)  $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$

- **4.** (a)  $(2, 2\pi/3)$
- (b)  $(4, 3\pi)$
- (c)  $(-2, -5\pi/6)$

5-6 □ As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

- (i) Encontre as coordenadas polares  $(r, \theta)$  do ponto, onde r > 0 e  $0 \le \theta < 2\pi$ .
- (ii) Encontre as coordenadas polares  $(r, \theta)$  do ponto, onde r < 0 e  $0 \le \theta < 2\pi$ .
- **5.** (a) (1, 1)
- (b)  $(2\sqrt{3}, -2)$

7-12 🗆 Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

- 7.  $1 \le r \le 2$
- **8.**  $r \ge 0$ ,  $\pi/3 \le \theta \le 2\pi/3$
- **9.**  $0 \le r < 4$ ,  $-\pi/2 \le \theta < \pi/6$
- 10.  $2 < r \le 5$ ,  $3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$
- 11  $2 < r < 3, 5\pi/3 \le \theta \le 7\pi/3$
- **12.**  $-1 \le r \le 1$ ,  $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$

- 13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares  $(1, \pi/6)$  e  $(3, 3\pi/4)$ .
- 14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares  $(r_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \theta_2)$ .

15-20 🗆 Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

**15.** r = 2

- **16.**  $r\cos\theta=1$
- 17.  $r = 3 \operatorname{sen} \theta$
- **18.**  $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{cos} \theta$
- 19.  $r = \cos\text{-sec }\theta$
- **20.**  $r = \operatorname{tg} \theta \sec \theta$ a a 4

21-26 🗆 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

**21.** x = 3

- **22.**  $x^2 + y^2 = 9$
- **23.**  $x = -y^2$
- **24.** x + y = 9
- **25.**  $x^2 + y^2 = 2cx$
- **26.**  $x^2 y^2 = 1$

27-28 Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então escreva uma equação para a curva.

- 27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de  $\pi/6$  com o eixo x positivo.
  - (b) Uma reta vertical pelo ponto (3, 3).
- 28. (a) Um círculo com raio 5 e centro (2, 3).
  - (b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

#### 674 CÁLCULO Editora Thomson

#### 28-48 - Esboce a curva com a equação dada.

**29**. 
$$\theta = -\pi/6$$

**30.** 
$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

31. 
$$r = \sin \theta$$

32. 
$$r = -3 \cos \theta$$

**33.** 
$$r = 2(1 - \sin \theta)$$

**38.** 
$$r = 1 - 3 \cos \theta$$

**35.** 
$$r = \theta$$
,  $\theta \ge 0$ 

**36.** 
$$r = \ln \theta$$
,  $\theta \ge 1$ 

37. 
$$r = \sin 2\theta$$

**38.** 
$$r = 2 \cos 3\theta$$

**39.** 
$$r = 2 \cos 4\theta$$

**40.** 
$$r = \sin 5\theta$$

**41.** 
$$r^2 = 4\cos 2\theta$$

**42.** 
$$r^2 = \sin 2\theta$$

**43.** 
$$r = 2\cos(3\theta/2)$$

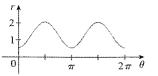
**44.** 
$$r^2\theta = 1$$

**45.** 
$$r = 1 + 2\cos 2\theta$$

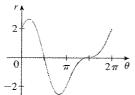
**46.** 
$$r = 1 + 2\cos(\theta/2)$$

## 43-48 — A figura mostra o gráfico de r como uma função de $\theta$ em coordenadas cartesianas. Use-o para esboçar a curva polar correspondente.

#### 47.



48.



- **49.** Mostre que a curva polar  $r = 4 + 2 \sec \theta$  (chamada **conchóide**) tem a reta x = 2 como uma assíntota vertical mostrando que  $\lim_{r \to \pm \infty} x = 2$ . Use esse fato para ajudar a esboçar a conchóide.
- **50.** Mostre que a curva r = 2 co-sec  $\theta$  (também uma conchóide) tem a reta y = -1 como uma assíntota horizontal mostrando que  $\lim_{r \to \pm \infty} y = -1$ . Use esse fato para ajudar a esboçar a conchóide.
- 51. Mostre que a curva r = sen θ tg θ (denominada cissóide de Diocles) tem a reta x = 1 como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical 0 ≤ x < 1. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissóide.</p>
- **52.** Esboce a curva  $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ .
- (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon r=1+c sen  $\theta$  tem um laço interno quando |c|>1. Prove que isso é verdadeiro e encontre os valores de  $\theta$  que correspondam ao laço interno.
  - (b) A partir da Figura 18 parece que a limaçon perde sua covinha quando  $c = \frac{1}{2}$ . Prove.

54. Conecte as curvas polares com seus respectivos gráficos I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use um dispositivo gráfico.)

(a) 
$$r = \operatorname{sen}(\theta/2)$$

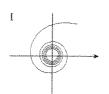
(b) 
$$r = \operatorname{sen}(\theta/4)$$

(c) 
$$r = \sec(3\theta)$$

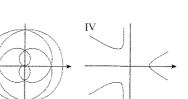
(d) 
$$r = \theta \operatorname{sen} \theta$$

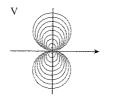
(e) 
$$r = 1 + 4\cos 5\theta$$

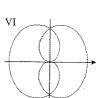
(f) 
$$r = 1/\sqrt{\theta}$$











55-60  $\Box$  Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de  $\theta$ .

**55.** 
$$r=2 \operatorname{sen} \theta$$
,  $\theta=\pi/6$ 

**56.** 
$$r=2-\sin\theta$$
,  $\theta=\pi/3$ 

57. 
$$r = 1/\theta$$
,  $\theta = \pi$ 

**58.** 
$$r = \ln \theta$$
,  $\theta = e$ 

**59.** 
$$r = 1 + \cos \theta$$
,  $\theta = \pi/6$ 

**60.** 
$$r = \sin 3\theta$$
,  $\theta = \pi/6$ 

61-66 
Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

**61.** 
$$r = 3\cos\theta$$

**62.** 
$$r = \cos \theta + \sin \theta$$

**63.** 
$$r = 1 + \cos \theta$$

64. 
$$r = e^{\theta}$$

**65.** 
$$r = \cos 2\theta$$

**66.** 
$$r' = \sin 2\theta$$

- 67. Mostre que a equação polar  $r = a \operatorname{sen} \theta + b \operatorname{cos} \theta$ , onde  $ab \neq 0$ , representa um círculo e calcule seu centro e o raio.
- **68.** Mostre que as curvas  $r = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{e} r = a \cos \theta$  se interceptam com ângulos retos.

69-74 □ Use um dispositivo gráfico para plotar a curva polar. Escolha o intervalo do parâmetro para ter certeza de que você fez a curva inteira.

69. 
$$r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$$
 (nefróide de Freeth)

70. 
$$r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$$
 (hipopédia)

71. 
$$r = e^{\sin \theta} - 2\cos(4\theta)$$
 (curva borboleta)

**72.** 
$$r = \sin^2(4\theta) + \cos(4\theta)$$

73. 
$$r = 2 - 5 \operatorname{sen}(\theta/6)$$

**74.** 
$$r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$$

**75.** Como os gráficos  $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/6)$  e  $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/3)$  estão relacionados ao gráfico  $r = 1 + \text{sen}(\theta)$  Em geral, como o gráfico de  $r = f(\theta - \alpha)$  está relacionado ao gráfico de  $r = f(\theta)$ ?

**76.** Use um gráfico para estimar a coordenada y dos pontos mais altos na curva  $r = \text{sen } 2\theta$ . Então use o cálculo para encontrar o valor exato.

77. (a) Investigue a família de curvas definidas pelas equações polares  $r = \text{sen } n\theta$ , onde n é um inteiro positivo. Como o número de laços está relacionado a n?

(b) O que aconteceria se a equação na parte (a) fosse trocada por  $r = |\sin n\theta|$ ?

78. Uma família de curvas é dada pelas equações r = 1 + c sen  $n \theta$ , onde c é um número real e n é um inteiro positivo. Como o gráfico muda quando n aumenta? Como ele muda quando c varia? Ilustre plotando os membros suficientes da família para apoiar suas conclusões.

79. Uma família de curvas tem equações polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue como o gráfico muda quando o número a varia. Em particular, você deveria identificar os valores de transição de a para os quais o formato básico da curva muda.

**80.** O astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudou a família de curvas com equações polares

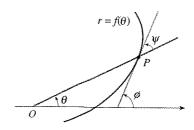
$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

onde a e c são números reais positivos. Essas curvas são chamadas **ovais de Cassini**, embora tenham formato oval apenas para certos valores de a e c. (Cassini pensou que essas curvas pudessem representar as órbitas planetárias melhor que as elipses de Kepler.) Investigue a variedade de formatos que essas curvas possam ter. Em particular, como estão relacionados a e c quando a curva se divide em duas partes?

81. Seja P um ponto qualquer (exceto a origem) na curva  $r = f(\theta)$ . Se  $\psi$  for o ângulo entre a reta tangente em P e a reta radial OP, mostre que

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[Dica: Observe que  $\psi = \phi - \theta$  na figura.]



82. (a) Use o Exercício 81 para mostrar que o ângulo entre a reta tangente e a reta radial é  $\psi = \pi/4$  a cada ponto na curva  $r = e^{\theta}$ .



(b) Illustre a parte (a) plotando a curva e a reta tangente aos pontos onde  $\theta = 0$  e  $\pi/2$ .

(c) Prove que qualquer curva polar  $r = f(\theta)$ , com a propriedade de que o ângulo entre a reta radial e a reta tangente é uma constante, deve ser do tipo  $r = Ce^{k\theta}$ , onde C e k são constantes.



#### Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Nesta seção desenvolveremos a fórmula para a área de uma região cuja fronteira é dada por uma equação polar. Precisamos usar a fórmula para a área de um setor de um círculo

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

onde, como na Figura 1, r é o raio e  $\theta$ , a medida em radianos do ângulo central. A Fórmula 1 segue do fato de que a área de um setor é proporcional a seu ângulo central:  $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$ . (Veja também o Exercício 35 na Seção 7.3 no Volume I.)

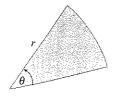


FIGURA 1

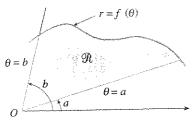
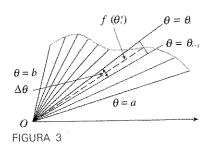


FIGURA 2



Seja  $\Re$  a região ilustrada na Figura 2, limitada pela curva polar  $r = f(\theta)$  e pelos raios  $\theta = a$  e  $\theta = b$ , onde f é uma função contínua positiva e onde  $0 < b - a \le 2\pi$ . Dividimos o intervalo [a, b] em subintervalos com extremos  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$  e larguras iguais  $\Delta\theta$ . Os raios  $\theta = \theta_i$  dividem então  $\Re$  em n regiões menores com ângulo central  $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$ . Se escolhermos  $\theta_i^*$  no i-ésimo subintervalo  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ , então a área  $\Delta A_i$  da i-ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central  $\Delta\theta$  e raio  $f(\theta_i^*)$ , (Veja a Figura 3.)

Então, a partir da Fórmula 1 temos

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta \theta$$

e assim uma aproximação para a área total A de  $\Re$  é

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta \theta$$

A partir da Figura 3 parece que a aproximação em (2) melhora quando  $n \to \infty$ . Mas as somas em (2) são as de Riemann para a função  $g(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta)]^2$ , logo,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

E portanto parece plausível (e de fato pode ser provado) que a fórmula para a área A da região polar  $\Re$  é

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

A Fórmula 3 é frequentemente escrita como

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

entendendo que  $r = f(\theta)$ . Note a similaridade entre as Fórmulas 1 e 4.

Quando aplicamos as Fórmulas 3 ou 4, é interessante pensar na área como varrida por um raio que gira e passa por O e que começa com ângulo a e termina com ângulo b.

EXEMPLO 1  $\Box$  Calcule a área limitada por um laço da rosa de quatro pétalas  $r = \cos 2\theta$ .

SOLUÇÃO A curva  $r=\cos 2\theta$  foi esboçada no Exemplo 8 da Seção 10.3. Note a partir da Figura 4 que a região limitada pelo laço direito é varrida pelo raio que gira de  $\theta=-\pi/4$  até  $\theta=\pi/4$ . Dessa forma, a Fórmula 4 fornece

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

200

 $r = \cos 2\theta$   $\theta = \frac{\pi}{4}$   $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 

FIGURA 4

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Calcule a área da região que está dentro do círculo r=3 sen  $\theta$  e fora da cardióide  $r=1+\sin\theta$ .

SOLUÇÃO A cardióide (veja o Exemplo 7 da Seção 10.3) e o círculo estão esboçados na Figura 5, e a região desejada está sombreada. Os valores de a e b na Fórmula 4 são determinados achando-se os pontos de interseção das duas curvas. Elas se interceptam quando 3 sen  $\theta=1$  + sen  $\theta$ , o que fornece sen  $\theta=\frac{1}{2}$ , assim  $\theta=\pi/6$ ,  $5\pi/6$ . A área desejada pode ser encontrada pela subtração da área dentro da cardióide entre  $\theta=\pi/6$  e  $\theta=5\pi/6$  da área dentro do círculo de  $\pi/6$  até  $5\pi/6$ . Então

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta$$

Como a região é simétrica ao redor do eixo  $\theta = \pi/2$ , podemos escrever

$$A = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \sec^2 \theta \, d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta) \, d\theta \right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \sec^2 \theta - 1 - 2 \sec \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4 \cos 2\theta - 2 \sec \theta) \, d\theta \qquad \text{[porque } \sec^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \text{]}$$

$$= 3\theta - 2 \sec 2\theta + 2 \cos \theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi$$

 $=3\theta-2$  sen  $2\theta+2\cos\theta|_{\pi/6}=\pi$ O Exemplo 2 ilustra o procedimento para encontrar a área da região limitada por duas curvas polares. Em geral, seja  $\mathcal R$  uma região, como ilustrado na Figura 6, que é limitada pelas curvas com as equações polares  $r=f(\theta),\ r=g(\theta),\ \theta=a$  e  $\theta=b$ , onde  $f(\theta) \ge g(\theta) \ge 0$  e  $0 < b-a \le 2\pi$ . A área A de  $\mathcal R$  é calculada pela subtração da área dentro de  $r=g(\theta)$  da área dentro de  $r=f(\theta)$ ; assim, usando a Fórmula 3 temos

$$A = \int_{a}^{b} \frac{1}{2} [f(\theta)]^{2} d\theta - \int_{a}^{b} \frac{1}{2} [g(\theta)]^{2} d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{a}^{b} ([f(\theta)]^{2} - [g(\theta)]^{2}) d\theta$$

ATENÇÃO  $\circ$  O fato de que um único ponto tem muitas representações em coordenadas polares algumas vezes torna difícil encontrar todos os pontos de interseção de duas curvas polares. Por exemplo, é óbvio a partir da Figura 5 que o círculo e a cardióide têm três pontos de interseção; contudo, no Exemplo 2, resolvemos as equações r=3 sen  $\theta$  e r=1+ sen  $\theta$  e encontramos apenas dois pontos  $(\frac{3}{2},\pi/6)$  e  $(\frac{3}{2},5\pi/6)$ . A origem também é um ponto de interseção, mas não pudemos encontrá-lo resolvendo as equações para as curvas, pois a origem não tem uma única representação em coordenadas polares que satisfaça ambas as equações. Note que, quando representada como (0,0) ou  $(0,\pi)$ , a origem satisfaz r=3 sen  $\theta$  e assim, está no círculo; quando representada como  $(0,3\pi/2)$ , satisfaz r=1+ sen  $\theta$  e, dessa forma, está na cardióide. Pense em dois pontos se movendo ao longo das curvas quando o valor do parâmetro  $\theta$  aumenta de 0 até  $2\pi$ . Em uma curva a origem é alcançada em  $\theta=0$  e  $\theta=\pi$ ; na outra, é alcançada em  $\theta=3\pi/2$ . Os pontos não colidem na origem, porque eles a alcançam em tempos diferentes, mas de qualquer modo as curvas se interceptam.

Então, para encontrar todos os pontos de interseção de duas curvas polares, é recomendável que você desenhe os gráficos de ambas as curvas. É especialmente conveniente usar uma calculadora gráfica ou um computador para ajudar nessa tarefa.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Encontre todos os pontos de interseção das curvas  $r = \cos 2\theta$  e  $r = \frac{1}{2}$ .

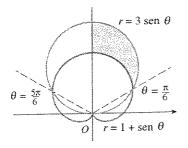


FIGURA 5

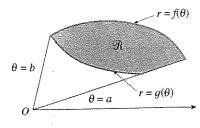


FIGURA 6

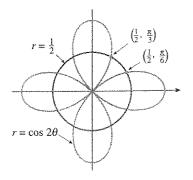


FIGURA 7

SOLUÇÃO Se resolvermos as equações  $r = \cos 2\theta$  e  $r = \frac{1}{2}$ , obteremos  $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$  e, portanto,  $2\theta = \pi/3$ ,  $5\pi/3$ ,  $7\pi/3$ ,  $11\pi/3$ . Então, os valores de  $\theta$  entre 0 e  $2\pi$  que satisfazem ambas as equações são  $\theta = \pi/6$ ,  $5\pi/6$ ,  $7\pi/6$ ,  $11\pi/6$ . Encontramos quatro pontos de interseção:  $(\frac{1}{2}, \pi/6)$ ,  $(\frac{1}{2}, 5\pi/6)$ ,  $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$  e  $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$ .

Contudo, você pode ver a partir da Figura 7 que as curvas têm outros quatro pontos de interseção, a saber:  $(\frac{1}{2}, \pi/3)$ ,  $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ ,  $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$  e  $(\frac{1}{2}, 5\pi/3)$ . Esses podem ser encontrados usando-se simetria ou notando-se que a outra equação do círculo é  $r = -\frac{1}{2}$  e então resolvendo-se as equações  $r = \cos 2\theta$  e  $r = -\frac{1}{2}$ .

#### Comprimento de Arco

Para calcular o comprimento de uma curva polar  $r = f(\theta)$ ,  $a \le \theta \le b$ , referimo-nos a  $\theta$  como um parâmetro e escrevemos as equações paramétricas da curva como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$
  $y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$ 

Usando a Regra do Produto e diferenciando em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

assim, usando  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , temos

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta \sin\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$+ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta \cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Assumindo que f' é contínua, podemos usar o Teorema 10.2.6 para escrever o comprimento de arco como

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^{2}} d\theta$$

Portanto o comprimento da curva com equação polar  $r = f(\theta), a \le \theta \le b$  é

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Calcule o comprimento da cardióide  $r = 1 + \sin \theta$ .

SOLUÇÃO A cardióide é mostrada na Figura 8 (nós a esboçamos no Exemplo 7 da Seção 10.3). Seu comprimento total é dado pelo intervalo do parâmetro  $0 \le \theta \le 2\pi$ ; assim, a Fórmula 5 fornece

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \sin \theta} d\theta$$

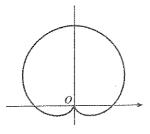


FIGURA 8  $r = 1 + \sin \theta$ 

Poderíamos avaliar essa integral pela multiplicação e divisão do integrando por  $\sqrt{2}-2$  sen  $\theta$ , ou poderíamos usar um sistema algébrico computacional. De qualquer maneira, calculamos que o comprimento da cardióide é L=8.

#### Exercícios

1-4 
Encontre a área da região que é limitada pelas curvas dadas que está no setor especificado.

1. 
$$r = \sqrt{\theta}$$
,  $0 \le \theta \le \pi/4$ 

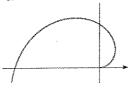
**2.** 
$$r = e^{\theta/2}$$
,  $\pi \le \theta \le 2\pi$ 

3. 
$$r = \sin \theta$$
,  $\pi/3 \le \theta \le 2\pi/3$  4.  $r = \sqrt{\sin \theta}$ ,  $0 \le \theta \le \pi$ 

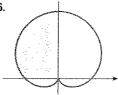
4. 
$$r = \sqrt{\sin \theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

5-8 🗆 Encontre a área da região sombreada.

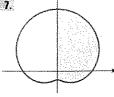
5.

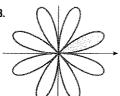


 $r = \theta$ 



 $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ 





9-14 🗆 Esboce a curva e calcule a área limitada por ela.

$$9. \ \ r = 3 \cos \theta$$

**10.** 
$$r = 3(1 + \cos \theta)$$

$$11. r^2 = 4\cos 2\theta$$

**12.** 
$$r^2 = \sin 2\theta$$

**13.** 
$$r = 2 \cos 3\theta$$

**14.** 
$$r = 2 + \cos 2\theta$$

14. 
$$r = 2 + \cos 2\theta$$

15-16 □ Plote a curva e calcule a área limitada por ela.

**15.** 
$$r = 1 + 2 \sin 6\theta$$

$$16. r = 2 sen \theta + 3 sen 9\theta$$

B = 0 g x 0 T 4 5 R 8 7 17–21 □ Encontre a área da região dentro de um laço da curva.

17. 
$$r = \sin 2\theta$$

**18.** 
$$r = 4 \text{ sen } 3\theta$$

**19.** 
$$r = 3\cos 5\theta$$

**20.** 
$$r = 2 \cos 4\theta$$

21.  $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$  (laço interno)

22. Calcule a área limitada pelo laço do estrofóide

$$r = 2 \cos \theta - \sec \theta$$
.

23-28 🗆 Encontre a área da região que está dentro da primeira curva e fora da segunda curva.

**23.** 
$$r = 4 \sin \theta$$
,  $r = 2$ 

**24.** 
$$r = 1 - \sin \theta$$
,  $r = 1$ 

**25.** 
$$r^2 = 8 \cos 2\theta$$
,  $r = 2$ 

**26.** 
$$r = 2 + \sin \theta$$
,  $r = 3 \sin \theta$ 

$$27. r = 3\cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$$

**28.** 
$$r = 1 + \cos \theta$$
,  $r = 3 \cos \theta$ 

29-34 🗆 Encontre a área da região que está dentro de ambas as curvas.

**29.** 
$$r = \sin \theta$$
,  $r = \cos \theta$ 

**30.** 
$$r = \sin 2\theta$$
,  $r = \sin \theta$ 

31: 
$$r = \sin 2\theta$$
,  $r = \cos 2\theta$ 

**32.** 
$$r^2 = 2 \sin 2\theta$$
,  $r = 1$ 

**33.** 
$$r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$$
,  $r = 2$ 

**34.** 
$$r = a \sin \theta$$
,  $r = b \cos \theta$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ 

35. Encontre a área dentro do laço maior e fora do laço menor da limaçon  $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$ .

#### 36. Ache a área entre o laço maior e o laço menor da curva $r = 1 + 2 \cos 3\theta$ .

37-42 🗆 Encontre todos os pontos de interseção das curvas dadas.

37. 
$$r = \sin \theta$$
,  $r = \cos \theta$ 

**38.** 
$$r = 2$$
,  $r = 2 \cos 2\theta$ 

**39.** 
$$r = \cos \theta$$
,  $r = 1 - \cos \theta$ 

**40.** 
$$r = \cos 3\theta$$
,  $r = \sin 3\theta$ 

41. 
$$r = \sin \theta$$
,  $r = \sin 2\theta$ 

**42.** 
$$r^2 = \sin 2\theta$$
,  $r^2 = \cos 2\theta$ 

43. Os pontos de interseção da cardióide 
$$r=1+\sin\theta$$
 e do laço espiral  $r=2\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ , não podem ser encontrados exatamente. Use um dispositivo gráfico para encontrar os valores aproximados de  $\theta$  nos quais eles se interceptam. Então use esses valores para estimar a área que está dentro de ambas as curvas.

44. Use um gráfico para estimar os valores de  $\theta$  para os quais as curvas  $r = 3 + \text{sen } 5\theta$  e  $r = 6 \text{sen } \theta$  se interceptam. Então estime a área que está dentro de ambas as curvas.

45-48 □ Calcule o comprimento da curva polar.

**45.** 
$$r = 3 \operatorname{sen} \theta$$
.  $0 \le \theta \le \pi/3$ 

**46.** 
$$r = e^{2\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

**41.** 
$$r = \theta^2$$
,  $0 \le \theta \le 2\pi$ 

**48.** 
$$r = \theta$$
.  $0 \le \theta \le 2\pi$ 

#### 680 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

43-52 ☐ Use uma calculadora ou um computador para encontrar o comprimento do laço, com precisão de quatro casas decimais.

**49.**  $r = 3 \sin 2\theta$ 

**50.**  $r = 4 \sin 3\theta$ 

**51.**  $r = \text{sen}(\theta/2)$ 

**52.**  $r = 1 + \cos(\theta/3)$ 

53-54 □ Plote a curva e calcule seu comprimento.

**53.**  $r = \cos^4(\theta/4)$ 

**54.**  $r = \cos^2(\theta/2)$ 

55. (a) Use a Fórmula 10.2.7 para mostrar que a área da superfície gerada pela rotação da curva polar

$$r = f(\theta)$$
  $a \le \theta \le b$ 

(onde f' é contínua e  $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$ ) ao redor do eixo polar é

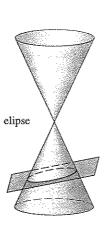
$$S = \int_a^b 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

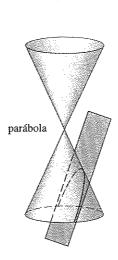
- (b) Use a fórmula na parte (a) para calcular a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata  $r^2 = \cos 2\theta$  ao redor do eixo polar.
- **56.** (a) Encontre a fórmula para a área da superfície gerada pela rotação da curva polar  $r = f(\theta)$ ,  $a \le \theta \le b$  (onde f' é contínua e  $0 \le a < b \le \pi$ ), ao redor da reta  $\theta = \pi/2$ .
  - (b) Calcule a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata  $r^2 = \cos 2\theta$  ao redor da reta  $\theta = \pi/2$ .

#### 10.5

#### Seções Cônicas

Nesta seção daremos as definições geométricas de parábolas, elipses e hipérboles e derivaremos suas equações-padrão. Elas são chamadas **seções cônicas**, ou **cônicas**, porque resultam da interseção de um cone com um plano, como mostrado na Figura 1.





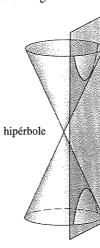


FIGURA 1 Cônicas

#### Parábolas

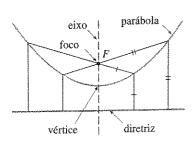


FIGURA 2

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F (denominado **foco**) e a uma reta fixa (chamada **diretriz**) são iguais. Essa definição é ilustrada pela Figura 2. Note que o ponto na metade do caminho entre o foco e a diretriz está na parábola; e ele é conhecido como **vértice**. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é intitulada **eixo** da parábola.

No século XVI, Galileu mostrou que a trajetória de um projétil atirado no ar a um certo ângulo em relação ao solo é uma parábola. Desde essa época, os formatos parabólicos têm sido usados para desenhar faróis de carro, telescópios refletores e pontes suspensas. (Veja o Problema 16 na página 276 do Volume I para se lembrar da propriedade de reflexão das parábolas que as faz tão úteis.)

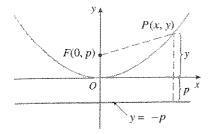


FIGURA 3

Obteremos uma equação particularmente simples para uma parábola se colocarmos o vértice na origem O e sua diretriz paralela ao eixo x, como na Figura 3. Se o foco for o ponto (0, p), então a diretriz tem a equação y = -p. Se P(x, y) for um ponto qualquer na parábola, então a distância de P até o foco é

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

e a distância de P até a diretriz é |y+p|. (A Figura 3 ilustra o caso onde p>0.) A propriedade de definição de uma parábola é que essas distâncias são iguais:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

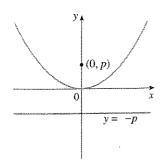
Obtemos uma equação equivalente elevando ao quadrado e simplificando:

$$x^{2} + (y - p)^{2} = |y + p|^{2} = (y + p)^{2}$$
$$x^{2} + y^{2} - 2py + p^{2} = y^{2} + 2py + p^{2}$$
$$x^{2} = 4py$$

Uma equação da parábola com foco (0, p) e diretriz y = -p é

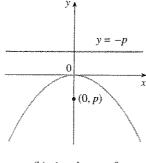
$$x^2 = 4py$$

Se escrevermos a = 1/(4p), então a equação-padrão de uma parábola (1) torna-se  $y = ax^2$ . A concavidade é para cima se p > 0 e para baixo se p < 0 (veja a Figura 4, partes (a) e (b)]. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y porque (1) não muda quando x é trocado por -x.

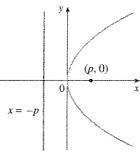


(a)  $x^2 = 4py, p > 0$ 

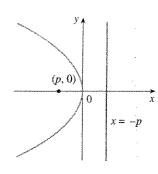
FIGURA 4







(c)  $y^2 = 4px, p > 0$ 



(d)  $y^2 = 4px, p < 0$ 

Se trocarmos x e y em (1), obteremos

$$y^2 = 4px$$

que é uma equação da parábola com foco (p, 0) e diretriz x = -p. (Trocar x e y significa refletir em relação à reta diagonal y = x.) A concavidade da parábola é para a direita se p > 0 e para a esquerda se p < 0 [veja a Figura 4, partes (c) e (d)]. Em ambos os casos o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, que é o eixo da parábola.

**EXEMPLO** 1  $\Box$  Encontre o foco e a diretriz da parábola  $y^2 + 10x = 0$  e esboce o gráfico.

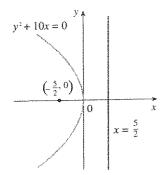


FIGURA 5

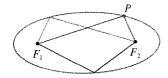


FIGURA 6

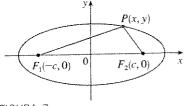


FIGURA 7

# $(-a,0) \qquad b \qquad a \qquad (a,0) \qquad (c,0) \qquad x \qquad (0,-b)$

FIGURA 8

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Se escrevermos a equação como  $y^2 = -10x$  e a compararmos com a Equação 2 veremos que 4p = -10, assim  $p = -\frac{5}{2}$ . Então, o foco é  $(p, 0) = (-\frac{5}{2}, 0)$  e a diretriz é  $x = \frac{5}{2}$ . O esboço é mostrado na Figura 5.

#### **Elipses**

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é uma constante (veja a Figura 6). Esses dois pontos são chamados focos. Uma das Leis de Kepler é que as órbitas dos planetas no sistema solar são elipses com o Sol em um dos focos.

Para obter a equação mais simples para uma elipse, colocamos os focos no eixo x nos pontos (-c, 0) e (c, 0) como na Figura 7, de modo que a origem esteja na metade do caminho entre os focos. Seja a soma das distâncias a partir de um ponto na elipse até os focos 2a > 0. Então P(x, y) é um ponto na elipse quando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$
isto é, 
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
ou 
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$x^{2} - 2cx + c^{2} + y^{2} = 4a^{2} - 4a\sqrt{(x+c)^{2} + y^{2}} + x^{2} + 2cx + c^{2} + y^{2}$$
que é simplificada para 
$$a\sqrt{(x+c)^{2} + y^{2}} = a^{2} + cx$$

Elevamos ao quadrado novamente:

$$a^{2}(x^{2} + 2cx + c^{2} + y^{2}) = a^{4} + 2a^{2}cx + c^{2}x^{2}$$

que se torna

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

A partir do triângulo  $F_1F_2P$  na Figura 7, vemos que 2c < 2a, assim c < a e, portanto,  $a^2 - c^2 > 0$ . Por conveniência, seja  $b^2 = a^2 - c^2$ . Então a equação da elipse torna-se  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , ou, se ambos os lados forem divididos por  $a^2b^2$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como  $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ , segue que b < a. Os interceptos x são encontrados fazendo-se y = 0. Então  $x^2/a^2 = 1$ , ou  $x^2 = a^2$ , assim  $x = \pm a$ . Os pontos correspondentes (a, 0) e (-a, 0) são chamados **vértices** da elipse, e o segmento de reta que une os vértices é dito **eixo principal**. Para encontrar os interceptos y fazemos x = 0 e obtemos  $y^2 = b^2$ , dessa forma  $y = \pm b$ . A Equação 3 não muda se x for trocado por -x ou y for trocado por -y, logo, a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos. Note que, se os focos coincidirem, então c = 0, portanto, a = b e a elipse torna-se um círculo com raio r = a = b.

Resumimos essa discussão como a seguir (veja também a Figura 8).

#### 4 A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \ge b > 0$$

tem focos  $(\pm c, 0)$ , onde  $c^2 = a^2 - b^2$ , e vértices  $(\pm a, 0)$ .

Se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo y em  $(0, \pm c)$ , então podemos encontrar sua equação trocando x e y em (4) (veja a Figura 9).

683



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \ge b > 0$$

tem os focos  $(0, \pm c)$ , onde  $c^2 = a^2 - b^2$  e vértices  $(0, \pm a)$ .

**EXEMPLO** 2  $\Box$  Esboce o gráfico de  $9x^2 + 16y^2 = 144$  e localize os focos.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora no formato-padrão para uma elipse, e assim temos  $a^2=16$ ,  $b^2=9$ , a=4 e b=3. Os interceptos x são  $\pm 4$  e os interceptos y são  $\pm 3$ . Também,  $c^2=a^2-b^2=7$ , portanto  $c=\sqrt{7}$ , e os focos são  $(\pm\sqrt{7},0)$ . O gráfico é esboçado na Figura 10.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Encontre uma equação para a elipse com focos  $(0, \pm 2)$  e vértices  $(0, \pm 3)$ .

SOLUÇÃO Usando a notação de (5), temos c=2 e a=3. Então, obtemos  $b^2=a^2-c^2=9-4=5$ ; logo, uma equação para a elipse é

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Outra maneira de escrever a equação é  $9x^2 + 5y^2 = 45$ .

Como as parábolas, as elipses têm uma propriedade de reflexão interessante com conseqüências práticas. Se uma fonte de luz — ou som — for colocada em um foco de uma superfície com secções transversais elípticas, então toda luz — ou som — é refletida da superfície para o outro foco (veja o Exercício 59). Esse princípio é usado em *litotripsia*, um tratamento para pedras nos rins. Um refletor com secção transversal elíptica é colocado de maneira que a pedra no rim está em um foco. Ondas sonoras de alta intensidade geradas no outro foco são refletidas para a pedra e a destroem sem causar dano ao tecido vizinho. O paciente não sofre o trauma de uma cirurgia e se recupera em poucos dias.

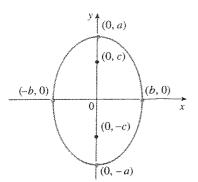


FIGURA 9  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \ a \ge b$ 

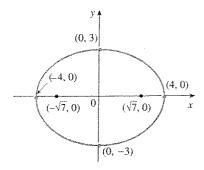


FIGURA 10  $9x^2 + 16y^2 = 144$ 

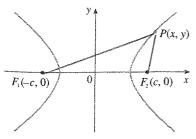


FIGURA 11
P está na hipérbole quando  $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ 

#### Hipérboles

Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (os focos) é uma constante. Essa definição é ilustrada na Figura 11.

As hipérboles ocorrem frequentemente como grafos de equações em química, física, biologia e economia (Lei de Boyle, Lei de Ohm, curvas de demanda e de oferta). Uma aplicação particularmente importante de hipérboles é encontrada nos sistemas de navegação desenvolvidos nas I e II Guerras Mundiais (veja o Exercício 51).

Observe que a definição de uma hipérbole é similar àquela de uma elipse; a única mudança é que a soma das distâncias torna-se uma diferença das distâncias. De fato, a derivação da equação de uma hipérbole é também similar àquela dada anteriormente para uma elipse. Deixamos para mostrar no Exercício 52 que, quando os focos estão no eixo x

em  $(\pm c,0)$  e a diferença das distâncias for  $|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a$ , então a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde  $c^2 = a^2 + b^2$ . Note que os interceptos x são novamente  $\pm a$ , e os pontos (a,0) e (-a,0) são os **vértices** da hipérbole. Mas, se colocarmos x=0 na Equação 6 teremos  $y=-b^2$ , que é impossível; dessa forma, não existe o intercepto y. A hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos.

Para analisar a hipérbole um pouco mais, olhamos a Equação 6 e obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \ge 1$$

Isso mostra que  $x^2 \ge a^2$ , assim  $|x| = \sqrt{x^2} \ge a$ . Portanto temos  $x \ge a$  ou  $x \le -a$ . Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas ramos.

Ao desenhar uma hipérbole, tenha em mente que é útil desenhar primeiro suas **assíntotas**, que são as retas y = (b/a)x e y = -(b/a)x mostradas na Figura 12. Ambos os ramos da hipérbole se aproximam das assíntotas, isto é, eles chegam arbitrariamente próximos das assíntotas. [Veja o Exercício 67 da Seção 4.5 do Volume I, onde y = (b/a)x é mostrado como uma assíntota inclinada.]

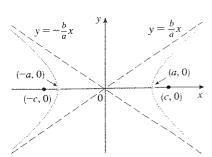


FIGURA 12  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 

#### 7 A hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tem os focos  $(\pm c, 0)$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2$ , vértices  $(\pm a, 0)$  e assíntotas  $y = \pm (b/a)x$ .

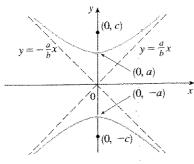


FIGURA 13  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 

Se os focos de uma hipérbole estiverem no eixo y, então, trocando os papéis de x e y, obtemos a seguinte informação, que é ilustrada na Figura 13.

A hipérbole 
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tem os focos  $(0, \pm c)$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2$ , vértices  $(0, \pm a)$ , e assíntotas  $y = \pm (a/b)x$ .

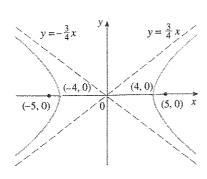


FIGURA 14  $9x^2 - 16y^2 = 144$ 

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Encontre os focos e as assíntotas da hipérbole  $9x^2 - 16y^2 = 144$  e esboce seu gráfico.

SOLUÇÃO Se dividirmos ambos os lados da equação por 144, teremos

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é da forma dada em (7) com a = 4 e b = 3. Como  $c^2 = 16 + 9 = 25$ , os focos são ( $\pm 5$ , 0). As assíntotas são as retas  $y = \frac{3}{4}x$  e  $y = -\frac{3}{4}x$ . O gráfico é visto na Figura 14.

SOLUÇÃO A partir de (8) e da informação dada, vemos que a=1 e a/b=2. Então,  $b=a/2=\frac{1}{2}$  e  $c^2=a^2+b^2=\frac{5}{4}$ . Os focos são  $(0,\pm\sqrt{5}/2)$  e a equação da hipérbole é

$$y^2 - 4x^2 = 1$$

#### Cônicas Deslocadas

Como discutido no Apêndice C no Volume I, deslocarnos as cônicas tomando as equações-padrão (1), (2), (4), (5), (7) e (8) e trocando x e y por x - h e y - k.

EXEMPLO 6  $\Box$  Encontre uma equação para a elipse com focos (2, -2), (4, -2) e vértices (1, -2), (5, -2).

SOLUÇÃO O eixo principal é o segmento de reta que une os vértices (1, -2), (5, -2) e tem comprimento 4; assim a = 2. A distância entre os focos é 2, e assim, c = 1. Então,  $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ . Como o centro da elipse é (3, -2), trocamos x e y em (4) por x - 3 e y + 2 para obter

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como a equação da elipse.

EXEMPLO 7 

Esboce a cônica

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

e encontre seus focos.

SOLUÇÃO Completamos os quadrados como a seguir:

$$4(y^{2} - 2y) - 9(x^{2} - 8x) = 176$$

$$4(y^{2} - 2y + 1) - 9(x^{2} - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y - 1)^{2} - 9(x - 4)^{2} = 36$$

$$\frac{(y - 1)^{2}}{9} - \frac{(x - 4)^{2}}{4} = 1$$

Isso está na forma de (8), exceto que x e y estão trocados por x-4 e y-1. Então,  $a^2=9$ ,  $b^2=4$  e  $c^2=13$ . A hipérbole está deslocada quatro unidades para a direita e uma unidade para cima. Os focos são  $(4,1+\sqrt{13})$  e  $(4,1-\sqrt{13})$  e os vértices são (4,4) e (4,-2). As assíntotas são  $y-1=\pm\frac{3}{2}(x-4)$ . A hipérbole é esboçada na Figura 15.

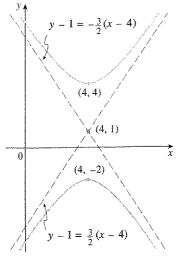


FIGURA 15  $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ 

#### 10.5 Exercícios

1-8 🗆 Encontre o vértice, o foco e a diretriz da parábola e esboce seu gráfico.

1. 
$$x = 2y^2$$

**2.** 
$$4y + x^2 = 0$$

3. 
$$4x^2 = -y$$

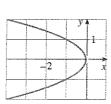
4. 
$$y^2 = 12x$$

$$(x+2)^2 = 8(y-3)$$

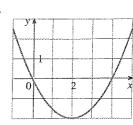
7. 
$$v^2 + 2v + 12x + 25 = 0$$

-10  $\Box$  Encontre uma equação da parábola. Então ache o foco e a diretriz.









#### 686 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

11-16 Encontre os vértices e os focos da elipse e esboce seu gráfico.

11. 
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

12. 
$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$13. \ 4x^2 + y^2 = 16$$

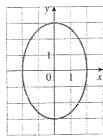
$$14. \ 4x^2 + 25y^2 = 25$$

$$9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$$

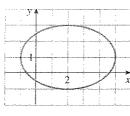
**16.** 
$$x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$$

17-18 🗆 Encontre uma equação da elipse. Então localize seus focos.





18.



19-24 □ Encontre os vértices, os focos e as assíntotas da hipérbole e esboce seu gráfico.

$$192 \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

**20.** 
$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$$

**21.** 
$$y^2 - x^2 = 4$$

**22.** 
$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

**23.** 
$$2y^2 - 3x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$$

**24.** 
$$16x^2 - 9y^2 + 64x - 90y = 305$$

25-30 □ Identifique o tipo de seção cônica cuja equação é dada e ache os vértices e os focos.

**25.** 
$$x^2 = y + 1$$

**26.** 
$$x^2 = y^2 + 1$$

**27.** 
$$x^2 = 4y - 2y^2$$

**28.** 
$$y^2 - 8y = 6x - 16$$

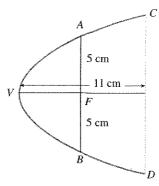
**29.** 
$$y^2 + 2y = 4x^2 + 3$$

$$30. \ 4x^2 + 4x + y^2 = 0$$

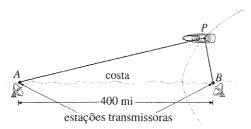
31-48 □ Encontre uma equação para a cônica que satisfaça as condições dadas.

- 31. Parábola, vértice (0, 0), foco (0, -2)
- **32** Parábola, vértice (1, 0), diretriz x = -5
- **33.** Parábola, foco (-4, 0), diretriz x = 2
- **34.** Parábola, foco (3, 6), vértice (3, 2)
- 35. Parábola, vértice (0, 0), eixo x, passando por (1, -4)
- Parábola, eixo vertical, passando por (-2, 3), (0, 3) e (1, 9)
- 37. Elipse, focos  $(\pm 2, 0)$ , vértices  $(\pm 5, 0)$
- **38.** Elipse, focos  $(0, \pm 5)$ , vértices  $(0, \pm 13)$
- **39.** Elipse, focos (0, 2), (0, 6), vértices (0, 0), (0, 8)
- **40.** Elipse, focos (0, -1), (8, -1), vértices (9, -1)

- **41.** Elipse, centro (2, 2), focos (0, 2), vértice (5, 2)
- **42.** Elipse, focos  $(\pm 2, 0)$ , passando por (2, 1)
- **43.** Hipérbole, focos  $(0, \pm 3)$ , vértices  $(0, \pm 1)$
- 44. Hipérbole, focos  $(\pm 6, 0)$ , vértices  $(\pm 4, 0)$
- **45.** Hipérbole, focos (1, 3) e (7, 3), vértices (2, 3) e (6, 3)
- **46** Hipérbole, focos (2, -2) e (2, 8), vértices (2, 0) e (2, 6)
- 47. Hipérbole, vértices ( $\pm 3$ , 0), assíntotas  $y = \pm 2x$
- **48.** Hipérbole, focos (2, 2) e (6, 2), assíntotas y = x 2 e y = 6 x
- 49. Em uma órbita lunar o ponto mais próximo da superfície da Lua é chamado *perilúnio* e o ponto mais distante da superfície da Lua é denominado *apolúnio*. A nave espacial *Apollo 11* foi colocada em uma órbita lunar elíptica com altitude de perilúnio de 110 km e altitude de apolúnio de 314 km (acima da Lua). Encontre uma equação dessa elipse se o raio da Lua for 1.728 km e o centro da Lua estiver em um dos focos.
- 50. Uma secção transversal de um refletor parabólico é mostrada na figura. A lâmpada é colocada em um foco, e a abertura no foco é 10 cm.
  - (a) Ache uma equação da parábola.
  - (b) Encontre o diâmetro da abertura | CD |, 11 cm a partir do vértice



- 51. No sistema de navegação LORAN (LOng RAnge Navigation), duas estações de rádio localizadas em A e B transmitem simultaneamente sinais para um barco ou um avião localizado em P. O computador de bordo converte a diferença de tempo na recepção desses sinais em diferença de distância | PA | | PB | e isso, de acordo com a definição de uma hipérbole, localiza o navio ou o avião em um ramo da hipérbole (veja a figura). Suponha que a estação B esteja localizada 400 milhas a leste da estação A na costa. Um navio recebe o sinal de B 1200 microssegundos (μs) antes de receber o sinal de A.
  - (a) Assumindo que o sinal de rádio viaja a uma velocidade de 980 pés/μs, encontre uma equação da hipérbole na qual o navio esteja.
  - (b) Se o navio for esperado ao norte de B, a que distância da costa estará o navio?



- **52.** Use a definição de uma hipérbole para derivar a Equação 6 para uma hipérbole com focos  $(\pm c, 0)$  e vértices  $(\pm a, 0)$ .
- 53. Mostre que a função definida pelo ramo superior da hipérbole  $y^2/a^2 x^2/b^2 = 1$  tem concavidade para cima.
- **54.** Encontre uma equação para a elipse com focos (1, 1) e (-1, -1) e eixo principal com comprimento igual a 4.
- 55. Determine o tipo de curva representado pela equação

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

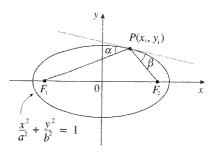
em cada um dos seguintes casos: (a) k > 16, (b) 0 < k < 16 e (c) k < 0.

- (d) Mostre que todas as curvas nas partes (a) e (b) têm os mesmos focos, não importando o valor de k.
- **56.** (a) Mostre que a equação da reta tangente à parábola  $y^2 = 4px$  no ponto  $(x_0, y_0)$  pode ser escrita como

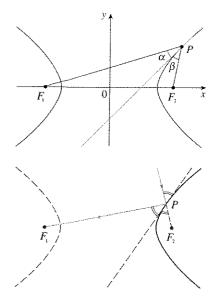
$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

- (b) Onde essa reta tangente intercepta o eixo x? Use esse fato para desenhar a reta tangente.
- 57. Use a Regra de Simpson com n = 10 para estimar o comprimento da elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ .
- 58. O planeta Plutão percorre uma órbita elíptica ao redor do Sol (em um foco). O comprimento do eixo principal é 1,18 × 10<sup>10</sup> km, e o comprimento do eixo secundário é 1,14 × 10<sup>10</sup> km. Use a Regra de Simpson com n = 10 para estimar a distância percorrida pelo planeta durante uma órbita completa ao redor do Sol.
- **59.** Seja  $P(x_1, y_1)$  um ponto na elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  com focos  $F_1 \in F_2$  e seja  $\alpha \in \beta$  os ângulos entre as retas  $PF_1$ ,  $PF_2$  e a elipse, como na figura. Prove que  $\alpha = \beta$ . Isso explica como as

galerias acústicas e a litotripsia funcionam. O som vindo de um foco é refletido e passa pelo outro foco. [Dica: Use a fórmula do Problema 15 da página 276 do Capítulo 3 no Volume I para mostrar que tg  $\alpha = \text{tg }\beta$ .]



60. Seja P(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) um ponto na hipérbole x²/a² - y²/b² = 1 com focos F<sub>1</sub> e F<sub>2</sub> e sejam α e β os ângulos entre as retas PF<sub>1</sub>, PF<sub>2</sub> e a hipérbole, como mostrado na figura. Prove que α = β. (Essa é a propriedade de reflexão da hipérbole. Isso mostra que a luz dirigida ao foco F<sub>2</sub> de um espelho hiperbólico é refletida em direção ao outro foco F<sub>1</sub>.)



### 10.6

#### Seções Cônicas em Coordenadas Polares

Na seção anterior definimos a parábola em termos de um foco e da diretriz, mas definimos a elipse e a hipérbole em termos de dois focos. Nesta seção daremos um tratamento mais uniforme para os três tipos de seções cônicas em termos de um foco e da diretriz. Além disso, colocaremos o foco na origem; assim, uma seção cônica terá uma equação polar

simples. No Capítulo 13, usaremos a equação polar de uma elipse para derivar as Leis de Kepler de movimento planetário.

Teorema Seja F um ponto fixado (chamado foco) e I uma reta fixada (denominada **diretriz**) em um plano. Seja e um número positivo fixado (conhecido como **excentricidade**). O conjunto de todos os pontos P no plano tal que

$$\frac{|PF|}{|PI|} = e$$
 (A razão entre a distância de F e a distância de e é a constante e.)

é uma seção cônica. A cônica é

- (a) uma elipse se e < 1
- (b) uma parábola se e = 1
- (c) uma hipérbole se e > 1

Prova Note que, se a excentricidade for e = 1, então |PF| = |PI|, e assim a condição dada simplesmente se torna a definição de uma parábola, como mostrado na Seção 10.5.

Vamos colocar o foco F na origem e a diretriz paralela ao eixo y e d unidades para a direita. Então a diretriz tem a equação x = d e é perpendicular ao eixo polar. Se o ponto P tiver coordenadas polares  $(r, \theta)$ , vemos a partir da Figura 1 que

$$|PF| = r$$
  $|Pl| = d - r\cos\theta$ 

Então, a condição |PF|/|PI| = e ou |PF| = e|PI| torna-se

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os lados dessa equação polar e convertermos as coordenadas retangulares, teremos

$$x^{2} + y^{2} = e^{2}(d - x)^{2} = e^{2}(d^{2} - 2dx + x^{2})$$
$$(1 - e^{2})x^{2} + 2de^{2}x + y^{2} = e^{2}d^{2}$$

Depois de completar os quadrados, temos

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Se e < 1, reconhecemos a Equação 3 como a equação de uma elipse. De fato, ela é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$

onde

ou

$$h = -\frac{e^2 d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}$$

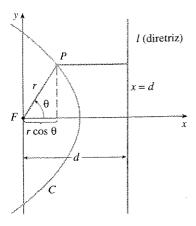


FIGURA 1

Na Seção 10.5 descobrimos que os focos de uma elipse estão a uma distância c a partir do centro, onde

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Isso mostra que 
$$c = \frac{e^2 d}{1 - e^2} = -h$$

e confirma que o foco como definido no Teorema 1 significa a mesma coisa que o foco definido na Seção 10.5. Também segue das Equações 4 e 5 que a excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Se e > 1, então  $1 - e^2 < 0$  e vemos que a Equação 3 representa uma hipérbole. Da mesma maneira que fizemos anteriormente, poderíamos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

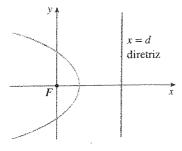
e ver que

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

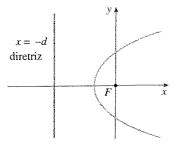
Resolvendo a Equação 2 para r, vemos que a equação polar da cônica mostrada na Figura 1 pode ser escrita como

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

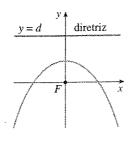
Se a diretriz for escolhida como estando à esquerda do foco x = -d, ou se a diretriz for escolhida como estando paralela ao eixo polar  $y = \pm d$ , então a equação polar da cônica é dada pelo seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 2. (veja os Exercícios 21–23.)



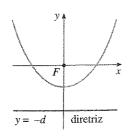
(a)  $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ 



(b) 
$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$



(c) 
$$r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$$



(d) 
$$r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$$

FIGURA 2 Equações polares de cônicas

6 Teorema A equação polar da forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$$
 ou  $r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ 

representa uma seção cônica com excentricidade e. A cônica é uma elipse se e < 1, uma parábola se e = 1 ou uma hipérbole se e > 1.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Encontre uma equação polar para uma parábola que tem seu foco na origem e cuja diretriz é a reta y = -6.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 6 com e=1 e d=6, e usando a parte (d) da Figura 2, vemos que a equação da parábola é

$$r = \frac{6}{1 - \sin \theta}$$

EXEMPLO 2 D Uma cônica é dada pela equação polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encontre a excentricidade, identifique a cônica, localize a diretriz e esboce a cônica. SOLUÇÃO Dividindo numerador e denominador por 3, escrevemos a equação como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Do Teorema 6, vemos que isso representa uma elipse com  $e = \frac{2}{3}$ . Como  $ed = \frac{10}{3}$ , temos

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

logo, a diretriz tem a equação cartesiana x=-5. Quando  $\theta=0$ , r=10; quando  $\theta=\pi$ , r=2. Assim os vértices têm coordenadas polares (10, 0) e (2,  $\pi$ ). A elipse é esboçada na Figura 3.

**EXEMPLO 3** 
$$\Box$$
 Esboce a cônica  $r = \frac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$ .

SOLUÇÃO Escrevendo a equação na forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

vemos que a excentricidade é e=2 e, portanto, representa uma hipérbole. Como ed=6, d=3 e a diretriz tem a equação y=3. Os vértices ocorrem quando  $\theta=\pi/2$  e  $3\pi/2$ , assim eles são  $(2,\pi/2)$  e  $(-6,3\pi/2)=(6,\pi/2)$ . É também útil plotar os pontos de interseção no eixo x. Estes ocorrem quando  $\theta=0$ ,  $\pi$  e em ambos os casos r=6. Para maior precisão poderíamos desenhar as assíntotas. Note que  $r\to\pm\infty$  quando 2+4 sen  $\theta\to0^+$  ou  $0^-$  e 2+4 sen  $\theta=0$  quando sen  $\theta=-\frac{1}{2}$ . Então as assíntotas são paralelas aos raios  $\theta=7\pi/6$  e  $\theta=11\pi/6$ . A hipérbole é esboçada na Figura 4.

Na rotação de seções cônicas descobriremos que é muito mais conveniente usar as equações polares do que as equações cartesianas. Apenas usamos o fato de que (veja o Exercício 75 na Seção 10.3) o gráfico de  $r=f(\theta-\alpha)$  é o gráfico de  $r=f(\theta)$  que gira no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo  $\alpha$ .

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Se a elipse do Exemplo 2 girar por um ângulo  $\pi/4$  ao redor da origem, encontre uma equação polar e plote a elipse resultante.

SOLUÇÃO Obtemos a equação da elipse que gira trocando  $\theta$  por  $\theta-\pi/4$  na equação dada no Exemplo 2. Assim a nova equação é

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Usamos essa equação para plotar a elipse que gira na Figura 5. Note que a elipse gira ao redor de seu foco esquerdo.

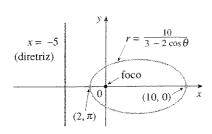


FIGURA 3

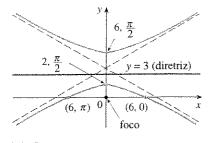


FIGURA 4  $r = \frac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$ 

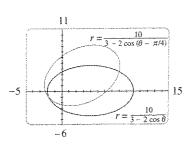


FIGURA 5

Na Figura 6 usamos um computador para esboçar um número de cônicas para demonstrar o efeito da variação da excentricidade e. Note que quando e está próxima de 0 a elípse é praticamente circular, enquanto ela se torna mais alongada quando  $e \rightarrow 1^-$ . Quando e = 1, claro, a cônica é uma parábola.



$$e = 0.5$$

$$e = 0.68$$

$$e = 0.86$$

$$e = 0.96$$



e = 1,1

$$e = 1.4$$

$$e = 4$$

FIGURA 6

#### 10.6 Exercícios

 $1-8 \ \Box$  Escreva uma equação polar de uma cônica com o foco na origem e com os dados fornecidos.

- 1. Hipérbole, excentricidade  $\frac{7}{4}$ , diretriz y = 6
- **2.** Parábola, diretriz x = 4
- **3.** Elipse, excentricidade  $\frac{3}{4}$ , diretriz x = -5
- **4.** Hipérbole, excentricidade 2, diretriz y = -2
- 5. Parábola, vértice em  $(4, 3\pi/2)$
- **6.** Elipse, excentricidade 0,8, vértice  $(1, \pi/2)$
- 7. Elipse, excentricidade  $\frac{1}{2}$ , diretriz  $r = 4 \sec \theta$
- **8.** Hipérbole, excentricidade 3, diretriz r 6 co-sec  $\theta$

৪-৭৯ = (a) Encontre a excentricidade, (b) identifique a cônica, (c) dê uma equação da diretriz e (d) esboce a cônica.

$$9. \quad r = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

**10.** 
$$r = \frac{6}{3 + 2 \sin \theta}$$

11. 
$$r = \frac{12}{4 - \sin \theta}$$

12. 
$$r = \frac{4}{2 - 3\cos\theta}$$

**13.** 
$$r = \frac{9}{6 + 2\cos\theta}$$

14. 
$$r = \frac{5}{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

**15.** 
$$r = \frac{3}{4 - 8\cos\theta}$$

**16.** 
$$r = \frac{4}{2 + \cos \theta}$$

- 17. (a) Encontre a excentricidade e a diretriz da cônica  $r = 1/(4 3\cos\theta)$  e plote a cônica e sua diretriz.
  - (b) Se a cônica girar no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo  $\pi/3$ , escreva a equação resultante e plote sua curva.
- 18. Plote a parábola  $r = 5/(2 + 2 \operatorname{sen} \theta)$  e sua diretriz. Também plote a curva obtida pela rotação dessa parábola ao redor de seu foco por um ângulo  $\pi/6$ .
- 19. Plote as cônicas  $r = e/(1 e \cos \theta)$  com e = 0.4, 0.6, 0.8 e 1.0 na mesma tela. Como o valor de e afeta o formato da curva?
- **20.** (a) Plote as cônicas  $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$  para  $e = 1 \operatorname{e}$  vários valores de d. Como o valor de d afeta o formato da cônica?

- (b) Plote essas cônicas para d = 1 e vários valores de e. Como o valor de e afeta o formato da cônica?
- 21. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz x = -d tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

22. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz y = d tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$$

23. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz y = -d tem a equação polar

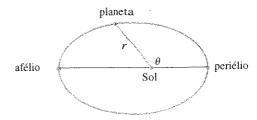
$$r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$$

- **24.** Mostre que as parábolas  $r = c/(1 + \cos \theta)$  e  $r = d/(1 \cos \theta)$  se interceptam com ângulos retos.
- **25.** (a) Mostre que a equação polar de uma elipse com diretriz x = -d pode ser escrita na forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

- (b) Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra ao redor do Sol (em um foco) dado que a excentricidade é cerca de 0,017 e o comprimento do eixo principal é cerca de 2,99 × 10<sup>8</sup> km.
- 26. (a) Os planetas se movem ao redor do Sol em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. As posições de um planeta que estão mais próximas ou mais afastadas do Sol são chamadas respectivamente periélio e afélio do planeta. Use o Exercício 25(a) para mostrar que a distância no periélio de um planeta até o Sol é a(1 e) e que sua distância no afélio é a(1 + e).

(b) Use os dados do Exercício 25(b) para encontrar as distâncias da Terra até o Sol no periélio e no afélio.



- 27. A órbita do cometa de Halley, visto pela última vez em 1986 e com retorno esperado para 2062, é uma elipse com excentricidade 0,97 e com um foco no Sol. O comprimento do eixo principal é 36,18 AU. [Uma unidade astronômica (AU) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de 93 milhões de milhas.] Encontre uma equação polar para a órbita do cometa de Halley. Qual é a distância máxima do cometa até o Sol?
- 28. O cometa Hale-Bopp, descoberto em 1995, tem uma órbita elíptica com excentricidade 0,9951 e o comprimento do eixo principal é 356,5 AU. Encontre uma equação polar para a órbita desse cometa. Quão perto do Sol chega esse cometa?
- 29. O planeta Mercúrio percorre uma órbita elíptica com excentricidade 0,206. Sua distância mínima do Sol é 4,6 × 10<sup>7</sup> km. Use os resultados do Exercício 26(a) para encontrar a distância máxima até o Sol.
- 30. A distância do planeta Plutão até o Sol é 4,43 × 10<sup>9</sup> km no periélio e 7,37 × 10<sup>9</sup> km no afélio. Use o Exercício 26 para encontrar a excentricidade da órbita de Plutão.
- 31. Usando os dados do Exercício 29, calcule a distância percorrida pelo planeta Mercúrio durante uma órbita completa ao redor do Sol. (Se sua calculadora ou sistema algébrico computacional avaliar as integrais definidas, use-o. Caso contrário, use a Regra de Simpson.)

#### 10 Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. (a) O que é uma curva paramétrica?
  - (b) Como você esboça uma curva paramétrica?
- 2. (a) Como você calcula a inclinação de uma tangente a uma curva paramétrica?
  - (b) Como você calcula a área sob uma curva paramétrica?
- 3. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes itens:
  - (a) O comprimento de uma curva paramétrica.
  - (b) A área da superfície obtida pela rotação de uma curva paramétrica ao redor do eixo x.
- **4.** (a) Use um diagrama para explicar o significado das coordenadas polares  $(r, \theta)$  de um ponto.

- (b) Escreva as equações para expressar as coordenadas cartesianas (x, y) de um ponto em termos de coordenadas polares.
- (c) Quais equações você usaria para encontrar as coordenadas polares de um ponto se você soubesse as coordenadas cartesianas?
- 5. (a) Como você calcula a inclinação de uma reta tangente a uma curva polar?
  - (b) Como você calcula a área de uma região limitada por uma curva polar?
  - (c) Como você calcula o comprimento de uma curva polar?

7. (a) Dê uma definição de uma elipse em termos dos focos.

(b) Escreva uma equação para a elipse com focos  $(\pm c, 0)$  e vértices  $(\pm a, 0)$ .

8. (a) Dê uma definição de uma hipérbole em termos dos focos.

(b) Escreva uma equação para a hipérbole com os focos  $(\pm c, 0)$  e os vértices  $(\pm a, 0)$ .

(c) Escreva equações para as assíntotas da hipérbole na parte (b). 693

9. (a) O que é a excentricidade de uma seção cônica?

(b) O que você pode dizer sobre a excentricidade se a seção cônica for uma elipse? Uma hipérbole? Uma parábola?

(c) Escreva uma equação polar para uma seção cônica com excentricidade e e diretriz x = d. O que acontece se a diretriz for x = -d? y = d? y = -d?

#### **TESTES FALSO-VERDADEIRO**

Determine se a declaração é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, explique o porquê. Se for falsa, explique o porquê ou dê um contra-exemplo.

1. Se a curva paramétrica x = f(t), y = g(t) satisfaz g'(1) = 0, então ela tem uma tangente horizontal quando t = 1.

2. Se x = f(t) e y = g(t) têm derivadas segundas, então  $d^2y/dx^2 = (d^2y/dt^2)/(d^2x/dt^2)$ .

**3.** O comprimento da curva x = f(t) e y = g(t),  $a \le t \le b$   $\notin$   $\int_{a}^{b} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$ 

Se um ponto é representado por (x, y) em coordenadas cartesianas (onde x ≠ 0) e (r, θ) em coordenadas polares então θ = tg<sup>-1</sup> (y/x).

5. As curvas polares  $r = 1 - \sin 2\theta e r = \sin 2\theta - 1$  têm o mesmo gráfico.

**6.** As equações r = 2,  $x^2 + y^2 = 4$  e x = 2 sen 3t,  $y = \cos 3t$   $(0 \le t \le 2\pi)$  têm todas o mesmo gráfico.

7. As equações paramétricas  $x = t^2$ ,  $y = t^4$  possuem o mesmo gráfico de  $x = t^3$ ,  $y = t^6$ .

**8.** O gráfico de  $y^2 = 2y + 3x$  é uma parábola.

 A reta tangente a uma parábola intercepta a parábola apenas uma vez.

10. Uma hipérbole nunca intercepta sua diretriz.

1-4 □ Esboce a curva paramétrica e elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva.

1.  $x = t^2 + 4t$ , y = 2 - t,  $-4 \le t \le 1$ 

2.  $x = 1 + e^{2i}$ ,  $y = e^{i}$ 

3.  $x = \operatorname{tg} \theta$ ,  $y = \cot \theta$ 

para a curva  $y = \sqrt{x}$ .

4.  $x = 2\cos\theta$ ,  $y = 1 + \sin\theta$ 

EXERCÍCIOS

7-14 ☐ Esboce a curva polar.

7.  $r=1-\cos\theta$ 

8.  $r = \sin 4\theta$ 

**9.**  $r = 1 + \cos 2\theta$ 

**10.**  $r = 3 + \cos 3\theta$ 

11.  $r^2 = \sec 2\theta$ 

**12.**  $r = 2\cos(\theta/2)$ 

 $13. \ \ r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ 

14.  $r = \frac{8}{4 + 3 \sin \theta}$ 

15-16 □ Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

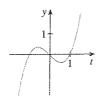
**15.** x + y = 2

16.  $x^2 + y^2 = 2$ 

**6.** Use os gráficos de x = f(t) e y = g(t) para esboçar a curva paramétrica x = f(t), y = g(t). Indique com setas a direção na qual a curva é traçada quanto t aumenta.

5. Escreva os diferentes conjuntos de equações paramétricas





17. A curva com equação polar r = (sen θ)/θ é chamada cocleóide. Use um gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas para esboçar a cocleóide manualmente. Então plote-a com uma máquina para verificar seu esboço.

**18.** Plote a elipse  $r = 2/(4 - 3 \cos \theta)$  e sua diretriz. Também plote a elipse obtida pela rotação ao redor da origem, com um ângulo de  $2\pi/3$ .

#### 694 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

19-22 © Calcule a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto correspondente ao valor especificado do parâmetro.

19. 
$$x = \ln t$$
,  $y = 1 + t^2$ ;  $t = 1$ 

**20.** 
$$x = t^3 + 6t + 1$$
,  $y = 2t - t^2$ ;  $t = -1$ 

**21.** 
$$r=e^{-\theta}$$
;  $\theta=\pi$ 

**22.** 
$$r = 3 + \cos 3 \theta$$
;  $\theta = \pi/2$ 

23–24  $\Box$  Calcule dy/dx e  $d^2y/dx^2$ .

23. 
$$x = t \cos t$$
,  $y = t \sin t$ 

**24.** 
$$x = 1 + t^2$$
,  $y = t - t^3$ 

**25.** Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo na curva  $x = t^3 - 3t$ ,  $y = t^2 + t + 1$  Então use o

- cálculo para calcular as coordenadas exatas.

  26. Calcule a área da região limitada pelo laço da curva no
- 27. Em que pontos a curva

Exercício 25.

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t$$
  $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ 

tem tangentes verticais ou horizontais? Use essa informação para ajudar a esboçar a curva.

- 28. Calcule a área limitada pela curva no Exercício 27.
- 29. Calcule a área limitada pela curva  $r^2 = 9 \cos 5\theta$ .
- **30.** Calcule a área limitada pelo laço interno da curva  $r = 1 3 \operatorname{sen} \theta$ .
- 31. Calcule os pontos de interseção das curvas r = 2 e  $r = 4 \cos \theta$ .
- **32.** Encontre os pontos de interseção das curvas  $r = \text{co-tg } \theta$  e  $r = 2 \cos \theta$ .
- 33. Encontre a área da região que está dentro de ambos os círculos  $r=2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{e} r=\operatorname{sen} \theta + \cos \theta$ .
- 34. Encontre a área da região que está dentro da curva  $r = 2 + \cos 2\theta$ , mas fora da curva  $r = 2 + \sin \theta$ .

35–38 □ Calcule o comprimento da curva.

**35.** 
$$x = 3t^2$$
,  $y = 2t^3$ ,  $0 \le t \le 2$ 

**36.** 
$$x = 2 + 3t$$
,  $y = \cosh 3t$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**37.** 
$$r = 1/\theta$$
,  $\pi \le \theta \le 2\pi$ 

**38.** 
$$r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi$$

39-40 Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

**39.** 
$$x = 4\sqrt{t}$$
,  $y = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2t^2}$ ,  $1 \le t \le 4$ 

**40.** 
$$x = 2 + 3t$$
,  $y = \cosh 3t$ ,  $0 \le t \le 1$ 

41. As curvas definidas pelas equações paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

são chamadas estrofóides (do grego, girar, torcer). Investigue como essas curvas mudam quando c varia.

**42.** Uma família de curvas tem equações polares  $r^a = |\sin 2\theta|$ , onde a é um número positivo. Investigue como essas curvas mudam quando a varia.

43-46 □ Encontre os focos e os vértices e esboce o gráfico.

**43.** 
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

**44.** 
$$4x^2 - y^2 = 16$$

**45.** 
$$6y^2 + x - 36y + 55 = 0$$

**46.** 
$$25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$$

Encontre uma equação da parábola com foco (0, 6) e diretriz
 v = 2

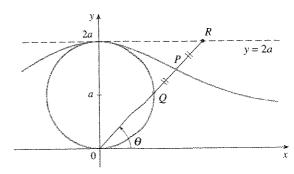
**48.** Encontre uma equação da hipérbole com focos  $(0, \pm 5)$  e vértices  $(0, \pm 2)$ .

**49.** Encontre uma equação da hipérbole com os focos  $(\pm 3, 0)$  e as assíntotas  $2y = \pm x$ .

50. Encontre uma equação da elipse com focos (3, ±2) e eixo principal com comprimento 8.

**51.** Encontre uma equação para a elipse que divida um vértice e um foco com a parábola  $x^2 + y = 100$  e que tenha seu outro foco na origem.

- **52.** Mostre que, se *m* for qualquer número real, então existem exatamente duas retas de inclinação *m* tangentes à elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  e suas equações são  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ .
- 53. Encontre uma equação polar para a elipse com foco na origem, excentricidade  $\frac{1}{3}$  e diretriz com equação r=4 sec  $\theta$ .
- **54.** Mostre que os ângulos entre o eixo polar e as assíntotas da hipérbole  $r = ed/(1 e\cos\theta)$  e > 1 são dados por  $\cos^{-1}(\pm 1/e)$ .
- 55. Na figura o círculo de raio a é estacionário, e para cada  $\theta$  o ponto P é o ponto médio do segmento QR. A curva traçada por P para  $0 < \theta < \pi$  é denominada **curva de arco longo**. Encontre as equações paramétricas para essa curva.



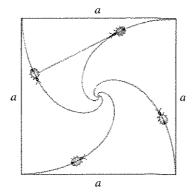
#### Problemas Quentes

1. Uma curva é definida pelas equações paramétricas

$$x = \int_{1}^{r} \frac{\cos u}{u} du \qquad y = \int_{1}^{r} \frac{\sin u}{u} du$$

Calcule o comprimento do arco da curva a partir da origem até o ponto mais próximo onde existe uma reta vertical tangente.

- 2. (a) Encontre os pontos mais altos e mais baixos sobre a curva  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .
  - (b) Esboce a curva. (Note que ela é simétrica em relação a ambos os eixos e a ambas as retas  $y = \pm x$ ; assim, inicialmente é suficiente considerar  $y \ge x \ge 0$ .)
  - (c) Use as coordenadas polares e um sistema algébrico computacional para encontrar a área dentro da curva.
- 3. Qual é o menor visor que contém cada membro da família de curvas polares  $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ , onde  $0 \le c \le 1$ ? Ilustre sua resposta ao plotar vários membros da família no visor da calculadora.
  - 4. Quatro insetos são colocados nos quatro cantos de um quadrado com lado de comprimento a. Os insetos andam no sentido anti-horário na mesma velocidade e cada um deles sempre anda diretamente em direção ao próximo inseto. Eles se aproximam do centro do quadrado ao longo de um caminho em espiral.
    - (a) Encontre a equação polar do caminho do inseto supondo que o pólo esteja no centro do quadrado. (Use o fato de que a reta ligando um inseto até o próximo é tangente ao caminho do inseto.)
    - (b) Encontre a distância percorrida por um inseto quando ele encontra os outros insetos no centro.



5. Uma curva chamada fólio de Descartes é definida pelas equações paramétricas

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

- (a) Mostre que, se (a, b) estiverem na curva, então (b, a) também estão; isto é, a curva é simétrica em relação à reta y = x. Onde a curva intercepta essa reta?
- (b) Encontre os pontos na curva onde as retas tangentes são horizontais ou verticais.
- (c) Mostre que a reta y = -x 1 é uma assíntota inclinada.
- (d) Esboce a curva,



$$r = \frac{3 \sec \theta \lg \theta}{1 + \lg^3 \theta}$$

(g) Encontre a área da região dentro do laço dessa curva.

(h) Mostre que a área do laço é a mesma que está entre a assíntota e os infinitos ramos da curva. (Use um sistema algébrico computacional para avaliar a integral.)

# 11

### Sequências Infinitas e Séries

As funções de Bessel, usadas para modelar as vibrações de tambores e pratos, são definidas como somas de séries infinitas na Seção 11.8. Seqüências infinitas e séries foram introduzidas rapidamente no Volume I em conexão com os paradoxos de Zenon e a representação decimal de números. Sua importância em cálculo surge da idéia de Newton da representação de funções como somas de séries infinitas. Por exemplo, para encontrar áreas ele freqüentemente integrava uma função expressando-a primeiro como uma série e então integrando cada termo da série. Seguiremos sua idéia na Seção 11.10 para integrar as funções como  $e^{-x^2}$ . (Lembre-se de que, anteriormente, não pudemos fazer isso.) Muitas das funções que surgem em física, matemática e química, tais como as funções de Bessel, são definidas como somas de séries; assim, é importante nos familiarizarmos com os conceitos básicos de convergência de seqüências infinitas e séries.

Físicos também usam séries de outra maneira, como veremos na Seção 11.12. Em áreas de estudo tão diversas quanto óptica, relatividade especial e eletromagnetismo, eles analisam fenômenos trocando uma função pelos primeiros termos da série que a representa.

#### 11.1 Seqüências

Uma seqüência pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

O número  $a_1$  é chamado primeiro termo,  $a_2$  é o segundo termo e, em geral,  $a_n$  é o n-ésimo termo. Podemos lidar exclusivamente com sequências infinitas e, assim, cada termo  $a_n$  terá um sucessor  $a_{n+1}$ .

Note que, para cada inteiro positivo n, existe um número correspondente  $a_n$  e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas geralmente escrevemos  $a_n$  em vez da notação de função f(n) para o valor da função no número n.

NOTAÇÃO  $\Box$  A sequência  $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$  é também denotada por

$$\{a_n\}$$
 ou  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Algumas seqüências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos a seguir, damos três descrições da seqüência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da seqüência. Note que n não precisa começar em 1.

(a) 
$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
  $a_n = \frac{n}{n+1}$   $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$   
(b)  $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$   $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$   $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \dots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \dots\right\}$ 

(c) 
$$\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$$
  $a_n = \sqrt{n-3}, \ n \ge 3$   $\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-3}, \dots\}$   
(d)  $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$   $a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, \ n \ge 0$   $\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, \cos\frac{n\pi}{6}, \dots\right\}$ 

EXEMPLO 2 

Ache uma fórmula para o termo geral  $a_n$  da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

SOLUÇÃO Nos é dado que

$$a_1 = \frac{3}{5}$$
  $a_2 = -\frac{4}{15}$   $a_3 = \frac{5}{125}$   $a_4 = -\frac{6}{625}$   $a_5 = \frac{7}{3.125}$ 

Observe que os numeradores dessas frações começam com 3 e são incrementados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo. O segundo termo tem numerador 4; o terceiro, numerador 5; generalizando, o n-ésimo termo terá numerador n+2. Os denominadores são potências de 5, logo  $a_n$  tem denominador  $5^n$ . Os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo, assim precisamos multiplicar por uma potência de -1. No exemplo I(b) o fator  $(-1)^n$  significa que começamos com um termo negativo. Neste exemplo, queremos começar com um termo positivo e assim usamos  $(-1)^{n-1}$  ou  $(-1)^{n+1}$ . Portanto,

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}$$

EXEMPLO 3 

Aqui estão algumas seqüências que não têm uma equação de definição simples.

- (a) A sequência  $\{p_n\}$ , onde  $p_n$  é a população do mundo no dia  $1^{\circ}$  de janeiro do ano n.
- (b) Se fizermos  $a_n$  ser o dígito na n-ésima casa decimal do número e, então  $\{a_n\}$  é uma sequência bem-definida cujos primeiros termos são

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) A seqüência de Fibonacci  $\{f_n\}$  é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1$$
  $f_2 = 1$   $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$   $n \ge 3$ 

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos (veja o Exercício 65).

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a),  $a_n = n/(n+1)$  pode ser desenhada plotando-se seus termos em uma reta, como na Figura 1, ou plotando-se seu gráfico, como na Figura 2. Note que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1)$$
  $(2, a_2)$   $(3, a_3)$  ...  $(n, a_n)$  ...

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da seqüência  $a_n = n/(n+1)$  estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferenca

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$



FIGURA 1

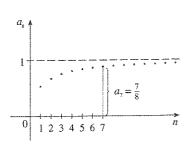


FIGURA 2

pode ser tão pequena quanto se desejar tomando-se n suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L$$

significa que os termos da sequência  $\{a_n\}$  aproximam-se de L quando n torna-se grande. Note que a seguinte definição precisa do limite de uma sequência é muito parecida com a definição de um limite de uma função no infinito dada na Seção 2.6 do Volume I.

🗓 Definição Uma sequência  $\{a_n\}$  tem o **limite** L e escrevemos

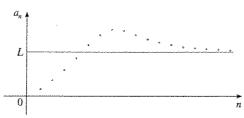
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

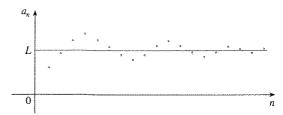
se podemos fazer os termos  $a_n$  tão perto de L quanto se queira ao se fazer n suficientemente grande. Se  $\lim_{n\to\infty}a_n$  existir, dizemos que a seqüência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a seqüência **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas seqüências que têm limite L.

FIGURA 3

Gráficos de duas seqüências com  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 





Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

☐ Compare esta definição com a Definição 2.6.7 do Volume 1.

2 Definição Uma sequência  $\{a_n\}$  tem o **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada  $\varepsilon > 0$  existir um correspondente inteiro N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
 sempre que  $n > N$ 

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos  $a_1, a_2, a_3, \ldots$  são plotados em uma reta. Não importa quão pequeno um intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  seja escolhido, existe um N tal que todos os termos da seqüência de  $a_{N+1}$  em diante devem estar naquele intervalo.

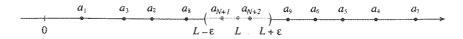


FIGURA 4

Outra ilustração da Definição 2 é dada na Figura 5. Os pontos no gráfico de  $\{a_n\}$  devem estar entre as retas horizontais  $y = L + \varepsilon$  e  $y = L - \varepsilon$  se n > N. Esse desenho deve ser válido não importa quão pequeno  $\varepsilon$  seja escolhido, mas geralmente  $\varepsilon$  menor requer N maior.

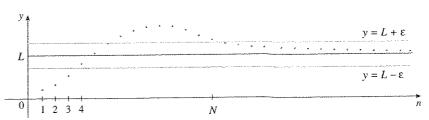


FIGURA 5

A comparação da Definição 2 com a Definição 2.6.7 (Volume I) mostra que a única diferença entre  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$  e  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$  é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

[3] Teorema Se  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$  e  $f(n) = a_n$  quando n é um inteiro, então  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ .

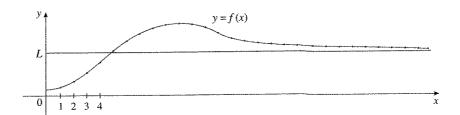


FIGURA 6

Em particular, como sabemos que  $\lim_{x\to\infty} (1/x') = 0$  quando r > 0 (Teorema 2.6.5, Volume I), temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{se } r > 0$$

Se  $a_n$  se tornar grande quando n se tornar grande, usaremos a notação  $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ . A seguinte definição precisa é similar à Definição 2.6.9 (Volume I).

**[5]** Definição  $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$  significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$a_n > M$$
 sempre que  $n > N$ 

Se  $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ , então a seqüência  $\{a_n\}$  é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que  $\{a_n\}$  diverge para  $\infty$ .

As Leis do Limite dadas na Seção 2.3 do Volume I também valem para os limites de seqüências, e suas provas são similares.

Leis do Limite para Seqüências

Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to a} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para seqüências como estas (veja a Figura 7).

Se  $a_n \le b_n \le c_n$  para  $n \ge n_0$  e  $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = L$ , então  $\lim_{n \to \infty} b_n = L$ .

Outro fato útil sobre limites de seqüências é dado pelo seguinte teorema, cuja prova fica para o Exercício 69.

Se  $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ , então  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .

Teorema do Confronto para Seqüências

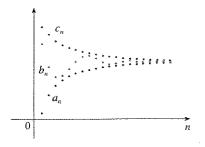


FIGURA 7

A sequência  $\{b_n\}$  está entre as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{c_n\}$ .

□ Isso mostra que a estimativa que fizemos anteriormente a partir das Figuras 1 e 2 estava correta.

EXEMPLO 4  $\Box$  Calcule  $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ .

6 Teorema

SOLUÇÃO O método é similar àquele usado na Seção 2.6 no Volume I: Divida o numerador e o denominador pela maior potência de *n* e então use as Leis do Limite.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{\lim_{n \to \infty} 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}$$
$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Aqui usamos a Equação 4 com r = 1.

**EXEMPLO 5**  $\square$  Calcule  $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$ .

SOLUÇÃO Note que numerador e denominador se aproximam do infinito quando  $n\to\infty$ . Não podemos empregar a Regra de L'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a

sequências, mas sim a funções de uma variável real. Contucto, podemos usar a Regra de L'Hôspital para a função relacionada  $f(x) = (\ln x)/x$  e obter

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Portanto, pelo Teorema 3, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

EXEMPLO 6  $\Box$  Determine quando a sequência  $a_n = (-1)^n$  é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

O gráfico dessa sequência é exibido na Figura 8. Como os termos oscilam entre 1 e -1 infinitamente,  $a_n$  não se aproxima de número algum. Então,  $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$  não existe; isto é, a sequência  $\{(-1)^n\}$  é divergente.

EXEMPLO 7  $\Box$  Avalle  $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$  se ele existir.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Assim, pelo Teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$

EXEMPLO 8  $\Box$  Discuta a convergência da sequência  $a_n = n!/n^n$ , onde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ .

SOLUÇÃO Numerador e denominador se aproximam do infinito quando  $n \to \infty$ , mas aqui não temos uma função correspondente para usar com a Regra de L'Hospital (x! não é definido quando x não é um inteiro). Vamos escrever alguns termos para pensarmos sobre o que acontece com  $a_n$  quando n torna-se maior:

$$a_1 = 1$$
  $a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$   $a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$ 

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Parece, a partir dessas expressões e do gráfico na Figura 10, que os termos estão decrescendo e talvez se aproximem de 0. Para confirmar isso, observe na Equação 7 que

$$a_n = \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \right)$$

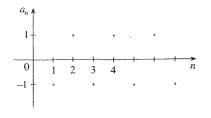


FIGURA 8

 O gráfico da seqüência no Exemplo 6 é mostrado na Figura 9 e respalda a resposta.

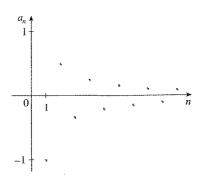


FIGURA 9

□ Criando Gráficos de Seqüências
Alguns sistemas algébricos
computacionais têm comandos
especiais que nos permitem criar
seqüências e plotá-las diretamente.
Com a maioria das calculadoras
gráficas, contudo, as seqüências
podem ser plotadas usando-se
equações paramétricas. Por exemplo,
a seqüência no Exemplo 8 pode ser
plotada inserindo-se as equações
paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t'$$

e plotando-se no modo pontual com t=1, marcando a etapa t igual a 1. O resultado é exposto na Figura 10.

FIGURA 10

Note que a expressão em parênteses é no máximo 1, porque o numerador é menor (ou igual) ao denominador. Assim

$$0 < a_n \le \frac{1}{n}$$

Sabemos que  $1/n \to 0$  quando  $n \to \infty$ . Portanto,  $a_n \to 0$  quando  $n \to \infty$  pelo Teorema do Confronto.

**EXEMPLO 9**  $\square$  Para que valores de r a sequência  $\{r^n\}$  é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 2.6 e dos gráficos das funções exponenciais na Seção 1.5, ambas do Volume I, que  $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$  para a>1 e  $\lim_{x\to\infty}a^x=0$  para 0< a<1. Logo, colocando a=r e usando o Teorema 2, temos

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

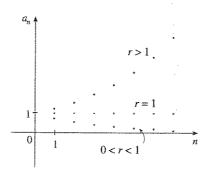
É óbvio que

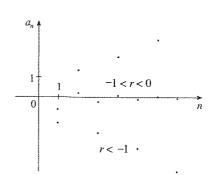
$$\lim_{n \to \infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} 0^n = 0$$

Se -1 < r < 0, então 0 < |r| < 1, assim

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$$

e portanto  $\lim_{n\to\infty} r^n=0$  pelo Teorema 6. Se  $r\leqslant -1$ , então  $\{r^n\}$  diverge como no Exemplo 6. A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de r. (O caso r=-1 é mostrado na Figura 8.)





\$1000 \$1000 \$1000

FIGURA 11 A sequência  $a_n = r^n$ 

Os resultados do Exemplo 9 estão resumidos a seguir para uso futuro.

8 A sequência  $\{r^n\}$  é convergente se  $-1 < r \le 1$  e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

[9] Definição Uma sequência  $\{a_n\}$  é denominada crescente se  $a_n < a_{n+1}$  para todo  $n \ge 1$ , isto é,  $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ . É chamada decrescente se  $a_n > a_{n+1}$  para todo  $n \ge 1$ . É dita monotônica se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 10  $\Box$  A sequência  $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$  é decrescente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

para todo  $n \ge 1$ . (O lado direito é menor porque tem um denominador maior.)

EXEMPLO 11  $\Box$  Mostre que a sequência  $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$  é decrescente.

SOLUÇÃO 1 Devemos mostrar que  $a_{n+1} < a_n$ , isto é,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Essa desigualdade é equivalente àquela que obtivemos pela multiplicação cruzada:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]$$

$$\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n$$

$$\iff 1 < n^2+n$$

É óbyio que  $n \ge 1$  é verdadeiro para  $n^2 + n > 1$ . Portanto,  $a_{n+1} < a_n$ , e assim  $\{a_n\}$  é decrescente.

SOLUÇÃO 2 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \qquad \text{sempre que } x^2 > 1$$

Então, f é decrescente em  $(1, \infty)$ , e assim f(n) > f(n+1). Portanto,  $\{a_n\}$  é decrescente.

**10** Definição Uma sequência  $\{a_n\}$  é limitada superiormente se existir um número M tal que

$$a_n \leq M$$
 para todo  $n \geq 1$ 

E é limitada inferiormente se existir um número m de forma que

$$m \le a_n$$
 para todo  $n \ge 1$ 

Se ela for limitada superior e inferiormente, então  $\{a_n\}$  é uma sequência limitada.

843

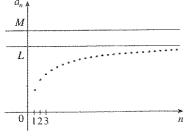


FIGURA 12

Por exemplo, a sequência  $a_n = n$  é limitada inferiormente  $(a_n > 0)$  mas não superiormente. A sequência  $a_n = n/(n + 1)$  é limitada, porque  $0 < a_n < 1$  para todo n.

Sabemos que nem toda seqüência limitada é convergente [por exemplo, a seqüência  $a_n = (-1)^n$  satisfaz  $-1 \le a_n \le 1$ , mas é divergente, como mostrado no Exemplo 6], nem toda seqüência monotônica é convergente  $(a_n = n \to \infty)$ . Mas se uma seqüência for limitada e monotônica, então ela deve ser convergente. Esse fato é provado no Teorema 11, porém intuitivamente você pode entender por que isso é verdadeiro olhando a Figura 12. Se  $\{a_n\}$  for crescente e  $a_n \le M$  para todo n, então os termos são forçados a se aglomerar e se aproximar algum número L.

A prova do Teorema 11 é baseada no **Axioma da Completividade** para o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, que diz que, se S for um conjunto não vazio de números reais que tem um limitante superior M ( $x \le M$  para todo x em S), então S tem um **limite superior mínimo** b. (Isso significa que b é um majorante para S, mas, se M for um outro majorante, então  $b \le M$ .) O Axioma da Completividade é uma expressão do fato de que não existe salto nem buraco na reta dos números reais.

[11] Teorema da Seqüência Monotônica Toda seqüência limitada, monotônica, é convergente.

Prova Suponha que  $\{a_n\}$  seja uma seqüência crescente. Como  $\{a_n\}$  é limitada, o conjunto  $S = \{a_n \mid n \ge 1\}$  tem um majorante. Pelo Axioma da Completividade ele tem um menor limitante superior = supremo L. Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $L - \varepsilon n \tilde{a}o$  é um majorante para S (porque L é o *menor* dos majorantes). Portanto

$$a_N > L - \varepsilon$$
 para algum inteiro N

Mas a sequência é crescente, assim  $a_n \ge a_N$  para cada n > N. Então, se n > N, temos

$$a_n > L - \varepsilon$$

assim

$$0 \le L - a_n < \varepsilon$$

porque  $a_n \leq L$ . Então

$$|L - a_n| < \varepsilon$$
 sempre que  $n > N$ 

assim  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ .

Uma prova similar (usando o máximo minorante ou o maior limitante inferior) funciona se  $\{a_n\}$  for decrescente.

A prova do Teorema 11 mostra que uma seqüência que é crescente e limitada superiormente é convergente. (Do mesmo modo, uma seqüência decrescente que é limitada inferiormente é convergente.) Esse fato é usado muitas vezes para lidar com séries infinitas.

**EXEMPLO 12**  $\square$  Investigue a sequência  $\{a_n\}$  definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2$$
  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$  para  $n = 1, 2, 3, ...$ 

SOLUÇÃO Começamos calculando os primeiros termos:

$$a_1 = 2$$
  $a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4$   $a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5$   
 $a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5$   $a_5 = 5,75$   $a_6 = 5,875$   
 $a_7 = 5,9375$   $a_8 = 5,96875$   $a_9 = 5,984375$ 

I A indução matemática é freqüentemente usada para trabalhar com seqüências recursivas. Veja a página 81 do Volume I para uma discussão do Princípio da Indução Matemática. Esses termos iniciais sugerem que a seqüência é crescente e os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a seqüência é crescente, usamos a indução matemática para mostrar que  $a_{n+1} > a_n$  para todo  $n \ge 1$ . Isso é verdadeiro para n = 1 porque  $a_2 = 4 > a_1$ . Se assumirmos que isso é verdadeiro para n = k, então, temos

$$a_{k+1} > a_k$$
 assim 
$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$
 
$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$
 Então 
$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Deduzimos que  $a_{n+1} > a_n$  é verdadeiro para n = k + 1. Portanto, por indução a desigualdade é verdadeira para todo n.

A seguir verificamos que  $\{a_n\}$  é limitada mostrando que  $a_n < 6$  para todo n. (Como a seqüência é crescente, já sabemos que ela tem um minorante:  $a_n \ge a_1 = 2$  para todo n.) Sabemos que  $a_1 < 6$ , assim a asserção é verdadeira para n = 1. Suponha que isso seja verdadeiro para n = k. Logo,

$$a_k < 6$$
 assim 
$$a_k + 6 < 12$$
 
$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) = 6$$
 Então 
$$a_{k+1} < 6$$

Isso mostra, por indução matemática, que  $a_n < 6$  para todo n.

Como a seqüência  $\{a_n\}$  é crescente e limitada, o Teorema 11 garante que ela tem um limite. O teorema não nos conta qual é o valor do limite. Mas agora que sabemos que  $L = \lim_{n\to\infty} a_n$  existe, podemos usar a relação de recorrência para escrever

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} (a_n + 6) = \frac{1}{2} (\lim_{n \to \infty} a_n + 6) = \frac{1}{2} (L + 6)$$

☐ Uma prova desse fato é pedida no Exercício 52.

Como  $a_n \to L$ , segue que  $a_{n+1} \to L$ , também (quando  $n \to \infty$ ,  $n+1 \to \infty$ , igualmente). Assim, temos

$$L = \frac{1}{2}(L+6)$$

Resolvendo essa equação para L temos L = 6, como previsto.

## Exercícios

- 1. (a) O que é uma sequência?
  - (b) O que significa dizer que  $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$ ?
  - (c) O que significa dizer que  $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ?
- 2. (a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
  - (b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3-8 🗆 Liste os cinco primeiros termos da sequência.

3. 
$$a_n = 1 - (0.2)^n$$

4. 
$$a_n = \frac{n+1}{3n-1}$$

5. 
$$a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$$

**6.** 
$$\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$$

7. 
$$a_1 = 3$$
,  $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 

7. 
$$a_1 = 3$$
,  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  8.  $a_1 = 4$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$ 

9-14 🗆 Encontre uma fórmula para o termo geral  $a_n$  da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

**9.** 
$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$$

**10.** 
$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

**12.** 
$$\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$$

$$\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\}$$

15-49 □ Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

**15.** 
$$a_n = n(n-1)$$

**16.** 
$$a_n = \frac{n+1}{3n-1}$$

$$a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$$

**18.** 
$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$$

**19.** 
$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

**20.** 
$$a_n = \frac{n}{1 + \sqrt{n}}$$

**21.** 
$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$$
  
**23.**  $a_n = \cos(n/2)$ 

**22.** 
$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$$

**23.** 
$$a_n = \cos(n/2)$$

**24.** 
$$a_n = \cos(2/n)$$

**25.** 
$$\left\{ \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right\}$$

27. 
$$\left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1} \right\}$$

$$28. \quad \left\{ \frac{\ln n}{\ln 2n} \right\}$$

21. 
$$\left\{ e^{2n} - 1 \right\}$$
29.  $\left\{ n^2 e^{-n} \right\}$ 

30. 
$$\{n \cos n\pi\}$$

$$a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$$

$$32 a_n = \ln(n+1) - \ln n$$

**33.** 
$$a_n = n \, \text{sen}(1/n)$$

**34.** 
$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2 - 1}$$

**35.** 
$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/n}$$

**36.** 
$$a_n = \frac{\sin 2n}{1 + \sqrt{n}}$$

**38.** 
$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$$

**39.** 
$$a_n = \frac{n!}{2^n}$$

**39.** 
$$a_n = \frac{n!}{2^n}$$
 **40.**  $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$ 

41-48 🗆 Use um gráfico da seqüência para decidir se a seqüência é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, estime o valor do limite a partir do gráfico e então prove sua estimativa. (Veja a margem esquerda na página 704 com sugestões para gráficos de seqüências).

**41.** 
$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

**42.** 
$$a_n = 2 + (-2/\pi)^n$$

43. 
$$\left\{ \operatorname{arctg} \left( \frac{2n}{2n+1} \right) \right\}$$
 44.  $\left\{ \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}} \right\}$ 

$$14. \quad \left\{ \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}} \right\}$$

**45.** 
$$a_n = \frac{n^3}{n!}$$

**46.** 
$$a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$$

**47.** 
$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$$

**48.** 
$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$$

- 49. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá  $a_n = 1.000(1.06)^n$  dólares.
  - (a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência  $\{a_n\}$ .
  - (b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.
- 50. Calcule os primeiros 40 termos da sequência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ \'e um n\'umero par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ \'e um n\'umero \'impar} \end{cases}$$

e  $a_1 = 11$ . Faça o mesmo para  $a_1 = 25$ . Estabeleça uma conjectura sobre esse tipo de sequência.

- **51.** Para quais valores de r a sequência  $\{nr^n\}$ é convergente?
- **52.** (a) Se  $\{a_n\}$  for convergente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

- (b) Uma sequência  $\{a_n\}$  é definida por  $a_1 = 1$  e  $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$  para  $n \ge 1$ . Assumindo que  $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.
- 53 Suponha que você saiba que  $\{a_n\}$  é uma seqüência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

54-60 Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A sequência é limitada?

**54.** 
$$a_n = \frac{1}{5^n}$$

**55.** 
$$a_n = \frac{1}{2n+3}$$

**56.** 
$$a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$$

**57.** 
$$a_n = \cos(n\pi/2)$$

**58.** 
$$a_n = ne^{-n}$$

**59.** 
$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

**60.** 
$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

61. Calcule o limite da sequência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

- **62.** Uma sequência  $\{a_n\}$  é dada por  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ .
  - (a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que {a<sub>n</sub>} é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o
     Teorema 11 para indicar que lim<sub>n→∞</sub> a<sub>n</sub> existe.
  - (b) Calcule  $\lim_{n\to\infty} a_n$ .
- **63.** Mostre que a seqüência definida por  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3 1/a_n$  é crescente e  $a_n < 3$  para todo n. Deduza que  $\{a_n\}$  é convergente e calcule seu limite.
- 64. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2$$
  $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$ 

satisfaz  $0 < a_n \le 2$  e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

- 65. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recémnascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é fn, onde {fn} é a seqüência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).
  - (b) Seja  $a_n = f_{n+1}/f_n$  e mostre que  $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$ . Assumindo que  $\{a_n\}$  é convergente, encontre seu limite.
- **66.** (a) Seja  $a_1 = a$ ,  $a_2 = f(a)$ ,  $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$ , ...,  $a_{n+1} = f(a_n)$ , onde f é uma função contínua. Se  $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ , mostre que f(L) = L.
  - (b) Ilustre a parte (a) tomando  $f(x) = \cos x$ , a = 1, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.
- 67. (a) Use um gráfico para estimar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{n!}$$

- (b) Use um gráfico da seqüência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondem a  $\varepsilon = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.001$  na Definição 2.
- **68.** Use a Definição 2 diretamente para provar que  $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$  quando |r| < 1.
- **69.** Prove o Teorema 6. [*Dica*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]
- **70.** Seja  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
  - (a) Mostre que, se  $0 \le a < b$ , então

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$$

- (b) Deduza que  $b^{n}[(n+1)a nb] < a^{n+1}$ .
- (c) Use a = 1 + 1/(n + 1) e b = 1 + 1/n na parte (b) para mostrar que  $\{a_n\}$  é crescente.
- (d) Use a = 1 e b = 1 + 1/(2n) na parte (b) para mostrar que  $a_{2n} < 4$ .
- (e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que  $a_n < 4$  para todo n.
- (f) Use o Teorema 11 para mostrar que  $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n$  existe. (O limite é e. Veja a Equação 3.8.6 do Volume I.)
- Sejam a e b números positivos com a > b. Seja a<sub>1</sub> sua média aritmética e b<sub>1</sub> sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

- (b) Deduza que  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  são ambas convergentes.
- (c) Mostre que  $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ . Gauss chamou o valor comum desses limites de **média** aritmética-geométrica dos números a e b.
- 72. (a) Mostre que, se  $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$  e  $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ , então  $\{a_n\}$  é convergente e  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ .
  - (b) Se  $a_1 = 1$  e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da seqüência  $\{a_n\}$ . Então use a parte (a) para mostrar que  $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ . Isso dá a **expansão em frações contínuas** 

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}$$

73. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde  $p_n$  é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são as constantes positivas que dependem da espécie e de seu hábitat. Suponha que a população no ano 0 seja  $p_0 > 0$ .

- (a) Mostre que se  $\{p_n\}$  é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e b-a.
- (b) Mostre que  $p_{n+1} < (b/a)p_n$ .
- (c) Use o item (b) para mostrar que, se a > b, daí  $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ; em outras palavras, a população morre.
- (d) Agora assuma que a < b. Mostre que, se  $p_0 < b a$ , então  $\{p_n\}$  é crescente e  $0 < p_n < b a$ . Mostre também que, se  $p_0 > b a$ , assim,  $\{p_n\}$  é decrescente e  $p_n > b a$ . Deduza que, se a < b, logo  $\lim_{n \to \infty} p_n = b a$ .

## Projeto de Laboratório

### Seqüências Logísticas

Uma sequência que aparece em ecologia como um modelo para o crescimento populacional é definida pela equação de diferença logística

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

onde  $p_n$  mede o tamanho da população da n-ésima geração de uma única espécie. Para manter os números manejáveis,  $p_n$  é uma fração do tamanho máximo da população, e assim  $0 \le p_n \le 1$ . Note que a forma dessa equação é similar à da equação diferencial logística na Seção 9.5. O modelo discreto — com seqüências em vez de funções contínuas — é preferível para modelar populações de insetos, onde acasalamento e morte ocorrem de uma maneira periódica.

Um ecologista está interessado em prever o tamanho da população com o passar do tempo e faz as perguntas: ela estabilizará em um valor limite? Ela mudará de uma maneira cíclica? Ou ela exibirá comportamento aleatório?

Escreva um programa para calcular os n primeiros termos dessa seqüência, começando com uma população inicial  $p_0$ , onde  $0 < p_0 < 1$ . Use esse programa para fazer o que se pede.

- 1. Calcule 20 ou 30 termos da sequência para  $p_0 = \frac{1}{2}$  e para dois valores de k tal que 1 < k < 3. Plote as sequências. Elas parecem convergir? Repita para um valor diferente de  $p_0$  entre 0 e 1. O limite depende da escolha de  $p_0$ ? Depende da escolha de k?
- 2. Calcule os termos da sequência para um valor de k entre 3 e 3,4 e plote-os. O que você nota sobre o comportamento dos termos?
- **3.** Experimente com valores de k entre 3,4 e 3,5. O que acontece com os termos?
- 4. Para os valores de k entre 3,6 e 4, calcule e plote pelo menos 100 termos e comente sobre o comportamento da sequência. O que acontecerá se você mudar p<sub>0</sub> por 0,001? Esse tipo de comportamento é chamado caótico e é exibido por populações de insetos sob certas condições.

## 11.2

## Séries

Se tentarmos adicionar os termos de uma sequência infinita  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , obteremos uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas uma **série**) e é denotada, por abreviação, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Mas faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos? Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1+2+3+4+5+\cdots+n+\cdots$$

porque se começarmos adicionando os termos obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . e depois o n-ésimo termo, n(n+1)/2, que se torna muito grande quando n aumenta. Contudo, se começarmos a adicionar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,9999905
25 .	0,9999997

obteremos  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{15}{16}$ ,  $\frac{31}{32}$ ,  $\frac{63}{64}$ , ...,  $1 - 1/2^n$ , .... A tabela mostra que, quando adicionamos mais e mais termos, essas somas parciais se tornam cada vez mais próximas de 1. (Veja também a Figura 11 na página 7 do Volume I.) De fato, adicionando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Usamos uma idéia similar para determinar se uma série geral (1) tem uma soma ou não. Consideramos as **somas parciais** 

$$s_1 = a_1$$
  
 $s_2 = a_1 + a_2$   
 $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$   
 $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência  $\{s_n\}$ , que pode ou não ter um limite. Se  $\lim_{n\to\infty} s_n = s$  existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita  $\sum a_n$ .

2 Definição Dada uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ , denote por  $s_n$  sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência  $\{s_n\}$  for convergente e  $\lim_{n\to\infty} s_n = s$  existir como um número real, então a série  $\sum a_n$  é denominada convergente, e escrevernos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$$
 ou  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 

O número s é chamado soma da série. Caso contrário, a série é dita divergente.

Assim, quando escrevemos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$  queremos dizer que, adicionando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão próximo quanto quisermos do número s. Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EXEMPLO 1 
Um exemplo importante de uma série infinita é a série geométrica

$$a + ar + ar^{2} + ar^{3} + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$
  $a \neq 0$ 

Compare com a integral imprópria

$$\int_{1}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{x \to \infty} \int_{1}^{t} f(x) \, dx$$

Para encontrar essa integral, integramos de 1 até t e então fazemos  $t \rightarrow \infty$ . Para uma série, somamos de 1 a n e então temos  $n \rightarrow \infty$ .

1975

☐ A Figura 1 fornece uma demonstração geométrica do resultado no Exemplo 1. Se os triângulos forem construídos como mostrado e s for a soma da série, então, por similaridade de triângulos,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{então} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

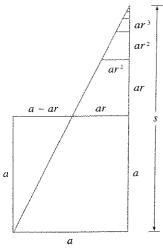


FIGURA 1

☐ Em palavras: a soma de uma série geométrica convergente é

Cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma razão em comum r. (Já consideramos o caso especial onde  $a = \frac{1}{2}$  e  $r = \frac{1}{2}$  na página 709.)

Se r=1, então  $s_n=a+a+\cdots+a=na\to\pm\infty$ . Como  $\lim_{n\to\infty}s_n$  não existe, a série geométrica diverge nesse caso.

Se  $r \neq 1$ , temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

 $rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ 

Subtraindo essas equações, obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

 $s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 

Se -1 < r < 1, sabemos, a partir de (11.1.8), que  $r^n \to 0$  quando  $n \to \infty$ ; assim,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n \to \infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando |r| < 1 a série geométrica é convergente, e sua soma é a/(1-r). Se  $r \le -1$  ou r > 1, a sequência  $\{r^n\}$  é divergente por (11.1.8); assim, pela Equação 3,  $\lim_{n\to\infty} s_n$  não existe. Portanto a série geométrica diverge naqueles casos.

Resumimos os resultados do Exemplo 1 como a seguir.

[4] A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se |r| < 1 e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Se  $|r| \ge 1$ , a série geométrica é divergente.

EXEMPLO 2 

Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

SOLUÇÃO O primeiro termo é a=5 e a razão é  $r=-\frac{2}{3}$ . Como  $|r|=\frac{2}{3}<1$ , a série é convergente por (4) e sua soma é

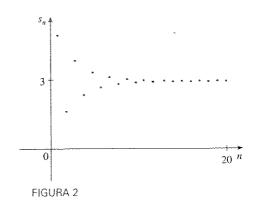
$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots = \frac{5}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

□ O que realmente queremos dizer quando falamos que a soma da série no Exemplo 2 é 3? Claro, não podemos adicionar literalmente um número infinito de termos, um a um. Mas, de acordo com a Definição 2, a soma total é o limite da seqüência de somas parciais. Assim, tomando a soma de um número suficiente de termos, podemos chegar tão próximo quanto quisermos do número 3. A tabela mostra as primeiras dez somas parciais s₀, e o gráfico na Figura 2 mostra como a seqüência de somas parciais se aproxima de 3.

 $\Box$  Outra maneira de identificar a e r é escrever os primeiros termos:

 $4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$ 

п	Sii
Į	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975



**EXEMPLO 3**  $\Box$  A série  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$  é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Vamos reescrever o n-ésimo termo da série na forma  $ar^{n-1}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Reconhecemos essa série como uma série geométrica com a=4 e  $r=\frac{4}{3}$ . Como r>1, a série diverge por (4).

**EXEMPLO 4** □ Escreva o número 2,317 = 2,3171717... como uma razão de inteiros. SOLUÇÃO

$$2,3171717... = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Depois do primeiro termo temos uma série geométrica com  $a=17/10^3$  e  $r=1/10^2$ . Portanto

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\frac{17}{1.000}}{\frac{99}{100}}$$
$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1.147}{495}$$

geng Sand

**EXEMPLO 5**  $\square$  Encontre a soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , onde |x| < 1.

SOLUÇÃO Note que essa série começa com n=0 e assim o primeiro termo é  $x^0=1$ . (Com as séries, adotamos a convenção de que  $x^0=1$  mesmo quando x=0.) Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Essa é uma série geométrica com a=1 e r=x. Como |r|=|x|<1, ela converge, e (4) fornece

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

100

EXEMPLO 6  $\square$  Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  é convergente e calcule sua soma.

SOLUÇÃO Essa não é uma série geométrica e, assim, voltamos à definição de uma série convergente e calculamos as somas parciais.

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão se usarmos a decomposição por frações parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(veja a Seção 7.4 no Volume I). Então, temos

$$s_{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

e, dessa forma,  $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$ 

Portanto, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

EXEMPLO 7 🗆 Mostre que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

SOLUÇÃO

$$s_{1} = 1$$

$$s_{2} = 1 \cdot + \frac{1}{2}$$

$$s_{4} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$$

$$s_{8} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

 □ Note que os termos se cancelam em pares. Esse é um exemplo de uma soma telescópica: por causa de todos os cancelamentos, a soma colapsa (como um antigo telescópio) em apenas dois termos.

 $\Box$  A Figura 3 ilustra o Exemplo 6 mostrando os gráficos da seqüência de termos  $a_n=1/[n(n+1)]$  e a seqüência  $\{s_n\}$  das somas parciais. Note que  $a_n\to 0$  e  $s_n\to 1$ . Veja os Exercícios 54 e 55 para duas interpretações geométricas do Exemplo 6.

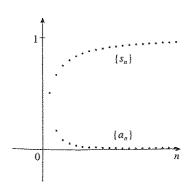


FIGURA 3

Similarmente,  $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ ,  $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ , e, em geral,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Isso mostra que  $s_{2^n} \to \infty$  quando  $n \to \infty$  e assim  $\{s_n\}$  é divergente. Portanto a série harmônica diverge.

☐ O método usado no Exemplo 7 para mostrar que a série harmônica diverge deve-se ao estudioso francês Nicole Oresme (1323-1382).

[5] Teorema Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for convergente, então  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .

Prova Seja  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ . Então  $a_n = s_n - s_{n-1}$ . Como  $\sum a_n$  é convergente, a seqüência  $\{s_n\}$  é convergente. Seja  $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ . Como  $n-1\to\infty$  quando  $n\to\infty$ , também temos  $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$ . Portanto

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1}$$
$$= s - s = 0$$

5...

NOTA 1  $\square$  Com qualquer série  $\Sigma$   $a_n$  associamos duas seqüências: a seqüência  $\{s_n\}$  de suas somas parciais e a seqüência  $\{a_n\}$  de seus termos. Se  $\Sigma$   $a_n$  for convergente, o limite da seqüência  $\{s_n\}$  é s (a soma da série) e, como o Teorema 6 afirma, o limite da seqüência  $\{a_n\}$  é s0.

0

NOTA 2  $\,^{\circ}$  A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira em geral. Se  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ , não podemos concluir que  $\sum a_n$  seja convergente. Observe que, para a série harmônica  $\sum 1/n$ , temos  $a_n = 1/n \to 0$  quando  $n \to \infty$ , mas mostramos no Exemplo 7 que  $\sum 1/n$  é divergente.

Teste para Divergência Se  $\lim_{n\to\infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim,  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .

**EXEMPLO 8**  $\square$  Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$  diverge.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

NOTA 3  $\ \square$  Se acharmos que  $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ , saberemos que  $\Sigma$   $a_n$  é divergente. Se acharmos que  $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ , não saberemos nada sobre a convergência ou divergência de  $\Sigma$   $a_n$ . Lembre-se do aviso na Nota 2: se  $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ , a série  $\Sigma$   $a_n$  pode convergir ou divergir.

[3] Teorema Se  $\Sigma a_n$  e  $\Sigma b_n$  forem séries convergentes, então também o serão as séries  $\Sigma ca_n$  (onde c é uma constante),  $\Sigma (a_n + b_n)$  e  $\Sigma (a_n - b_n)$ , e

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(iii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Essas propriedades de séries convergentes vêm a partir das Leis do Limite para Seqüências Convergentes na Seção 11.1. Por exemplo, aqui está como a parte (ii) do Teorema 8 é provada:

Seja

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i \qquad s = \sum_{n=1}^\infty a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^n b_i \qquad t = \sum_{n=1}^\infty b_n$$

A *n*-ésima soma parcial para a série  $\Sigma (a_n + b_n)$  é

$$u_n = \sum_{i=1}^n \left( a_i + b_i \right)$$

e, usando a Equação 5.2.9 do Volume I, temos

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n a_i + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n b_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} s_n + \lim_{n \to \infty} t_n = s + t$$

Portanto,  $\sum (a_n + b_n)$  é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

EXEMPLO 9  $\Box$  Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$ .

SOLUÇÃO A série  $\Sigma 1/2^n$  é uma série geométrica com  $a = \frac{1}{2}$  e  $r = \frac{1}{2}$ , assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

No Exemplo 6 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Assim, pelo Teorema 8, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$= 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

NOTA 4 D Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo: suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

é convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

segue-se que a série inteira  $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$  é convergente. Similarmente, se soubermos que a série  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

## Exercícios

- 1. (a) Qual é a diferença entre uma sequência e uma série?
  - (b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?
- **2.** Explique o significado de se dizer que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ .
- 3-8 = Calcule pelo menos dez somas parciais da série. Plote ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$$

5. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} tg n$$

**6.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$$

7. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^{1.5}} - \frac{1}{(n+1)^{1.5}} \right)$$
 8.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ 

8. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\mathbf{9.} \text{ Seja } a_n = \frac{2n}{3n+1}.$$

- (a) Determine se  $\{a_n\}$  é convergente.
- (b) Determine se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.
- 10. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i} \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} a_{j}$$

(b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

11\_34 
Determine se a série é convergente ou divergente. Se for <sup>CG</sup>nvergente, calcule sua soma.

11, 
$$3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}...$$

12. 
$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$$

13. 
$$-2 + \frac{5}{3} - \frac{25}{3} + \frac{125}{35} - \cdots$$

**14.** 
$$1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$$

**15.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} 5(\frac{2}{3})^{n-1}$$

**16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$$

$$11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$$

**18.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$$

19. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$$

**20.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$$

21. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$$

**22.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$$

**23.** 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

**24.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

**25.** 
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

**26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$$

27. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} [(0,8)^{n-1} - (0,3)^n]$$

**29.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n}{2n+5} \right)$$

31. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$$

**32.** 
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$$

33. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n(n+3)} + \frac{5}{4^n} \right)$$

$$34. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right)$$

35-40 🗆 Expresse o número como uma razão de inteiros.

35. 
$$0,\overline{2} = 0,2222...$$

**36.** 
$$0,\overline{73} = 0,73737373...$$

**37.** 
$$3,\overline{417} = 3,417417417...$$

41-45  $\Box$  Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para aqueles valores de x.

$$\mathbf{41.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

**42.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$$

$$43. \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

**44.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$$

**45.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{n} x}{2^{n}}$$

**46.** Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos se aproximam de 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

também tem essa propriedade.

47-48 □ Use o comando de frações parciais em seu CAS para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o CAS para somar a série diretamente.

**47.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$$

**48.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^2}$$

**49** Se a *n*-ésima soma parcial de uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for

$$s_n = \frac{n-1}{n+1} \text{ encontre } a_n \in \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n.$$

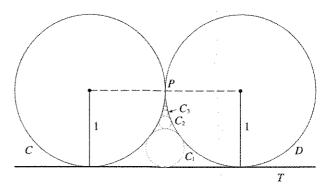
- **50.** Se a *n*-ésima soma parcial de uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for  $s_n = 3 n2^{-n}$  encontre  $a_n \in \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- 51. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que recebem o dinheiro também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte e assim por diante. Os economistas chamam de efeito multiplicador essa reação em cadeia. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo gastando \$ D. Suponha que cada pessoa que recebe o dinheiro gasto gaste 100c% e economize 100s% do dinheiro que recebeu. Os valores de c e s são denominados propensão marginal a consumir e propensão marginal a economizar e, é claro, c + s = 1.
  - (a) Seja  $S_n$  o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para  $S_n$ .
  - (b) Mostre que  $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$ , onde k = 1/s. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Nota: O governo federal usa esse princípio para justificar o déficit. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

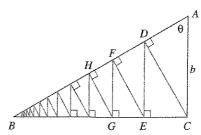
- **52.** Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que ela cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde 0 < r < 1. Suponha que a bola seja derrubada a partir de uma altura inicial de H metros.
  - (a) Assumindo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre. (Use o fato de que a bola cai  $\frac{1}{2}gt^2$  metros em t segundos.)
  - (b) Calcule o tempo total que a bola pula.
  - (c) Suponha que cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v ela rebaterá com velocidade -kv, onde 0 < k < 1. Quanto tempo levará para a bola parar?
- **53.** Qual é o valor de c se  $\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$ ?
- **54.** Plote as curvas  $y = x^n$ ,  $0 \le x \le 1$ , para n = 0, 1, 2, 3, 4, ... na mesma tela. Achando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

55. A figura exibe dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente em comum; C<sub>1</sub> é o círculo que toca C, D e T; C<sub>2</sub> é o círculo que toca C, D e C<sub>1</sub>; C<sub>3</sub> é o círculo que toca C, D e C<sub>2</sub>. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma seqüência infinita de círculos {C<sub>n</sub>}. Encontre uma expressão para o diâmetro de C<sub>n</sub> e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 6.



56. Um triângulo ABC é dado com  $\angle A = \theta$  e |AC| = b. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC,  $EF \perp AB$ , e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura.



Calcule o comprimento total de todas as retas perpendiculares  $|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$ 

em termos de b e  $\theta$ .

57. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots$$

$$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada.")

- **58.** Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$  seja conhecida como uma série convergente. Prove que  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$  é uma série divergente.
- 59. Prove a parte (i) do Teorema 8.
- **60.** Se  $\sum a_n$  for divergente e  $c \neq 0$ , mostre que  $\sum ca_n$  é divergente.
- **61.** Se  $\sum a_n$  for convergente e  $\sum b_n$ , divergente, mostre que a série  $\sum (a_n + b_n)$  é divergente. [*Dica*: Argumente por contradição.]
- **62.** Se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  forem ambas divergentes,  $\sum (a_n + b_n)$  é necessariamente divergente?
- **53.** Suponha que uma série  $\sum a_n$  tenha termos positivos e suas somas parciais  $s_n$  satisfaçam a desigualdade  $s_n \le 1.000$  para todo n. Explique por que  $\sum a_n$  deve ser convergente.
- A seqüência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1$$
,  $f_2 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$   $n \ge 3$ 

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

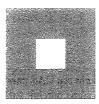
(a) 
$$\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_nf_{n+1}}$$

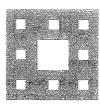
(b) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$$

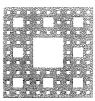
(c) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$$

Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado [0, 1] e removemos o intervalo aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Isso nos leva a dois intervalos,  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Dividimos novamente cada intervalo em três e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio de cada intervalo aberto que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números que permanecem em [0, 1] depois de todos os intervalos terem sido removidos.

- (a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.
- (b) O carpete de Sierpinski é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do nono subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura apresenta as três primeiras etapas da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o carpete de Sierpinski tem área 0.



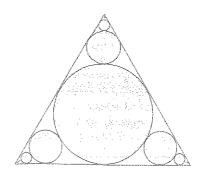




- 66. (a) A seqüência {a<sub>n</sub>} é definida recursivamente pela equação a<sub>n</sub> = ½ (a<sub>n-1</sub> + a<sub>n-2</sub>) para n ≥ 3, onde a₁ e a₂ podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a₁ e a₂ e use sua calculadora para descobrir o limite da seqüência.
  - (b) Encontre  $\lim_{n\to\infty} a_n$  em termos de  $a_1$  e  $a_2$  expressando  $a_{n+1}-a_n$  em termos de  $a_2-a_1$  e somando uma série.
- 67. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

- (a) Calcule as somas parciais  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  e  $s_4$ . Você reconhece os denominadores? Use o padrão para estimar uma fórmula para  $s_n$ .
- (b) Use indução matemática para provar sua estimativa.
- (c) Mostre que a série infinita dada é convergente e calcule sua soma.
- 68. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



## 11.3

## O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série  $\sum 1/[n(n+1)]$  porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a n-ésima soma parcial  $s_n$ . Mas geralmente não é fácil calcular  $\lim_{n\to\infty} s_n$ . Portanto, nas próximas seções, desenvolveremos vários testes que nos permitam determinar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma explicitamente. (Em alguns casos, contudo, nossos métodos nos permitirão encontrar boas estimativas da soma.) Nosso primeiro teste envolve as integrais impróprias.

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma  $s_n$  dos n primeiros termos, mas a tabela de valores gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando  $n \to \infty$  e, assim, parece que a série é convergente.

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva  $y=1/x^2$  e retângulos que estão abaixo da curva. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função  $y=1/x^2$  no extremo direito do intervalo. Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^{2}} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{3^{2}} + \frac{1}{4^{2}} + \frac{1}{5^{2}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$$

$$y = \frac{1}{x^{2}}$$

$$\text{área} = \frac{1}{1^{2}}$$

$$\text{área} = \frac{1}{2^{2}} \quad \text{área} = \frac{1}{3^{2}} \quad \text{área} = \frac{1}{4^{2}} \quad \text{área} = \frac{1}{5^{2}}$$

$$n \qquad s_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2}}$$

$$5 \qquad 1.4636$$

$$10 \qquad 1.5498$$

$$50 \qquad 1.6251$$

$$100 \qquad 1.6350$$

$$500 \qquad 1.6429$$

$$1.000 \qquad 1.6439$$

$$5.000 \qquad 1.6447$$

FIGURA 1

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva  $y=1/x^2$  para  $x \ge 1$ , que é o valor da integral  $\int_1^{\infty} (1/x^2) dx$ . Na Seção 7.8 do Volume I descobrimos que essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim a figura mostra que todas as somas parciais são menores do que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = 2$$

Então as somas parciais são limitadas. Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto as somas parciais convergem (pelo Teorema da Seqüência Monotônica) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots < 2$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1.000	61,8010
5.000	139,9681

[A soma exata dessa série encontrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) é  $\pi^2/6$ , mas a prova desse fato é muito difícil. (Veja o Problema 6 em Problemas Quentes no Capítulo 15.)]

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

A tabela de valores de  $s_n$  sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente. Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva  $y = 1/\sqrt{x}$ , porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima* da curva.

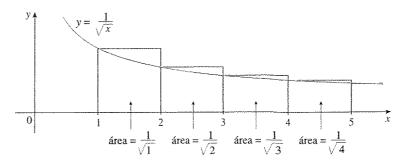


FIGURA 2

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função  $y=1/\sqrt{x}$  no extremo *esquerdo* do intervalo. Desse modo, a soma das áreas de todos os retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva  $y = 1/\sqrt{x}$  para  $x \ge 1$ , que é igual à integral  $\int_{1}^{\infty} (1/\sqrt{x}) dx$ . Mas sabemos a partir da Seção 7.8 do Volume I que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita; isto é, a série é divergente.

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para provar o seguinte teste. (A prova é dada no final desta seção.)

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente se e somente se a integral imprópria  $\int_{1}^{\infty} f(x) dx$  for convergente. Em outras palavras:

- (i) Se  $\int_{1}^{\infty} f(x) dx$  for convergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.
- (ii) Se  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  for divergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

NOTA  $\square$  Quando você usar o Teste da Integral lembre-se de que não é necessário começar a série ou a integral em n=1. Por exemplo, testando a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \quad \text{usamos} \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2} \, dx$$

Também não é necessário que f seja sempre decrescente. O que é importante é que f seja finalmente decrescente, isto é, decrescente para x maior que algum número N. Então  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  é convergente, e assim  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente pela Nota 4 da Seção 11.2.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$  para convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A função  $f(x) = 1/(x^2 + 1)$  é contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2} + 1} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^{2} + 1} dx = \lim_{t \to \infty} tg^{-1}x \Big]_{1}^{t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left( tg^{-1}t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então,  $\int_{1}^{\infty} 1/(x^2 + 1) dx$  é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série  $\sum 1/(n^2 + 1)$  é convergente.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Para que valores de p a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$  é convergente?

SOLUÇÃO Se p < 0, então  $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ . Se p = 0, então  $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$ . Em qualquer caso,  $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$  e, assim, a série dada diverge pelo Teste para Divergência (11.2.7).

Se p > 0, então a função  $f(x) = 1/x^p$  é claramente contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$ . Encontramos no Capítulo 7 do Volume I [veja 7.8.2] que

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\rho}} dx \text{ converge se } p > 1 \text{ e diverge se } p \le 1$$

Segue do Teste da Integral que a série  $\sum 1/n^p$  converge se p > 1 e diverge se 0 . (Para <math>p = 1, esta é a série harmônica discutida no Exemplo 7 da Seção 11.2.)

A série no Exemplo 2, chamada *p*-série, é importante para o restante deste capítulo; desse modo, resumimos os resultados do Exemplo 2 para referência futura como a seguir.

1 A p-série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  é convergente se p > 1 e divergente se  $p \le 1$ .

#### EXEMPLO 3 $\square$

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série p com p = 3 > 1.

(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

Pani Nani

é divergente porque ela é uma p-série com  $p = \frac{1}{3} < 1$ .

NOTA D  $N\tilde{a}o$  devemos inferir a partir do Teste da Integral que a soma da série é igual ao valor da integral. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{enquanto} \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Portanto, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_{1}^{\infty} f(x) \ dx$$

EXEMPLO 4  $\Box$  Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  converge ou diverge.

SOLUÇÃO A função  $f(x) = (\ln x)/x$  é positiva e contínua para x > 1 porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se f é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Então, f'(x) < 0 quando  $\ln x > 1$ , isto é, x > e. Segue que f é decrescente quando x > e e podemos aplicar o Teste da Integral:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln x)^{2}}{2} \Big]_{1}^{t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^{2}}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série é divergente  $\sum (\ln n)/n$  também pelo Teste da Integral.

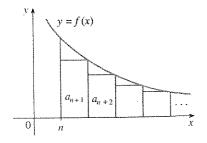


FIGURA 3

y = f(x)  $a_{n+1} = a_{n+2}$  n+1FIGURA 4

Estimando a Soma de uma Série

Suponha que possamos usar o Teste da Integral para mostrar que uma série  $\sum a_n$  é convergente e que queremos encontrar uma aproximação para a soma s da série. Claro, qualquer soma parcial  $s_n$  é uma aproximação para s, porque  $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ . Mas quão boa é tal aproximação? Para descobrir, precisamos estimar o tamanho do **resto** 

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

O resto  $R_n$  é o erro feito quando  $s_n$ , a soma dos n primeiros termos, é utilizada como uma aproximação para a soma total.

Usamos a mesma notação e idéias como no Teste da Integral assumindo que f é decrescente em  $[n, \infty)$ . Comparando as áreas dos retângulos com a área sob y = f(x) para x > n na Figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leq \int_n^\infty f(x) \, dx$$

De maneira semelhante, vemos, a partir da Figura 4, que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx$$

2 Estimativa do Resto pera o Teste de integral Suponha  $f(k)=a_k$ , onde f é uma função contínua, positiva, decrescente para  $x \ge n$  e  $\sum a_n$  é convergente. Se  $R_n = s - s_n$ , então

$$\int_{-\pi}^{\infty} f(x) \, dx \le R_n \le \int_{-\pi}^{\infty} f(x) \, dx$$

#### EXEMPLO 5

- (a) Aproxime a soma da série  $\sum 1/n^3$  usando a soma dos dez primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.
- (b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

SOLUÇÃO Em ambas as partes (a) e (b) precisamos conhecer  $\int_n^\infty f(x) \, dx$ . Com  $f(x) = 1/x^3$ , temos

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^{3}} dx = \lim_{t \to \infty} \left[ -\frac{1}{2x^{2}} \right]_{n}^{t} = \lim_{t \to \infty} \left( -\frac{1}{2t^{2}} + \frac{1}{2n^{2}} \right) = \frac{1}{2n^{2}}$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{10^3} \approx 1,1975$$

De acordo com a estimativa do resto em (2), temos

$$R_{10} \le \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por conseguinte, o tamanho do erro é no máximo 0,005.

(b) A precisão de 0,0005 significa que temos de encontrar um valor de n tal que  $R_n \le 0,0005$ . Como

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{1}{0,001} = 1.000$$
 ou  $n > \sqrt{1000} \approx 31,6$ 

Precisamos de 32 termos para garantir precisão de 0,0005.

Se adicionarmos  $s_n$  em cada lado das desigualdades em (2), obteremos

porque  $s_n + R_n = s$ . As desigualdades em (3) dão um mirrorante e um majorante para s. Eles fornecem uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial  $s_n$ .

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Use (3) com n=10 para estimar a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .

SOLUÇÃO As desigualdades em (3) tornam-se

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \le s \le s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

Do Exemplo 5, sabemos que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{1}{2n^2}$$

assim

$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \le s \le s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Usando  $s_{10} \approx 1,197532$ , obtemos

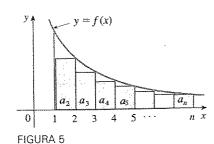
$$1,201664 \le s \le 1,202532$$

Se aproximarmos s pelo ponto médio desse intervalo, então o erro é no máximo metade do comprimento do intervalo. Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,2021 \quad \text{com erro} < 0,0005$$

C

Se compararmos o Exemplo 6 com o Exemplo 5, veremos que a estimativa melhorada em (3) pode ser muito melhor que a estimativa  $s \approx s_n$ . Para fazer um erro menor que 0,0005, tivemos de usar 32 termos no Exemplo 5, mas apenas dez termos no Exemplo 6.



# y = f(x) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_{n-1}$ $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots \quad n \quad x$

FIGURA 6

## Prova do Teste da Integral

Já vimos a idéia básica por trás da prova do Teste da Integral nas Figuras 1 e 2 para as séries  $\sum 1/n^2$  e  $\sum 1/\sqrt{n}$ . Para a série geral  $\sum a_n$ , olhe para as Figuras 5 e 6. A área do primeiro retângulo sombreado na Figura 5 é o valor de f no extremo direito de [1, 2], isto é,  $f(2) = a_2$ . Assim, comparando as áreas dos retângulos sombreados com a área sob y = f(x) de 1 até n, vemos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) \, dx$$

(Note que essa desigualdade depende do fato de que f é decrescente.) Do mesmo modo, a Figura 6 mostra que

$$\int_{1}^{n} f(x) dx \le a_{1} + a_{2} + \dots + a_{n-1}$$

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x) \, dx \leqslant \int_1^{\infty} f(x) \, dx$$

já que  $f(x) \ge 0$ . Portanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \le a_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx = M$$

Como  $s_n \le M$  para todo n, a seqüência  $\{s_n\}$  é limitada superiormente. Também

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$$

visto que  $a_{n+1} = f(n+1) \ge 0$ . Então,  $\{s_n\}$  é uma seqüência crescente limitada, e assim ela é convergente pelo Teorema da Seqüência Monotônica (11.1.11). Isso significa que  $\sum a_n$  é convergente.

(ii) Se  $\int_1^\infty f(x) dx$  for divergente, então  $\int_1^n f(x) dx \to \infty$  quando  $n \to \infty$  porque  $f(x) \ge 0$ . Mas (5) dá

$$\int_{1}^{n} f(x) \, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_{i} = s_{n-1}$$

e, dessa forma,  $s_{n-1} \to \infty$ . Isso implica que  $s_n \to \infty$  e assim  $\sum a_n$  diverge.

# 11.3 Exercícios

#### 1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} < \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}} dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

#### Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para x ≥ 1 e a<sub>n</sub> = f(n). Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_{1}^{6} f(x) \, dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_{i} \qquad \sum_{i=2}^{6} a_{i}$$

3-8 
Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

**4.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$$

8. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$$

## 9-24 Determine se a série é convergente ou divergente.

9. 
$$\sum_{n=0.85}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$$

**10.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1,4} + 3n^{-1,2})$$

11. 
$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$$

12. 
$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$$

13. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$$

14. 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$$

**16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)}$$

17. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

18. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$$

**19** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$

20. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

**22.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$$

**23.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$$

$$24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

## 25-28 $\subseteq$ Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

**25.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

$$26. \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \left[ \ln(\ln n) \right]^p}$$

**27.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

28. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$
ann é definida por

# 29. A função zeta ζ de Riemann é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de  $\zeta$ ?

# 30. (a) Encontre a soma parcial s<sub>10</sub> da série Σ<sub>n=1</sub><sup>∞</sup> 1/n<sup>4</sup>. Estime o erro usando s<sub>10</sub> como uma aproximação para a soma da série.

(b) Utilize (3) com 
$$n = 10$$
 para dar uma estimativa melhorada da soma.

(c) Encontre um valor de 
$$n$$
 tal que  $s_n$  represente a soma com precisão de 0,00001.

(a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$$
. Quão boa é essa estimativa?

(b) Melhore essa estimativa usando (3) com 
$$n = 10$$
.

(c) Encontre um valor de 
$$n$$
 que garanta que o erro na aproximação  $s \approx s_n$  seja menor que 0,001.

**32.** Calcule a soma da série 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$$
 com precisão de três casas decimais.

33. Estime 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$$
 com precisão de 0,01.

**34.** Quantos termos da série 
$$\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$$
 você precisaria adicionar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

**35.** Mostre que, se queremos aproximar a soma da série 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$$
 de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que  $10^{11.304}$  termos!

36. (a) Mostre que a série 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$$
 é convergente.

(b) Encontre um limite superi or para o erro na aproximação 
$$s \approx s_0$$
.

(d) Encontre 
$$s_n$$
 para esse valor de  $n$ .

# **37.** (a) Use (4) para mostrar que, se $s_n$ é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leq 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e que a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

#### 38. Use as seguintes etapas para mostrar que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por  $\gamma$  e é chamado constante de Euler.)

(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com f(x) = 1/x e interprete  $t_n$  como uma área [ou use (5)] para mostrar que  $t_n > 0$  para todo n.

#### (b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que  $t_n - t_{n+1} > 0$ . Portanto  $\{t_n\}$  é uma seqüência decrescente.

(c) Use o Teorema da Seqüência Monotônica para mostrar que {t<sub>n</sub>} é convergente.

**39.** Encontre todos os valores positivos de 
$$b$$
 para os quais a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$  converge.

# 11.4

## Os Testes de Comparação

# Nos testes de comparação, a idéia é comparar uma série dada com uma que é sabidamente convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos lembra a série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ , que é uma série geométrica com  $a = \frac{1}{2}$  e  $r = \frac{1}{2}$  e é, portanto, convergente. Como a série (1) é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Realmente, ela é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada (1) tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Argumentação semelhante pode ser usada para provar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

- O Teste de Comparação Suponha que  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sejam séries com termos positivos.
- (i) Se  $\sum b_n$  for convergente e  $a_n \le b_n$  para todo n, então  $\sum a_n$  também será convergente.
- (ii) Se  $\sum b_n$  for divergente e  $a_n \ge b_n$  para todo n, então  $\sum a_n$  também será divergente.

Prova

(i) Seja

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^n b_i \qquad t = \sum_{n=1}^\infty b_n$$

Como ambas as séries têm termos positivos, as seqüências  $\{s_n\}$  e  $\{t_n\}$  são crescentes  $(s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n)$ . Também  $t_n \to t$ , assim  $t_n \le t$  para todo n. Como  $a_i \le b_i$ , temos  $s_n \le t_n$ . Então,  $s_n \le t$  para todo n. Isso significa que  $\{s_n\}$  é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Seqüência Monotônica. Por conseguinte,  $\sum a_n$  converge.

(ii) Se  $\Sigma$   $b_n$  for divergente, então  $t_n \to \infty$  (porque  $\{t_n\}$  é crescente). Mas  $a_i \ge b_i$ , assim  $s_n \ge t_n$ . Logo,  $s_n \to \infty$ . Portanto,  $\Sigma$   $a_n$  diverge.

Ao usar o Teste de Comparação, devemos, claro, ter algumas séries conhecidas  $\sum b_n$  para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma p-série  $\left[\sum 1/n^{\rho}\right]$  converge se p > 1 e diverge se  $p \le 1$ ; veja (11.3.1) ou uma série geométrica  $\left[\sum ar^{n-1}\right]$  converge se |r| < 1 e diverge se  $|r| \ge 1$ ; veja (11.2.4).

**EXEMPLO 1**  $\square$  Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$  converge ou diverge.

SOLUÇÃO Para um n grande, o termo dominante no denominador é  $2n^2$ ; assim, comparamos a série dada com a série  $\sum 5/(2n^2)$ . Observe que

$$\frac{5}{2n^2+4n+3}<\frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação,  $a_n$  é o lado esquerdo e  $b_n$  é o lado direito.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma p-série com p=2>1. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

□ É importante ter em mente a diferença entre uma seqüência e uma série. Uma seqüência é uma lista de números, enquanto uma série é uma soma. A cada série Σ a<sub>n</sub> existem associadas duas seqüências: uma seqüência {a<sub>n</sub>} de termos e uma seqüência {s<sub>n</sub>} de somas parciais.

Série-padrão para usar com o Teste de Comparação NOTA 1 = Embora a condição  $a_n \le b_n$  ou  $a_n \ge b_n$  no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para  $n \ge N$ , onde N é algum inteiro fixado, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos. Isso é ilustrado no próximo exemplo.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  para convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Essa série foi testada (usando o Teste da Integral) no Exemplo 4 da Seção 11.3, mas também é possível testá-la comparando-a com a série harmônica. Observe que  $\ln n > 1$  para  $n \ge 3$  e assim

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$
  $n \ge 3$ 

Sabemos que  $\Sigma 1/n$  é divergente (p-série com p=1). Então, a série dada é divergente pelo Teste de Comparação.

NOTA 2 <sup>a</sup> Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n-1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque  $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$  é convergente e  $a_n > b_n$ . Mesmo assim temos a impressão de que  $\sum 1/(2^n-1)$  deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente  $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Em tais casos o seguinte teste pode ser usado.

 $\Box$  Os Exercícios 40 e 41 lidam com os casos c=0 e  $c=\infty$ .

Teste de Comparação do Limite Suponha que  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$$

onde c é um número e c>0, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

**Prova** Sejam m e M números positivos tais que m < c < M. Uma vez que  $a_n/b_n$  está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < \frac{a_n}{h_n} < M$$
 quando  $n > N$ 

e assim

$$mb_n < a_n < Mb_n$$
 quando  $n > N$ 

Se  $\Sigma$   $b_n$  convergir, então  $\Sigma$   $Mb_n$  também converge. Dessa forma,  $\Sigma$   $a_n$  converge pela parte (i) do Teste de Comparação. Se  $\Sigma$   $b_n$  divergir, então  $\Sigma$   $mb_n$  também diverge, e a parte (ii) do Teste de Comparação mostra que  $\Sigma$   $a_n$  diverge.

**EXEMPLO 3** Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$  para convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste de Comparação do Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Como esse limite existe e  $\Sigma 1/2^n$  é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação do Limite.

**EXEMPLO 4**  $\square$  Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$  converge ou diverge.

SOLUÇÃO A parte dominante do numerador é  $2n^2$  e a parte dominante do denominador é  $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$ . Isso sugere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Como  $\sum b_n = 2 \sum 1/n^{1/2}$  é divergente (p-série com  $p = \frac{1}{2} < 1$ ), a série dada diverge pelo Teste de Comparação do Limíte.

Note que testando muitas séries encontramos uma série de comparação apropriada  $\Sigma$   $b_n$  mantendo apenas as potências mais altas no numerador e denominador.

#### Estimando Somas

Se tivéssemos usado o Teste de Comparação para mostrar que uma série  $\sum a_n$  converge pela comparação com uma série  $\sum b_n$ , poderíamos ser capazes de estimar a soma  $\sum a_n$  pela comparação dos restos. Como na Seção 11.3, consideramos o resto

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para a série de comparação  $\sum b_n$  consideramos o resto correspondente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Como  $a_n \le b_n$  para todo n, temos  $R_n \le T_n$ . Se  $\Sigma$   $b_n$  for uma p-série, podemos estimar seu resto  $T_n$  como na Seção 11.3. Se  $\Sigma$   $b_n$  for uma série geométrica, então  $T_n$  é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer caso, sabemos que  $R_n$  é menor que  $T_n$ .

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série  $\sum 1/(n^3 + 1)$ . Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Como

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto  $T_n$  para a série de comparação  $\Sigma 1/n^3$  foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto  $R_n$  para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com n = 100, temos

$$R_{100} \le \frac{1}{2(100)^2} = 0,00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

com erro menor que 0,00005.

# 11.4 Exercícios

- Suponha que  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sejam séries com termos positivos e  $\sum b_n$  seja sabidamente convergente.
  - (a) Se  $a_n > b_n$  para todo n, o que você pode dizer sobre  $\sum a_n$ ? Por quê?
  - (b) Se  $a_n < b_n$  para todo n, o que você pode dizer sobre  $\sum a_n$ ? Por quê?
- Suponha que Σ a<sub>n</sub> e Σ b<sub>n</sub> sejam séries com termos positivos e Σ b<sub>n</sub> seja sabidamente divergente.
  - (a) Se  $a_n > b_n$  para todo n, o que você pode dizer sobre  $\sum a_n$ ? Por quê?
  - (b) Se  $a_n < b_n$  para todo n, o que você pode dizer sobre  $\sum a_n$ ? Por quê?

3-32 □ Determine se a série converge ou diverge.

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$$

000A

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$$

7. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$$

9. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$$

11. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-1}$$

12. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{10^n}$$

13. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$$

**14.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

**15.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

**16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

**18.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$$

**19.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$$

**20.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$$

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

**22.** 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$$

**23.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$$

**24.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$$

**25.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$$

**26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$$

**27.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 7n}{3^n(n^2 + 5n - 1)}$$

**29.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$30. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**32.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

33-36 © Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

**33.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2}$$

**34.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^5}$$

**35.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$$

**36.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$$

O significado da representação decimal de um número  $0,d_1d_2d_3...$  (onde o dígito  $d_i$  é um dos números 0,1,2,...,9) é que

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

- **38.** Para quais valores de p a série  $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$  converge?
- **39.** Prove que, se  $a_n \ge 0$  e  $\sum a_n$  convergir então  $\sum a_n^2$  também converge.
- **40.** (a) Suponha que  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sejam séries com termos positivos e  $\sum b_n$  seja convergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

então  $\sum a_n$  também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n} e^n}$$

(a) Suponha que  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sejam séries com termos positivos e  $\sum b_n$  seja divergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$$

então  $\sum a_n$  também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

- **42.** Dê um exemplo de um par de séries  $\sum a_n e \sum b_n$  com termos positivos onde  $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$  e  $\sum b_n$  diverge, mas  $\sum a_n$  converge. (Compare com o Exercício 40.)
- **43.** Mostre que, se  $a_n > 0$  e  $\lim_{n \to \infty} na_n \neq 0$ , então  $\sum a_n$  é divergente.
- **44.** Mostre que, se  $a_n > 0$  e  $\sum a_n$  for convergente, então  $\sum \ln(1 + a_n)$  é convergente.
- **45.** Se  $\sum a_n$  for uma série convergente com termos positivos, é verdade que  $\sum sen(a_n)$  também é convergente?
- **46.** Se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que  $\sum a_n b_n$  também é convergente?

## 11.5

## Séries Alternadas

Os testes de convergência que temos olhado se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas* cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$
 ou  $a_n = (-1)^n b_n$ 

onde  $b_n$  é um número positivo. (De fato,  $b_n = |a_n|$ .)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem em direção a 0 em valor absoluto, então a série converge.

O Teste da Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

satisfizer

(i) 
$$b_{n+1} \le b_n$$
 para todo  $n$ 

(ii) 
$$\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

então a série é convergente.

Antes de provar, vamos olhar a Figura 1, que esboça a idéia por trás da prova. Primeiro plotamos  $s_1 = b_1$  sobre uma reta numérica. Para encontrar  $s_2$  subtraímos  $b_2$ , assim  $s_2$  está à esquerda de  $s_1$ . Então, para encontrar  $s_3$ , adicionamos  $b_3$  e assim  $s_3$  está à direita de  $s_2$ . Mas, como  $b_3 < b_2$ ,  $s_3$  está à esquerda de  $s_1$ . Continuando dessa maneira, vemos que as somas parciais oscilam de um lado para outro. Como  $b_n \rightarrow 0$ , as etapas subseqüentes vão se tornando cada vez menores. As somas parciais pares  $s_2$ ,  $s_4$ ,  $s_6$ , . . . são crescentes, e as somas parciais ímpares  $s_1$ ,  $s_3$ ,  $s_5$ , . . . são decrescentes. Então, parece plausível que ambas estejam convergindo para algum número s, que é a soma da série. Portanto na prova a seguir consi-deramos as somas parciais pares e ímpares separadamente.

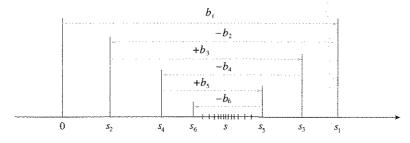


FIGURA 1

Prova do Teste da Série Alternada Primeiro consideramos as somas parciais pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \ge 0 \qquad \text{já que } b_2 \le b_1$$
 
$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \ge s_2 \qquad \text{já que } b_4 \le b_3$$
 Em geral 
$$s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \ge s_{2n-2} \qquad \text{já que } b_{2n} \le b_{2n-1}$$
 Então 
$$0 \le s_2 \le s_4 \le s_6 \le \cdots \le s_{2n} \le \cdots$$

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

1

Cada termo entre parênteses é positivo, assim  $s_{2n} \le b_1$  para todo n. Dessa forma, a seqüência  $\{s_{2n}\}$  de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. É, portanto, convergente pelo Teorema da Seqüência Monotônica. Vamos chamar esse limite s, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Agora calculamos o limite das somas parciais ímpares:

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (s_{2n} + b_{2n+1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} s_{2n} + \lim_{n \to \infty} b_{2n+1}$$

$$= s + 0 \qquad \text{[pela condição (ii)]}$$

$$= s$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos  $\lim_{n\to\infty} s_n = s$  (veja o Exercício 72 na Seção 11.1) e, assim, a série é convergente.

EXEMPLO 1 

A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) 
$$b_{n+1} < b_n$$
 porque  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ 

(ii) 
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada.

**EXEMPLO 2**  $\Box$  A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$  é alternada, mas

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

assim a condição (ii) não é satisfeita. Ao contrário, olhamos para o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

O limite não existe, desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

**EXEMPLO 3**  $\square$  Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$  para convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A série dada é alternada; assim, tentamos verificar as condições (i) e (ii) do Teste da Série Alternada.

Ao contrário da situação no Exemplo 1, não é óbvio que a seqüência dada por  $b_n = n^2/(n^3 + 1)$  seja decrescente. Contudo, se considerarmos a função associada  $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$ , descobriremos que

□ A Figura 2 ilustra o Exemplo 1 mostrando os gráficos dos termos  $a_n = (-1)^{n-1}/n$  e as somas parciais  $s_n$ . Note como os valores de  $s_n$  ziguezagueiam ao redor do valor limite, que parece ser cerca de 0,7. De fato, a soma exata da série é  $\ln 2 \approx 0.693$  (veia o Exercício 36).

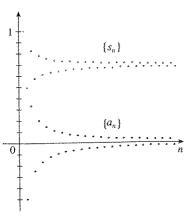


FIGURA 2

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Como estamos apenas considerando x positivo, vemos que f'(x) < 0 se  $2 - x^3 < 0$ , isto é,  $x > \sqrt[3]{2}$ . Então, f é decrescente no intervalo  $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ . Isso significa que f(n + 1) < f(n) e portanto  $b_{n+1} < b_n$  quando  $n \ge 2$ . (A designal dade  $b_2 < b_1$  pode ser verificada diretamente, mas o que realmente importa é que a sequência  $\{b_n\}$  é finalmente decrescente.)

A condição (ii) é prontamente verificada:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Então, a série dada é convergente pelo Teste da Série Alternada.

## Estimando Somas

Uma soma parcial  $s_n$  de qualquer série convergente pode ser usada como uma aproximação para a soma total s, porém isso não é de muita utilidade, a menos que possamos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido usando  $s \approx s_n$  é o resto  $R_n = s - s_n$ . O próximo teorema diz que, para séries que satisfazem as condições do Teste da Série Alternada, o tamanho do erro é menor que  $b_{n+1}$ , que é o valor absoluto do primeiro termo negligenciado.

Teorema da Estimativa de Séries Alternadas Se  $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$  for a soma de uma série alternada que satisfaz

(i) 
$$0 \le b_{n+1} \le b_n$$
 e (ii)  $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ 

(ii) 
$$\lim b_n = 0$$

então

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}$$

Prova Sabemos pela prova do Teste da Série Alternada que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer  $s_n$  e  $s_{n+1}$ . Segue que

$$|s - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$

EXEMPLO 4  $\Box$  Encontre a soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  com precisão de três casas decimais. (Pela definição, 0! = 1.)

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a série é convergente pelo Teste da Série Alternada, porque

(i) 
$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

(ii) 
$$0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0$$
 então  $\frac{1}{n!} \to 0$  quando  $n \to \infty$ 

□ Em vez de verificarmos a condição (i) do Teste da Série Alternada calculando uma derivada, poderíamos verificar  $b_{n+1} < b_n$  diretamente usando a técnica da Solução 1 do Exemplo 11 da Seção 11.1.

□ Você pode ver geometricamente por que o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas é verdadeiro olhando a Figura 1. Note que  $s - s_4 < b_5$ ,  $|s - s_5| < b_6$  e assim por diante. Note também que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer.

Para termos uma idéia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$
$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5.040} + \cdots$$

Note que

$$b_7 = \frac{1}{5.040} < \frac{1}{5.000} = 0,0002$$

Д

$$s_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0.368056$$

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \le b_7 < 0.0002$$

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal. Assim temos

$$s \approx 0.368$$

com precisão de três casas decimais.

 $\square$  Na Seção 11.10 provaremos que  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  para todo x; assim, o que obtivemos no Exemplo 4 é realmente uma aproximação para o número  $e^{-1}$ .

NOTA 

A regra de que o erro (ao usar  $s_n$  para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

# 11.5 Exercícios

- 1. (a) O que é uma série alternada?
  - (b) Sob que condições uma série alternada converge?
  - (c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de *n* termos?
- 2-20 🗆 Teste a série para convergência ou divergência.

2. 
$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$$

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{6} + \frac{4}{6} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$$

4. 
$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \cdots$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

6. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

8. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n^2+1}$$

9. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+1}$$

**10.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

12. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$$

**13.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$$

**14.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

**15.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$$

**16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

**18.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

**19.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

$$20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^{n}$$

21–22 
Calcule as dez primeiras somas parciais da série e plote a seqüência de termos e a seqüência das somas parciais na mesma tela. Estime o erro ao usar a décima soma parcial para aproximar a soma total

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$$

**22.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

23-26 □ Quantos termos da série precisamos adicionar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad (|erro| < 0.01)$$

**24.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$$
 (|erro| < 0,001)

#### 738 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

**25.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \quad (|\text{erro}| < 0.01)$$

**26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} \quad (|\text{erro}| < 0.002)$$

27-30 

Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

**27.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}$$

**29.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$$

**30.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$$

**31.** A qüinquagésima soma parcial  $s_{50}$  da série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$  é uma estimativa por cima ou uma estimativa por baixo da soma total? Explique.

32-34 □ Para quais valores de p cada série é convergente?

32 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

□ Temos testes de convergência

para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos ficam trocando irregularmente?

Veremos no Exemplo 3 que a idéia de

convergência absoluta algumas vezes

ajuda em tais casos.

33. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$$

34. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$$

**35.** Mostre que a série  $\Sigma (-1)^{n-1}b_n$ , onde  $b_n = 1/n$  se n for impar e  $b_n = 1/n^2$  se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sejam  $h_u$  e  $s_n$  as somas parciais das séries harmônica e alternada harmônica.

- (a) Mostre que  $s_{2n} = h_{2n} h_n$ .
- (b) Do Exercício 38, da Seção 11.3, temos

$$h_n - \ln n \rightarrow \gamma$$
 quando  $n \rightarrow \infty$ 

e portanto

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma$$
 quando  $n \to \infty$ 

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que  $s_{2n} \rightarrow \ln 2$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

# 11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série  $\sum a_n$ , podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

1 Definição Uma série  $\Sigma$   $a_n$  é chamada absolutamente convergente se a série de valores absolutos  $\Sigma$   $|a_n|$  for convergente.

Note que, se  $\sum a_n$  for uma série com termos positivos, então  $|a_n| = a_n$  e assim a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

EXEMPLO 1 

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \right|$$

é uma p-série convergente (p = 2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente (veja o Exemplo 1 da Seção 11.5), mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right|$$

que é a série harmônica (p-série com p = 1) e é portanto divergente.

[2] Definição Uma série  $\sum a_n$  é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível para uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

 $\fbox{3}$  Tourema Se uma série  $\Sigma$   $a_n$  for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Prova Observe que a desigualdade

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

é verdadeira porque  $|a_n|$  é  $a_n$  ou  $-a_n$ . Se  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, então  $\sum |a_n|$  é convergente, assim  $\sum 2|a_n|$  é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação,  $\sum (a_n + |a_n|)$  é convergente. Dessa forma,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é portanto convergente.

EXEMPLO 3 
Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.) Podemos aplicar o Teste da Comparação à série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Como  $|\cos n| \le 1$  para todo n, temos

$$\frac{\left|\cos n\right|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

 $\ \ \, \supseteq \ \, A$  Figura 1 mostra os gráficos dos termos  $a_n$  e das somas parciais  $s_n$  da série no Exemplo 3. Note que a série não é alternada, mas tem termos positivos e negativos.

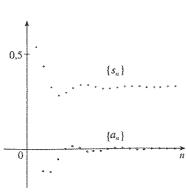


FIGURA 1

Sabemos que  $\Sigma 1/n^2$  é convergente (p-série com p=2) e, assim,  $\Sigma |\cos n|/n^2$  é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada  $\Sigma (\cos n)/n^2$  é absolutamente convergente e portanto convergente pelo Teorema 3.

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

#### O Teste da Razão

- (i) Se  $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente (e portanto convergente).
- (ii) Se  $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.
- (iii) Se  $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ , o Teste da Razão não é conclusivo; isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de  $\Sigma a_n$ .

#### Prova

(i) A idéia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como L < 1, podemos escolher um número r tal que L < r < 1. Como

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad \text{e} \quad L < r$$

o quociente  $|a_{n+1}/a_n|$  será finalmente menor que r; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \text{ sempre que } n \ge N$$

ou, equivalentemente,

$$|a_{n+1}| < |a_n| r \text{ sempre que } n \ge N$$

Colocando n sucessivamente igual a N, N + 1, N + 2, . . . em (4), obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N|r$$
  
 $|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2$   
 $|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_N|r^3$ 

e, em geral,

$$|a_{N+k}| < |a_N| r^k$$
 para todo  $k \ge 1$ 

Agora a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

é convergente porque é uma série geométrica com 0 < r < 1. Assim a desigualdade (5), junto com o Teste da Comparação, mostra que a série

é convergente também. Segue-se que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  é convergente. (Lembre-se de que um número finito de termos não afeta a convergência.) Portanto,  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

(ii) Se  $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$  ou  $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$ , então o quociente  $|a_{n+1}/a_n|$  será finalmente maior que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$
 sempre que  $n \ge N$ 

Isso significa que  $|a_{n+1}| > |a_n|$  quando  $n \ge N$ , e assim

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$$

Portanto,  $\sum a_n$  diverge pelo Teste da Divergência.

NOTA  $\square$  A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se  $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ , o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente  $\sum 1/n^2$ , temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \to 1 \quad \text{quando } n \to \infty$$

enquanto para a série divergente  $\sum 1/n$ , obtemos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto, se  $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ , a série  $\sum a_n$  pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar algum outro teste.

**EXEMPLO 4**  $\square$  Teste a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$  para convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão com  $a_n = (-1)^n n^3/3^n$ :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$
$$= \frac{1}{3} \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e portanto convergente.

#### □ Estimando somas

Temos usado vários métodos para estimar a soma de uma série – o método depende de qual teste era usado para provar a convergência. O que acontece com a série para a qual o Teste da Razão funciona? Existem duas possibilidades: se a série for uma série alternada, como no Exemplo 4, então é melhor usar os métodos da Seção 11.5. Se os termos forem todos positivos, utilize os métodos especiais explicados no Exercício 34.

EXEMPLO 5 = Teste a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 

SOLUÇÃO Como os termos  $a_n = n^n/n!$  são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ quando } n \to \infty$$

(Veja a Equação 3.8.6 no Volume I.) Como e > 1, a série dada é divergente pelo Teste da Razão.

NOTA D Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \ge n$$

segue-se que  $a_n$  não se aproxima de 0 quando  $n \to \infty$ . Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando as potências de *n* ocorrem. Sua prova é similar à do Teste da Razão e fica para o Exercício 38.

#### O Yeste da Raiz

- (i) Se  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente (e portanto convergente).
- (ii) Se  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$  ou  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.
- (iii) Se  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , então a parte (iii) do Teste da Raiz não dá informação. A série  $\sum a_n$  pode convergir ou divergir. (Se L=1 no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1.)

EXEMPLO 6  $\Box$  Teste a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ .

**SOLUÇÃO** 

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

743

A questão de uma série dada ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um rearranjo de uma série infinita  $\sum a_n$  queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de  $\sum a_n$  poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Segue-se que

se  $\sum a_n$  for uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de  $\sum a_n$  tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrar esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2$$

(Veja o Exercício 36 da Seção 11.5.) Se multiplicarmos essa série por  $\frac{1}{2}$ , obteremos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2$$

Note que a série em (8) contém os mesmos termos que em (6), mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorre depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann provou que

se  $\sum a_n$  for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de  $\sum a_n$  que tem uma soma igual a r.

Uma prova desse fato é ilustrada no Exercício 40.

### ☐ A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na següência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

# Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série  $\sum a_n$  em cada um dos seguintes casos?

(a) 
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=8$$

(a) 
$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 8$$
 (b)  $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.8$ 

(c) 
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$$

2-28 © Determine se a série é absolutamente convergente. condicionalmente convergente ou divergente.

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

3. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

7. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5 \pm n}$$

9. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

11. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4}$$

**6.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

8. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

**10.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$$

12. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$$

#### 744 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

13. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$$

**14.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$$

**15** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$$

**16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$$

17. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

19. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$$

**20.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$$

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$$

**22.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

**23.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n$$

$$24. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg} n)^n}$$

25. 
$$1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$$

**26.** 
$$\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$$

27. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$$

29 Os termos de uma série são definidos recursivamente pelas equações

$$a_1 = 2$$
  $a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$ 

Determine se  $\sum a_n$  converge ou diverge.

**30.** Uma série  $\sum a_n$  é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se  $\sum a_n$  converge ou diverge.

31. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

(c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

(d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$$

32. Para quais inteiros positivos k a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

é convergente?

**33.** (a) Mostre que  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  converge para todo x.

(b) Deduza que  $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$  para todo x.

34. Seja  $\sum a_n$  uma série com termos positivos e seja  $r_n = a_{n+1}/a_n$ . Suponha que  $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$ , assim  $\sum a_n$  converge pelo

Teste da Razão. Como habitualmente, faça  $R_n$  ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

 (a) Se {r<sub>n</sub>} for uma seqüência decrescente e r<sub>n+1</sub> < 1, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Se  $\{r_n\}$  for uma sequência crescente, mostre que

$$R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1-L}$$

**35.** (a) Calcule a soma parcial  $s_5$  da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Use o Exercício 34 para estimar o erro ao usar s<sub>5</sub> como uma aproximação da soma da série.

(b) Calcule um valor de n de maneira que s<sub>n</sub> aproxime a soma com precisão 0,00005. Use esse valor de n para aproximar a soma da série.

**36.** Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ . Use o Exercício 34 para estimar o erro.

37. Prove que, se  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

**38.** Prove o Teste da Raiz. [Dica para a parte (i): Tome qualquer número r tal que L < r < 1 e use o fato de que existe um inteiro N tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} < r$  quando  $n \ge N$ .]

**39.** Dada uma série qualquer  $\sum a_n$  definimos uma série  $\sum a_n^+$  cujos termos são todos termos positivos de  $\sum a_n$  e uma série  $\sum a_n^-$  cujos termos são todos termos negativos de  $\sum a_n$ . Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$$
  $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ 

Note que, se  $a_n > 0$ , então  $a_n^+ = a_n$  e  $a_n^- = 0$ , ao passo que, se  $a_n < 0$ , então  $a_n^- = a_n$  e  $a_n^+ = 0$ .

(a) Se  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  são convergentes.

(b) Se  $\Sigma a_n$  for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries  $\Sigma a_n^+$  e  $\Sigma a_n^-$  são divergentes.

40. Prove que, se Σ a<sub>n</sub> for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de Σ a<sub>n</sub> cuja soma é r. [Dicas: Use a notação do Exercício 39. Tome um número apenas suficiente de termos positivos a<sub>n</sub><sup>\*</sup> de modo que sua soma seja maior que r. Então adicione um número apenas suficiente de termos negativos a<sub>n</sub><sup>\*</sup> de tal modo que a soma cumulativa seja menor que r. Continue dessa maneira e use o Teorema 11.2.6.]

### Estratégia para Testar as Séries

Agora temos várias maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em qual série. Nesse aspecto testar séries é similar a integrar funções. De novo, não há regras certeiras e rápidas para qual teste aplicar a uma série dada, mas você pode achar os conselhos a seguir de alguma utilidade.

Não é sábio aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até que um deles finalmente funcione. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

- 1. Se a série for da forma  $\sum 1/n^p$ , ela é uma p-série, que sabemos ser convergente se p > 1 e divergente se  $p \le 1$ .
- 2. Se a série tiver a forma  $\sum ar^{n-1}$  ou  $\sum ar^n$ , ela é uma série geométrica, que converge se |r| < 1 e diverge se  $|r| \ge 1$ . Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.
- 3. Se a série tiver uma forma similar a uma p-série ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se an for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), a série deve ser comparada com uma p-série. Note que a maioria das séries nos Exercícios 11.4 tem essa forma. (O valor de p deve ser escolhido como na Seção 11.4, deixando apenas as potências n mais altas no numerador e denominador.) Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas, se Σ an tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação na Σ | an | e testar a convergência absoluta.
- 4. Se você vir que  $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ , o Teste para Divergência deve ser usado.
- 5. Se a série for da forma  $\Sigma (-1)^{n-1}b_n$  ou  $\Sigma (-1)^nb_n$ , então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.
- 6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com freqüência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que | a<sub>n+1</sub>/a<sub>n</sub> | → 1 quando n → ∞ para todas as p-séries, e portanto todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.
- 7. Se  $a_n$  for da forma  $(b_n)^n$ , o Teste da Raiz pode ser útil.
- 8. Se  $a_n = f(n)$ , onde  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  é facilmente avaliada, então o Teste da Integral é eficaz (satisfeitas as hipóteses para este teste).

Nos próximos exemplos não trabalhamos todos os detalhes, mas simplesmente indicamos quais testes devem ser usados.

EXEMPLO 1 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$$

Como  $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$  quando  $n \to \infty$ , devemos usar o Teste para Divergência.

**EXEMPLO 2** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{3n^3 + 4n^2 + 2}$$

Como  $a_n$  é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma p-série.

A série de comparação é  $\sum b_n$ , onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EXEMPLO 3  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ 

Como a integral  $\int_1^\infty xe^{-x^2} dx$  é facilmente avaliada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona.

EXEMPLO 4  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 + 1}$ 

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 5  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ 

Como a série envolve k!, usamos o Teste da Razão.

EXEMPLO 6  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ 

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica  $\sum 1/3^n$ , usamos o Teste da Comparação.

# Exercícios

1-38 🗆 Teste a convergência ou divergência das séries.

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ 

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n}$$

**4.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n^2 + n}$$

**5.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$$

$$\mathbf{6.} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{1+8n} \right)^n$$

$$7. \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

8. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$$

**9.** 
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$$

**10.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

11. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$$

**12.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 25}$$

13. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$$

14. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$$

**15.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}$$
 **16.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$$

17. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$$

18. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-1}}$$

**19.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$$

**23.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n)$$

**25.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

27. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$$

29. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^{-1} n}{n \sqrt{n}}$$

31. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt{n}}{5^k}$$

31. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^k}$$
33. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$$

35. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

37. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$$

**20.** 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$$

**22.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$$

24. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/2)}{n^2 + 4n}$$

**26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

**30.** 
$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$$

**32.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$$

34. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n \cos^2 n}$$

**36.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

**38.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$$

#### 747

# 11.8

### Séries de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e  $c_n$ 's são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série (1) é uma série de *constantes* que podemos testar *para* convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Note que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos  $c_n = 1$  para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = 1 + x + x^{2} + \dots + x^{n} + \dots$$

que converge quando -1 < x < 1 e diverge quando  $|x| \ge 1$  (veja a Equação 11.2.5). Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é denominada série de potências em (x-a) ou série de potências centrada em a ou série de potências ao redor de a. Note que, ao escrever o termo correspondente a n=0 nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que  $(x-a)^0=1$ , mesmo quando x=a. Note também que, quando x=a todos os termos são 0 para  $n \ge 1$ , e assim a série de potências (2) sempre converge quando x=a.

**EXEMPLO 1**  $\square$  Para quais valores de x a série  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  é convergente?

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão. Se fizermos  $a_n$ , como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então  $a_n=n!x^n$ . Se  $x\neq 0$ , temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=\infty$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando  $x \neq 0$ . Então, a série dada converge apenas quando x = 0.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Para quais valores de x a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$  converge?

SOLUÇÃO Seja  $a_n = (x - 3)^n/n$ , Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \quad \text{quando } n \to \infty$$

#### □ SÉRIE TRIGONOMÉTRICA

Uma série de potência é aquela na qual cada termo é uma função de potência. Uma série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

é uma série cujos termos são funções trigonométricas.

Pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente, e portanto convergente, quando |x - 3| < 1 e é divergente quando |x - 3| > 1. Agora

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

assim a série converge quando 2 < x < 4 e diverge quando x < 2 ou x > 4.

O Teste da Razão não fornece informação quando |x-3|=1; assim, devemos considerar x=2 e x=4 separadamente. Se colocarmos x=4 na série, ela se tornará  $\sum 1/n$ , a série harmônica, que é divergente. Se x=2, a série é  $\sum (-1)^n/n$ , que converge pelo Teste da Série Alternada. Então a série dada converge para  $2 \le x < 4$ .

Veremos que o principal uso de uma série de potências é que ela fornece uma maneira de representar algumas das mais importantes funções que aparecem na matemática, na física e na química. Em particular, a soma da série de potências no próximo exemplo é chamada **função de Bessel**, em homenagem ao astrônomo alemão Friedrich Bessel (1784-1846), e a função dada no Exercício 33 é outro exemplo de uma função de Bessel. De fato, essas funções surgiram primeiramente quando Bessel resolveu a equação de Kepler da descrição do movimento planetário. Desde aquele tempo, essas funções têm sido aplicadas em muitas situações físicas diferentes, incluindo a distribuição de temperatura em uma placa circular e o formato da membrana de um tambor vibrando (veja as fotografias na página 696).

EXEMPLO 3 
Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

SOLUÇÃO Seja  $a_n = (-1)^n x^{2n} / [2^{2n} (n!)^2]$ . Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)} [(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} \right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2} (n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \quad \text{para todo } x$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada converge para todos os valores de x. Em outras palavras, o domínio da função de Bessel  $J_0$  é  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Lembre-se de que a soma de uma série é igual ao limite da seqüência das somas parciais. Assim, quando definimos a função de Bessel no Exemplo 3 como a soma de uma série, queremos dizer que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$
 onde  $s_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i} (i!)^2}$ 

As primeiras somas parciais são

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456}$$

 $\begin{array}{c|c}
 & s_1 \\
\hline
 & s_6 \\
\hline
 & s_7 \\
\hline
 &$ 

FIGURA 1 Somas parciais da função de Bessel J<sub>0</sub>

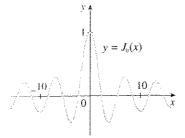


FIGURA 2

A Figura 1 mostra os gráficos dessas somas parciais, que são polinômios. Todas são aproximações para a função  $J_0$ , mas note que as aproximações se tornam melhores quando mais termos são incluídos. A Figura 2 mostra um gráfico mais completo da função de Bessel.

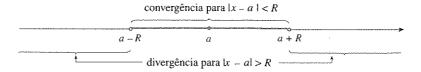
Para as séries de potências que temos visto até agora, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo [um intervalo finito para a série geométrica e a série no Exemplo 2, o intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$  no Exemplo 3 e um intervalo colapsado  $[0, 0] = \{0\}$  no Exemplo 1]. O teorema a seguir, provado no Apêndice F, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

- Teorema Para uma dada série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  existem apenas três possibilidades:
- (i) A série converge apenas quando x = a.
- (ii) A série converge para todo x.
- (iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se |x a| < R e diverge se |x a| > R.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é R=0 no caso (i) e  $R=\infty$  no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é  $(-\infty,\infty)$ . No caso (iii) note que a desigualdade |x-a| < R pode ser reescrita como a-R < x < a+R. Quando x é um extremo do intervalo, isto é,  $x=a\pm R$ , qualquer coisa pode acontecer — a série pode convergir em um ou ambos os extremos ou divergir em ambos os extremos. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R)$$
  $(a-R, a+R]$   $[a-R, a+R)$   $[a-R, a+R]$ 

A situação é ilustrada na Figura 3.



Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	R = 1	(-1, I)
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$	R = 0	{0}
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	R = 1	[2, 4)
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$	$R = \infty$	(~∞, ∞)

FIGURA 3

Em geral, o Teste da Razão (ou algumas vezes o Teste da Raiz) deve ser usado para determinar o raio de convergência R. Os Testes da Razão e da Raiz sempre falham quando x é um extremo do intervalo de convergência; assim, os extremos devem ser checados com algum outro teste.

EXEMPLO 4 

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUÇÃO Seja  $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$ . Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n} \right| = \left| -3x \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right|$$

$$= 3 \sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}} |x| \to 3|x| \quad \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se 3|x| < 1 e diverge se 3|x| > 1. Então, ela converge se  $|x| < \frac{1}{3}$  e diverge se  $|x| > \frac{1}{3}$ . Isso significa que o raio de convergência é  $R = \frac{1}{3}$ .

Sabemos que a série converge no intervalo  $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ , mas devemos agora testar a convergência nos extremos desse intervalo. Se  $x=-\frac{1}{3}$ , a série torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que diverge. (Use o Teste da Integral ou simplesmente observe que ela é uma p-série com  $p = \frac{1}{2} < 1$ .) Se  $x = \frac{1}{3}$ , a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série de potências dada converge quando  $-\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$ ; assim, o intervalo de convergência é  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ .

EXEMPLO 5 

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUÇÃO Se  $a_n = n(x + 2)^n/3^{n+1}$ , então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right|$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{quando } n \to \infty$$

Usando o Teste da Razão vemos que a série converge se |x + 2|/3 < 1 e diverge se |x + 2|/3 > 1. Assim ela converge se |x + 2| < 3 e diverge se |x + 2| > 3. Então o raio de convergência é R = 3.

A designaldade |x + 2| < 3 pode ser escrita como -5 < x < 1; assim, testamos a série nos extremos -5 e 1. Quando x = -5, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência  $[(-1)^n n$  não converge para 0]. Quando x = 1, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então a série converge apenas quando -5 < x < 1, assim, o intervalo de convergência é (-5, 1).

# Exercícios

- 1. O que é uma série de potências?
- 2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
  - (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3-28 🗆 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

4. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$$

$$6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

**9.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 4^n x^n$$

**10.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

11. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$$

**12.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$$

13. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$$

**14.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x-1)^n$$

**16.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n2^n}$$

**18.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$$

**19.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$$

**20.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$$

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n$$
,  $b>0$  **22.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$ 

22. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$$

**24.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$$

**25.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$$

**26.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n \ln n}$$

**27.** 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} x^{n}$$

23. Se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$  for convergente, as séries que se seguem são

(a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n$$

(b) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n$$

**30.** Suponha que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge quando x = -4 e diverge quando x = 6. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

(a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

(b) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$$

(a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$
(c) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$$

(b) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$$
  
(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$ 

31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

**32.** Plote na mesma tela as primeiras somas parciais  $s_n(x)$  da série  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , junto com a função-soma f(x) = 1/(1-x). Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para f(x)?

#### 33. A função $J_1$ definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

é denominada função de Bessel de ordem 1.

- (a) Encontre seu domínio.
- (b) Plote as primeiras somas parciais na mesma tela.
- (c) Se seu CAS tiver funções de Bessel programadas, plote  $J_1$  na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam  $J_1$ .

#### 34. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada função de Airy, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).

- (a) Encontre o domínio da função de Airy.
- (b) Plote as primeiras somas parciais  $s_n(x)$  na mesma tela.
- (c) Se seu CAS tiver funções de Airy programadas, plote A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

#### 35. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são  $c_{2n} = 1$  e  $c_{2n+1} = 2$  para todo  $n \ge 0$ . Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para f(x).

- **36.** Se  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , onde  $c_{n+4} = c_n$  para todo  $n \ge 0$ , encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para f(x).
- 37. Mostre que, se  $\lim_{n\to\infty} ||c_n|| = c$  onde  $c \neq 0$ , então o raio de convergência da série de potências  $\sum c_n x^n \notin R = 1/c$ .
- 38. Suponha que a série de potências ∑ c<sub>n</sub>(x a)<sup>n</sup> satisfaz c<sub>n</sub> ≠ 0 para todo n. Mostre que, se lim<sub>n→x</sub> |c<sub>n</sub>/c<sub>n+1</sub>| existe, então ele é igual ao raio de convergência da série de potências.
- 39. Suponha que a série Σ c<sub>n</sub>x<sup>n</sup> tenha raio de convergência 2 e que a série Σ d<sub>n</sub>x<sup>n</sup> tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série Σ (c<sub>n</sub> + d<sub>n</sub>)x<sup>n</sup>? Explique.
- **40.** Suponha que o raio de convergência da série de potência  $\sum c_n x^n$  seja R. Qual é o raio da série de potência  $\sum c_n x^{2n}$ ?

# 11.9

### Representações de Funções como Séries de Potências

Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da seqüência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x}=\lim_{n\to\infty}s_n(x)$$

onde

$$x_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

e a n-ésima soma parcial. Note que, quando n aumenta,  $s_n(x)$  se torna methor aproximação de f(x) para -1 < x < 1.

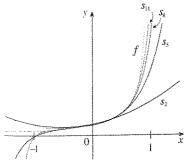


FIGURA 1

 $f(x) = \frac{1}{1-x}$  e algumas somas parciais

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries. Você pode imaginar por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar as funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 5 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com a = 1 e r = x. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função f(x) = 1/(1-x) como uma soma de uma série de potências.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Expresse  $1/(1 + x^2)$  como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por  $-x^2$  na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

3,00

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando  $|-x^2| < 1$ , isto é,  $x^2 < 1$ , ou |x| < 1. Portanto o intervalo de convergência é (-1, 1). (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Encontre uma representação em série de potências para 1/(x + 2). SOLUÇÃO Para colocar essa função na forma do lado esquerdo da Equação 1, primeiro fatoramos um 2 do denominador

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

A série converge quando |-x/2| < 1, isto é, |x| < 2. Assim o intervalo de convergência é (-2, 2).

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Encontre uma representação em série de potências para  $x^3/(x+2)$ . SOLUÇÃO Como essa função é apenas  $x^3$  vezes a função no Exemplo 2, tudo o que temos de fazer é multiplicar essa série por  $x^3$ :

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$
$$= \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{8} x^5 - \frac{1}{16} x^6 + \cdots$$

Outra maneira de escrever essa série é como se segue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como no Exemplo 2, o intervalo de convergência é (-2, 2).

### Diferenciação e Integração de Série de Potências

A soma de uma série de potências é uma função  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$  cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder diferenciar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não provaremos) diz que podemos fazer isso por diferenciação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **diferenciação e integração termo a termo.** 

**2** Teorema Se a série de potências  $\sum c_n(x-a)^n$  tiver um raio de convergência R > 0, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo (a - R, a + R) e

(i) 
$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

 $\Box$  É legitimo mover  $x^3$  através do sinal de somatório, porque ele não depende de n. [Use o Teorema 11.2.8(i) com  $c=x^3$ .]

 $\square$  Na parte (ii),  $\int c_0 dx = c_0 x + C_1$  é escrito como  $c_0(x-a) + C$ , onde  $C = C_1 + ac_0$ ; assim, todos os termos da série têm a mesma forma.

(ii) 
$$\int f(x) dx = C + c_0(x - a) + c_1 \frac{(x - a)^2}{2} + c_2 \frac{(x - a)^3}{3} + \cdots$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência da série de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

NOTA 1 D As Equações (i) e (ii) no Teorema 2 podem ser reescritas na forma

(iii) 
$$\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ c_n (x-a)^n \right]$$

(iv) 
$$\int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx$$

Sabemos que, para somas finitas, a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que a integral de uma soma é a soma das integrais. As Equações (iii) e (iv) afirmam que o mesmo é verdadeiro para somas infinitas, desde que estejamos lidando com *séries de potência*. (Para outros tipos de séries de funções a situação não é tão simples; veja o Exercício 36.)

NOTA 2 = Embora o Teorema 2 diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é diferenciada ou integrada, isso não significa que o intervalo de convergência permanece o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em um extremo enquanto a série diferenciada diverge nesse ponto (veja o Exercício 37).

NOTA 3 DA idéia de diferenciação de uma série de potências termo a termo é a base para um método poderoso para resolver as equações diferenciais. Discutiremos esse método no Capítulo 17.

EXEMPLO 4 🗆 No Exemplo 3 da Seção 11.8, vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

é definida para todo x. Então, pelo Teorema 2,  $J_0$  é diferenciável para todo x, e sua derivada é encontrada pela diferenciação termo a termo, como a seguir:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n} (n!)^2}$$

200

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Expresse  $1/(1-x)^2$  como uma série de potências pela diferenciação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

SOLUÇÃO Diferenciando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Podemos trocar n por n + 1 e escrever a resposta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acordo com o Teorema 2, o raio de convergência da série diferenciada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, R = 1.

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Encontre uma representação em série de potências para  $\ln(1-x)$  e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Notamos que, exceto por um fator de -1, a derivada dessa função é 1/(1-x). Assim integramos ambos os lados da Equação 1:

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x} dx = \int (1+x+x^2+\cdots) dx$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\cdot 3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C |x| < 1$$

Para determinar o valor de C, colocamos x = 0 nessa equação e obtemos  $-\ln(1-0) = C$ . Então, C = 0 e

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: R = 1.

Note o que acontece quando colocamos  $x = \frac{1}{2}$  no resultado do Exemplo 6. Como  $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ , vemos que

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Encontre uma representação em série de potências para  $f(x) = tg^{-1}x$ .

SOLUÇÃO Observamos que  $f'(x) = 1/(1 + x^2)$  e encontramos a série requerida pela integração da série de potências para  $1/(1 + x^2)$  encontrada no Exemplo 1.

$$tg^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1-x^2+x^4-x^6+\cdots) dx$$
$$= C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Para encontrar C, colocamos x = 0 e obtemos  $C = tg^{-1}0 = 0$ . Portanto

$$tg^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como o raio de convergência da série para  $1/(1 + x^2)$  é 1, o raio de convergência dessa série para  $tg^{-1}x$  é também 1.

- (a) Avalie  $\int [1/(1+x^7)]dx$  como uma série de potências.
- (b) Use a parte (a) para aproximar  $\int_0^{0.5} \left[1/(1+x^7)\right] dx$  com precisão de  $10^{-7}$ .

 $\square$  A série de potências para  $\operatorname{tg}^{-1}x$  obtida no Exemplo 7 é chamada *série de Gregory*, em homenagem ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton. Mostramos que a série de Gregory é válida quando -1 < x < 1, mas acontece (embora não seja fácil provar) que ela também é válida quando  $x = \pm 1$ . Note que quando  $x = \pm 1$  a série torna-se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse belo resultado é conhecido como a fórmula de Leibniz para  $\pi$ .

 $\square$  Esse exemplo demonstra uma maneira na qual as representações em séries de potência são úteis. Integrar  $1/(1+x^7)$  manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas algébricos computacionais devolvem formas diferentes da resposta, mas eles são todos extremamente complicados. (Se você tiver um CAS, experimente-o.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um CAS.

### SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando,  $1/(1 + x^7)$ , como uma soma de uma série de potências. Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por  $-x^7$ :

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1+x^7} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$
$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para  $|-x^7| < 1$ , isto é, para |x| < 1.

(b) Aplicando o Teorema da Avaliação não importa qual antiderivada utilizamos; assim vamos usar a antiderivada da parte (a) com C=0:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} dx = \left[ x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \dots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \dots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \dots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas, como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de adicionar os termos com n = 3, o erro é menor que o termo com n = 4:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Assim temos

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0,49951374$$

# 11.9 Exercícios

- 1. Se o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  for 10, qual é o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ ? Por quê?
- **2.** Suponha que você saiba que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para |x| < 2. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3-10 □ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. 
$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

4. 
$$f(x) = \frac{3}{1 - x^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 9x^2}$$

**9.**  $f(x) = \frac{x}{9 + x^2}$ 

 $10. \quad f(x) = \frac{x^2}{a^3 - x^3}$ 

11-12 ☐ Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

**11.** 
$$f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$$

**11.** 
$$f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$$
 **12.**  $f(x) = \frac{7x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$ 

(a) Use diferenciação para achar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+x\right)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Ache uma representação em série de potências para  $f(x) = \ln(1 + x)$ . Qual é o raio de convergência?

(b) Use item (a) para encontrar uma série de potências para  $f(x) = x \ln(1+x).$ 

(c) Use item (a) para achar uma série de potências para  $f(x) = \ln(x^2 + 1).$ 

15-18 🗆 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

$$\mathbf{15} \quad f(x) = \ln(5 - x)$$

**16.** 
$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$$

$$17. \ f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

**18.** 
$$f(x) = \arctan(x/3)$$

19-22 🗆 Encontre uma representação em série de potências para f, plote f e várias somas parciais  $s_n(x)$  na mesma tela. O que acontece quando n aumenta?

**19.** 
$$f(x) = \ln(3 + x)$$

**20.** 
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 25}$$

21. 
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
 22.  $f(x) = \lg^{-1}(2x)$ 

**22.** 
$$f(x) = tg^{-1}(2x)$$

23-26 

Avalie a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

$$23. \int \frac{t}{1-t^8} dt$$

$$24. \int \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

**25.** 
$$\int \frac{x - tg^{-1}x}{x^3} dx$$
 **26.**  $\int tg^{-1}(x^2) dx$ 

**26.** 
$$\int tg^{-1}(x^2) \, dx$$

27-30 Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

$$27. \quad \int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5} \, dx$$

**28.** 
$$\int_{0}^{0.4} \ln(1+x^4) dx$$

757

**29.** 
$$\int_0^{1/3} x^2 \, \mathrm{tg}^{-1}(x^4) \, dx$$

$$30. \quad \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^6}$$

31. Use o resultado do Exemplo 6 para calcular In 1,1 com precisão de cinco casas decimais.

32. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

**33.** (a) Mostre que  $J_0$  (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x) = 0$$

(b) Avalie  $\int_0^1 J_0(x) dx$  com precisão de três casas decimais.

34. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que  $J_1$  satisfaz a equação diferencial

$$x^2J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que  $J_0'(x) = -J_1(x)$ .

35. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que  $f(x) = e^x$ .

**36.** Seja  $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$ . Mostre que a série  $\sum f_n(x)$  converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas  $\sum f'_n(x)$ diverge quando  $x = 2n\pi$ , n um inteiro. Para quais valores de x a série  $\sum f_n''(x)$  converge?

**37.** Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

**38.** (a) Começando com a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$
,  $|x| < 1$  (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 

(ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$$

(ii) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$$
 (iii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

(iii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$$

39. Use a série de potências para  $tg^{-1}x$  para provar a seguinte expressão para  $\pi$  como a soma de uma série infinita

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Ao fatorar  $x^3 + 1$  como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse  $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para provar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left( \frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

### 11.10 Séries de Taylor e de Maclaurin

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: quais funções têm representações em série de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por uma série de potências.

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes  $c_n$  devem ser termos de f. Para começar, note que, se colocarmos x = a na Equação 1, então todos os termos depois do primeiro são 0 e obtemos

$$f(a) = c_0$$

Pelo Teorema 11.9.2, podemos diferenciar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de x = a na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora diferenciamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

3 
$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots$$
  $|x-a| < R$ 

Novamente colocamos x = a na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A diferenciação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

759

e a substituição de x = a na Equação 4 resulta em

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a diferenciar e substituir x = a, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Resolvendo essa equação para o n-ésimo coeficiente  $c_n$ , obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para n = 0 se adotarmos as convenções de que 0! = 1 e  $f^{(0)} = f$ . Então provamos o teorema a seguir.

**[5] Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Substituindo essa fórmula para  $c_n$  de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da forma a seguir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\tilde{6}} \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

A série na Equação 6 é chamada série de Taylor da função f em a (ou ao redor de a ou centrada em a). Para o caso especial a=0 a série de Taylor se torna

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência, e lhe foi dado o nome especial de série de Maclaurin.

NOTA  $\Box$  Mostramos que, se f puder ser representada como uma série de potências ao redor de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor. Mas existem funções que não são iguais à soma de suas séries de Taylor. Um exemplo de tal função é dado no Exercício 62.

☐ A série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), e a série de Maclaurin tem esse nome em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), apesar do fato de a série de Maclaurin ser apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a idéia da representação de funções particulares como somas de séries de potências remonta a Newton, e a série geral de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory em 1668 e pelo matemático suíço John Bernoulli na década de 1690. Taylor aparentemente não sabia do trabalho de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro Methodus incrementorum directa et inversa. A série de Maclaurin recebeu essa denominação por causa de Colin Maclaurin, que a popularizou em seu livro-texto de cálculo Treatise of Fluxions, publicado em 1742.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Encontre a série de Maclaurin da função  $f(x) = e^x$  e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Se  $f(x) = e^x$ , então  $f^{(n)}(x) = e^x$ , assim  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$  para todo n. Portanto a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrar o raio de convergência fazemos  $a_n = x^n/n!$ . Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

assim, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x, e o raio de convergência é  $R=\infty$ .

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que se  $e^x$  tiver uma expansão em série de potências em 0, logo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Então, como determinar se  $e^x$  tem uma representação em série de potências?

Vamos investigar uma questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que f(x) é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Note que  $T_n$  é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de grau n de f em a.** Por exemplo, para a função exponencial  $f(x) = e^x$ , o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com n = 1, 2 e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x$$
  $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$   $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ 

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1.

Em geral, f(x) é a soma de sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Se fizermos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$
 de maneira que  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ 

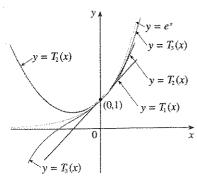


FIGURA 1

 $\square$  Quando n aumenta,  $T_n(x)$  parece aproximar  $e^x$  na Figura 1. Isso sugere que  $e^x$  seja igual à soma de sua série de Taylor.

então  $R_n(x)$  é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que  $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ , segue que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[ f(x) - R_n(x) \right] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Aqui, portanto, provamos o seguinte:

Teorema Se  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ , onde  $T_n$  é o polinômio de Taylor de grau n de f em a e

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

para |x - a| < R, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo |x - a| < R.

Ao tentar mostrar que  $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$  para uma função específica f, geralmente usamos o fato a seguir.

[3] Designaldade de Taylor Se  $|f^{(n+1)}(x)| \le M$  para  $|x-a| \le d$ , então o resto  $R_n(x)$  da série de Taylor satisfaz a designaldade

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$
 para  $|x-a| \le d$ 

Para ver por que isso é verdadeiro para n=1, assumimos que  $|f''(x)| \le M$ . Em particular, temos  $f''(x) \le M$ ; assim, para  $a \le x \le a + d$ , temos

$$\int_a^x f''(t) dt \le \int_a^x M dt$$

Uma antiderivada de f'' é f'; dessa forma, pela parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) - f'(a) \le M(x - a)$$
 ou  $f'(x) \le f'(a) + M(x - a)$ 

Então

$$\int_a^x f'(t) dt \le \int_a^x [f'(a) + M(t - a)] dt$$

$$f(x) - f(a) \le f'(a)(x - a) + M \frac{(x - a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \le \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Mas 
$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$
. Logo,

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2} (x - a)^2$$

 $\square$  Como alternativas para a desigualdade de Taylor, temos as seguintes fórmulas para o termo resto. Se  $f^{(n+1)}$  se for contínua sobre um intervalo I e x  $\in$  I, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Este é chamado forma integral do termo resto. Outra fórmula, chamada forma de Lagrange para o resto, estabelece que existe um número z entre x e a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Essa versão é uma extensão do Teorema do Valor Médio (o qual é o caso guando n=0).

Provas para estas fórmulas, juntamente com as discussões de como usá-las para resolver os exemplos das Seções 11.10 e 11.12, estão dadas no website

www.stewartcalculus.com

Clique em Additional Topics e depois em Formulas for Remainder Term in Taylor series.

☐ Em 1748, Leonhard Euler usou a Equação 12 para achar o valor correto de *e* com 23 dígitos. Em 2000, Xavier Gourdon e S. Kondo novamente usaram a série em (12), calcularam *e* com mais de 12 bilhões de casas decimais. As técnicas especiais que eles empregaram para acelerar os cálculos são explicadas no endereço

www.numbers.computation.free.fr

Um argumento similar, usando  $f''(x) \ge -M$ , mostra que

$$R_1(x) \ge -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

Assim

$$|R_i(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Embora tenhamos assumido que x > a, cálculos similares mostram que essa desigualdade é também verdadeira para x < a.

Isso prova a Desigualdade de Taylor para o caso onde n=1. O resultado para um n qualquer é provado de uma maneira similar pela integração n+1 vezes. (Veja o Exercício 61 para o caso n=2.)

NOTA 

Na Seção 11.12 exploraremos o uso da Desigualdade de Taylor para aproximar funções. Nosso uso imediato é aplicá-la junto com o Teorema 8.

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série  $\sum x^n/n!$  converge para todo x, e seu n-ésimo termo se aproxima de 0.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Prove que  $e^x$  é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO Se  $f(x) = e^x$ , então  $f^{(n+1)}(x) = e^x$  para todo n. Se d for qualquer número positivo e  $|x| \le d$ , então  $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \le e^d$ . Assim a Desigualdade de Taylor, com a = 0 e  $M = e^d$ , diz que

$$|R_n(x)| \le \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{para } |x| \le d$$

Note que a mesma constante  $M = e^d$  funciona para cada valor de n. Mas, a partir da Equação 10, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^d \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Segue do Teorema do Confronto que  $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$  e, portanto,  $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$  para todos os valores de x. Pelo Teorema 8,  $e^x$  é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x$$

Em particular, se colocarmos x = 1 na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como uma soma de uma série infinita:

3

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Encontre a série de Taylor para  $f(x) = e^x$  em a = 2.

SOLUÇÃO Temos  $f^{(n)}(2) = e^2$ ; e assim, colocando a = 2 na definição de uma série de Taylor (6), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$$

Novamente pode ser verificado, como no Exemplo 1, que o raio de convergência é  $R = \infty$ . Como no Exemplo 2, podemos verificar que  $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ , assim

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n \qquad \text{para todo } x$$

Temos duas expansões em séries de potências para  $e^x$ , a série de Maclaurin na Equação 11 e a série de Taylor na Equação 13. A primeira é melhor, se estivermos interessados em valores de x próximos de 0 e, a segunda, também, se x estiver próximo de 2.

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Encontre a série de Maclaurin para sen x e prove que ela representa sen x para todo x.

SOLUÇÃO Arranjamos nossos cálculos em duas colunas como a seguir:

$$f(x) = \sin x$$
  $f(0) = 0$   
 $f'(x) = \cos x$   $f'(0) = 1$   
 $f''(x) = -\sin x$   $f''(0) = 0$   
 $f'''(x) = -\cos x$   $f'''(0) = -1$   
 $f^{(4)}(x) = \sin x$   $f^{(4)}(0) = 0$ 

Como as derivadas se repetem de quatro em quatro, podemos escrever a série de Maclaurin como a seguir:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como  $f^{(n+1)}(x)$  é  $\pm$ sen x ou  $\pm$ cos x, sabemos que  $|f^{(n+1)}(x)| \le 1$  para todo x. Assim podemos tomar M=1 na Desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pela Equação 10, o lado direito dessa desigualdade se aproxima de 0 quando  $n \to \infty$ , dessa forma,  $|R_n(x)| \to 0$  pelo Teorema do Confronto. Segue-se que  $R_n(x) \to 0$  quando  $n \to \infty$ , assim sen x é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 8.

☐ A Figura 2 mostra o gráfico de sen *x* junto com seus polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Note que, quando n aumenta,  $T_n(x)$  torna-se melhor aproximação para sen x.

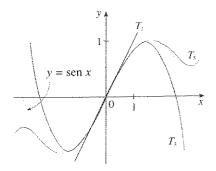


FIGURA 2

☐ As séries de Maclaurin para  $e^x$ , sen x e  $\cos x$  que encontramos nos Exemplos 2, 4 e 5 foram descobertas primeiro, usando-se métodos diferentes, por Newton. (Há evidências de que a série para  $\sin x$  e  $\cos x$  são conhecidas dos astronômos indianos há mais de um século antes de Newton, mas esse conhecimento não se espalhou pelo mundo.)

Essas equações são formidáveis, porque dizem que saberemos tudo sobre cada uma dessas funções se conhecermos todas as suas derivadas na origem.

 $\Box$  Obtivemos duas representações em série diferentes para sen x, isto é, a série de Maclaurin no Exemplo 4 e a série de Taylor no Exemplo 7. É melhor usarmos a série de Maclaurin para valores de x próximos de 0 e a série de Taylor para valores próximos de  $\pi/3$ . Note que o terceiro polinômio de Taylor  $T_3$  na Figura 3, é uma boa aproximação para sen x próximo de  $\pi/3$ , mas não é boa próximo de 0. Compare-o com o terceiro polinômio de Maclaurin  $T_3$  na Figura 2, onde o oposto é verdadeiro.

Escrevemos o resultado do Exemplo 4 para referência futura.

sen 
$$x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo } x$$

EXEMPLO 5  $\Box$  Encontre a série de Maclaurin para cos x.

SOLUÇÃO Poderíamos proceder diretamente como no Exemplo 4, mas é mais fácil diferenciar a série de Maclaurin para sen x dada pela Equação 15:

Como a série de Maclaurin para sen x converge para todo x, o Teorema 2 da Seção 11.9 nos conta que a série diferenciada para cos x também converge para todo x. Então

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x$$

EXEMPLO 6  $\Box$  Encontre a série de Maclaurin para a função  $f(x) = x \cos x$ .

SOLUÇÃO Em vez de calcular derivadas e substituir na Equação 7, é mais fácil multiplicar a série para cos x (Equação 16) por x:

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

ing ing

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Represente  $f(x) = \sin x$  como a soma de sua série de Taylor centrada em  $\pi/3$ .

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \operatorname{cos} x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\operatorname{cos} x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

e esse padrão se repete indefinidamente. Portanto a série de Taylor em  $\pi/3$  é

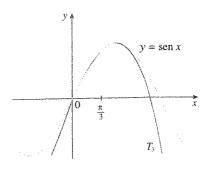


FIGURA 3

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

A prova de que essa série representa sen x para todo x é muito similar àquela no Exemplo 4. [Apenas troque x por  $x - \pi/3$  em (14).] Podemos escrever a série na notação de sigma se separarmos os termos que contêm  $\sqrt{3}$ :

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1}$$

A série de potências que obtivemos por métodos indiretos nos Exemplos 5 e 6 e na Seção 11.9 são realmente as séries de Taylor e de Maclaurin para as funções dadas, porque o Teorema 5 afirma que, não importa como uma série de potências  $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$  é obtida, é sempre verdade que  $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ . Em outras palavras, os coeficientes são unicamente determinados.

Colecionamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que derivamos nesta seção e na anterior.

Séries de Maclaurin importantes e seus intervalos de convergência.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
 (-1, 1)

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$
  $(-\infty, \infty)$ 

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
  $(-\infty, \infty)$ 

$$tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
 [-1, 1]

Uma razão para a importância das séries de Taylor é que elas nos permitem integrar funções que não poderíamos manejar anteriormente. De fato, na introdução deste capítulo mencionamos que Newton freqüentemente integrava funções, primeiro, expressando-as como uma série de potências e, depois, integrando a série termo a termo. A função  $f(x) = e^{-x^2}$  não pode ser integrada pelas técnicas discutidas até agora, porque sua antiderivada não é uma função elementar (veja a Seção 7.5 no Volume I). No exemplo a seguir, usaremos a idéia de Newton para integrar essa função.

#### EXEMPLO 8 =

- (a) Avalie  $\int e^{-x^2} dx$  como uma série infinita.
- (b) Avalie  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  com precisão de 0,001.

### SOLUÇÃO

(a) Primeiro encontramos a série de Maclaurin para  $f(x) = e^{-x^2}$ . Embora seja possível usar o método direto, vamos encontrá-la simplesmente trocando x por  $-x^2$  na série para  $e^x$  dada na tabela de séries de Maclaurin. Então, para todos os valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots$$

Essa série converge para todo x, porque a série original  $e^{-x^2}$  converge para todo x.

(b) O Teorema da Avaliação fornece

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[ x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,7475$$

O Teorema da Estimativa da Série Alternada mostra que o erro envolvido nessa aproximação é menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

Outro uso da série de Taylor é ilustrado no próximo exemplo. O limite poderia ser encontrado com a Regra de L'Hôspital, mas, em vez disso, usamos uma série.

EXEMPLO 9 
$$\square$$
 Avalie  $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .

SOLUÇÃO Usando a série de Maclaurin para  $e^x$ , temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

porque as séries de potências são funções contínuas.

 $\equiv$  Podemos tomar C=0 na antiderivada na parte (a).

☐ Alguns sistemas algébricos computacionais calculam o limite dessa maneira.

### Multiplicação e Divisão de Séries de Potências

Se as séries de potências forem adicionadas ou subtraídas, elas se comportarão como polinômios (o Teorema 11.2.8 mostra isso). De fato, como o próximo exemplo ilustra, elas também podem ser multiplicadas e divididas como polinômios. Encontramos apenas os primeiros termos, pois os cálculos para os termos posteriores tornam-se tediosos e os termos iniciais são os mais importantes.

EXEMPLO 10  $\Box$  Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para (a)  $e^x \operatorname{sen} x e$  (b)  $\operatorname{tg} x$ .

#### SOLUÇÃO

(a) Usando a série de Maclaurin para  $e^x$  e sen x na tabela, temos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Multiplicamos essas expressões juntando termos semelhantes como para polinômios:

$$\begin{array}{r}
 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
 x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
 \hline
 x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
 x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
 \end{array}$$

Então

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Usando a série de Maclaurin na tabela, obtemos

$$tg x = \frac{\sec x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos um procedimento parecido com a divisão longa:

$$\begin{array}{r}
 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots )x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
 \hline
 \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 \hline
 \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
 \hline
 \frac{2}{15}x^5 + \cdots
 \end{array}$$

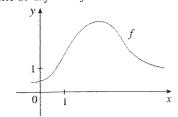
Então

$$tg \ x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Embora não tenhamos tentado justificar as manipulações formais usadas no Exemplo 10, elas são legítimas. Existe um teorema que afirma que, se  $f(x) = \sum c_n x^n$  e  $g(x) = \sum b_n x^n$  convergirem para |x| < R e as séries forem multiplicadas como se fossem polinômios, logo, a série resultante também convergirá para |x| < R e representará f(x)g(x). Para a divisão, necessitamos  $b_0 \neq 0$ ; a série resultante converge para |x|, suficientemente pequeno.

## Exercícios

- 1. Se  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-5)^n$  para todo x, escreva uma fórmula para  $b_8$ .
- 2. (a) O gráfico de f é mostrado. Explique por que a série  $1.6 - 0.8(x - 1) + 0.4(x - 1)^2 - 0.1(x - 1)^3 + \cdots$ não é a série de Taylor de f centrada em 1.



(b) Explique por que a série

$$2.8 + 0.5(x - 2) + 1.5(x - 2)^2 - 0.1(x - 2)^3 + \cdots$$
  
 $n\tilde{a}o$  é a série de Taylor de  $f$  centrada em 2.

3-10  $\square$  Encontre a série de Maclaurin para f(x) usando a definição

de uma série de Maclaurin. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que  $R_n(x) \to 0$ .] Também encontre o raio de convergência associado.

$$3. \ f(x) = \cos x$$

**4.** 
$$f(x) = \sin 2x$$

**5.** 
$$f(x) = (1+x)^{-3}$$

**6.** 
$$f(x) = \ln(1 + x)$$

7. 
$$f(x) = e^{5x}$$

**8.** 
$$f(x) = xe^x$$

$$9. \quad f(x) = \mathrm{senh} \ x$$

$$\mathbf{10.}\,f(x)=\cosh x$$

11-18  $\square$  Encontre a série de Taylor para f(x) centrada no valor dado de a. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que  $R_n(x) \rightarrow 0.1$ 

**11.** 
$$f(x) = 1 + x + x^2$$
,  $a = 2$  **12.**  $f(x) = x^3$ ,  $a = -1$ 

12. 
$$f(x) = x^3$$
.  $a = -1$ 

**13.** 
$$f(x) = e^x$$
,  $a = 3$ 

**14.** 
$$f(x) = \ln x$$
,  $a = 2$ 

**15.** 
$$f(x) = \cos x$$
,  $a = \pi$ 

**16.** 
$$f(x) \sin x$$
,  $a = \pi/2$ 

17. 
$$f(x) = 1/\sqrt{x}$$
,  $a = 9$ 

**17.** 
$$f(x) = 1/\sqrt{x}$$
,  $a = 9$  **18.**  $f(x) = x^{-2}$ ,  $a = 1$ 

- 19. Prove que a série obtida no Exercício 3 representa cos x para
- 20. Prove que a série obtida no Exercício 16 representa sen x para todo x.
- 21. Prove que a série obtida no Exercício 9 representa sinh x para
- 22. Prove que a série obtida no Exercício 10 representa cosh x para todo x.

23-32 □ Use uma série de Maclaurin derivada nesta seção para obter a série de Maclaurin para a função dada.

$$23. \ f(x) = \cos \pi x$$

**24.** 
$$f(x) = e^{-x/2}$$

**25.** 
$$f(x) = x \operatorname{tg}^{-1} x$$

**26.** 
$$f(x) = \text{sen}(x^4)$$

27. 
$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

**28.** 
$$f(x) = x \cos 2x$$

**29.** 
$$f(x) = \sin^2 x$$
 [Dica: Use  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .]

**30.** 
$$f(x) = \cos^2 x$$

$$\mathbf{31.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

32. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

33-36 🗆 Encontre a série de Maclaurin de f. (por qualquer método) e seu raio de convergência. Plote f e seus primeiros polinômios na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

**33.** 
$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

**34.** 
$$f(x) = e^{-x^2} + \cos x$$

**35.** 
$$f(x) = \cos(x^2)$$

**36.** 
$$f(x) = 2^x$$

- 37. Encontre a série de Maclaurin para  $e^x$  e use-a para calcular  $e^{-0.2}$  com precisão de cinco casas decimais.
- 38. Use a série de Maclaurin para sen x para calcular sen 3° com precisão de cinco casas decimais.
- 39-42 Avalie a integral indefinida como uma série infinita.

$$39. \quad \int x \cos(x^3) \, dx$$

**40.** 
$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

**41.** 
$$\int \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

$$42. \quad \int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

43-46 🗆 Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

43. 
$$\int_0^1 x \cos(x^3) dx$$
 (três casas decimais)

**44.** 
$$\int_0^{0.2} [tg^{-1}(x^3) + sen(x^3)] dx$$
 (cinco casas decimais)

**45.** 
$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad (|\text{erro}| < 10^{-8})$$

**46.** 
$$\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2} dx \quad (|\text{erro}| < 0.001)$$

47-49 🗆 Use séries para avaliar o limite.

47. 
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-tg^{-1}x}{x^3}$$

**48.** 
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4 do Volume I usando a Regra de L'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

51-54 □ Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para cada função.

**51.** 
$$y = e^{-x^2} \cos x$$

**52.** 
$$y = \sec x$$

$$53. \quad y = \frac{x}{\sin x}$$

**54.** 
$$y = e^x \ln(1 - x)$$

55-60 □ Encontre a soma da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$$

**56.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n} (2n)!}$$

57. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1} (2n+1)!}$$

**58.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$$

**59.** 
$$3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$$

**60.** 
$$1 - \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} - \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$$

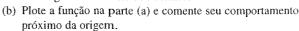
**61.** Prove a Desigualdade de Taylor para n = 2, isto é, prove que, se  $|f'''(x)| \le M$  para  $|x - a| \le d$ , então

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{6} |x-a|^3$$
 for  $|x-a| \le d$ 

62. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual a sua série de Maclaurin.



### Projeto de Laboratório 🎏 Um Limite Elusivo

Este projeto envolve a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} x)}$$

- 1. Use seu sistema de computação algébrica (CAS) para avaliar f(x) para x = 1; 0,1; 0,01; 0,001 e 0,0001. Parece que f(x) tem um limite quando  $x \to 0$ ?
- 2. Use CAS para plotar f próximo de x = 0. Parece que f(x) tem um limite quando  $x \to 0$ ?
- 3. Tente avaliar lim<sub>x→0</sub> f(x) com a Regra de L'Hôspital, usando seu CAS para encontrar as derivadas do numerador e do denominador. O que você descobriu? Quantas aplicações da Regra de L'Hôspital são necessárias?
- 4. Avalie lim, of(x) usando seu CAS para encontrar quantos termos foram necessários da série de Taylor do numerador e do denominador. (Use o comando Taylor no Maple ou Series no Mathematica.)
- 5. Use o comando *limit* em seu CAS para achar o  $\lim_{x\to 0} f(x)$  diretamente. (A maioria dos sistemas de computação algébrica usa o método do Problema 4 para calcular os limites.)
- 6. Tendo em vista as respostas aos Problemas 4 e 5, como você explica os resultados dos Problemas 1 e 2?

### 11.11

### A Série Binomial

Você deve conhecer o Teorema Binomial, que afirma que, se a e b forem quaisquer números reais e k for um inteiro positivo, então

$$(a+b)^{k} = a^{k} + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^{2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}a^{k-3}b^{3}$$

$$+ \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^{n}$$

$$+ \dots + kab^{k-1} + b^{k}$$

A notação tradicional para os coeficientes binomiais é

$$\binom{k}{0} = 1 \qquad \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} \qquad n = 1, 2, \dots, k$$

que nos permite escrever o Teorema Binomial na forma abreviada:

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a^{k-n} b^n$$

Em particular, se colocarmos a = 1 e b = x, teremos

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n$$

Um dos feitos de Newton foi estender o Teorema Binomial (Equação 1) para o caso no qual k não é mais um inteiro positivo. (Veja o Projeto Escrito na página 773.) Nesse caso, a expressão para  $(1 + x)^k$  não é mais uma soma finita; torna-se uma série infinita. Para encontrar essa série, calculamos a série de Maclaurin de  $(1 + x)^k$  da maneira usual:

Portanto, a série de Maclaurin de  $f(x) = (1 + x)^k$  é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Essa série é chamada série binomial. Se seu n-ésimo termo for  $a_n$ , então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n} \right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1} |x| = \frac{\left| 1 - \frac{k}{n} \right|}{1 + \frac{1}{n}} |x| \to |x| \quad \text{quando } n \to \infty$$

Então, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se |x| < 1 e diverge se |x| > 1.

O teorema a seguir afirma que  $(1 + x)^k$  é igual à soma de sua série de Maclaurin. É possível provar isso mostrando que o resto  $R_n(x)$  se aproxima de 0, mas isso é um pouco dificil. A prova esboçada no Exercício 19 é muito mais fácil.

2 A Série Binomial Se 
$$k$$
 for qualquer número real e  $|x| < 1$ , então 
$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
 
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$
 onde  $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \quad (n \ge 1)$  e  $\binom{k}{0} = 1$ 

Embora a série binomial seja sempre convergente quando |x| < 1, a questão de sua convergência ou não nos extremos,  $\pm 1$ , depende do valor de k. Ocorre que, a série converge em 1 se  $-1 < k \le 0$  e em ambos os extremos se  $k \ge 0$ . Note que, se k for um inteiro positivo e n > k, então a expressão para  $\binom{k}{n}$  contém um fator (k-k), assim  $\binom{k}{n} = 0$  para n > k. Isso significa que a série termina e é reduzida ao Teorema Binomial (Equação 1) quando k for um inteiro positivo.

Como temos visto, a série binomial é apenas um caso especial da série de Maclaurin; ela ocorre tão frequentemente que é útil lembrá-la.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Expanda  $\frac{1}{(1+x)^2}$  como uma série de potências.

SOLUÇÃO Usamos a série binomial com k = -2. O coeficiente binomial é

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-2-n+1)}{n!}$$
$$= \frac{(-1)^n 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n(n+1)}{n!} = (-1)^n (n+1)$$

e, assim, quando |x| < 1,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} {\binom{-2}{n}} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Encontre a série de Maclaurin para a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$  e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Como dada, f(x) não está exatamente na forma  $(1 + x)^k$ ; assim, a reescrevemos como a seguir:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a série binomial com  $k = -\frac{1}{2}$  e com x trocado por -x/4, temos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{4} \right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{x}{4} \right)^{n}$$

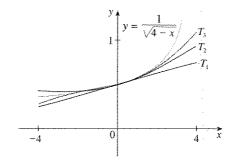
$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{x}{4} \right) + \frac{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right)}{2!} \left( -\frac{x}{4} \right)^{2} + \frac{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right)}{3!} \left( -\frac{x}{4} \right)^{3} + \dots + \frac{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right) \cdot \dots \cdot \left( -\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \left( -\frac{x}{4} \right)^{n} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{8} x + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 8^{2}} x^{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 8^{3}} x^{3} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{n! \cdot 8^{n}} x^{n} + \dots \right]$$

Sabemos a partir de (2) que essa série converge quando |-x/4| < 1, isto é, |x| < 4; assim, o raio de convergência é R=4.

☐ Uma série binomial é um caso especial de uma série de Taylor. A Figura 1 mostra os gráficos dos três primeiros polinômios de Taylor calculados a partir da resposta no Exemplo 2.

FIGURA 1



# Exercícios

1-8 🗆 Use a série binomial para expandir a função como uma série de potências. Estabeleça o raio de convergência

- 5.  $\sqrt[4]{1-8x}$

- 9-10 🗆 Use a série binomial para expandir a função como uma série de Maclaurin e para encontrar os três primeiros polinômios de Taylor, T1, T2 e T3. Plote a função e esses polinômios de Taylor no intervalo de convergência.
- (a) Use a série binomial para expandir  $1/\sqrt{1-x^2}$ .
  - (b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin para sen "1x.
- 12. (a) Use a série binomial para expandir  $1/\sqrt{1+x^2}$ .

- (b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin para  $senh^{-1}x$ .
- 13. (a) Expanda  $\sqrt{1+x}$  como uma série de potências.
  - (b) Use a parte (a) para estimar √1,01 com precisão de quatro casas decimais.
- 14. (a) Expanda  $1/\sqrt[4]{1+x}$  como uma série de potências.
  - (b) Use a parte (a) para estimar 1/<sup>4</sup>√1,1 com precisão de três casas decimais.
- **15.** (a) Expanda  $f(x) = x/(1-x)^2$  como uma série de potências.
  - (b) Use a parte (a) para encontrar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

- **16.** (a) Expanda  $f(x) = (x + x^2)/(1 x)^3$  como uma série de potências.
  - (b) Use a parte (a) para encontrar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

- (a) Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin de  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ .
  - (b) Use a parte (a) para avaliar  $f^{(10)}(0)$ .

- 18. (a) Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin de  $f(x) = 1/\sqrt{1 + x^3}$ .
  - (b) Use a parte (a) para avaliar  $f^{(9)}(0)$ .
- 19. Use as seguintes etapas para provar (2).
  - (a) Seja  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {k \choose n} x^n$ . Diferencie essa série para mostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x}$$
  $-1 < x < 1$ 

- (b) Seja  $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$  e mostre que h'(x) = 0.
- (c) Deduza que  $g(x) = (1 + x)^k$ .
- **20.** No Exercício 53 na Seção 10.2 foi mostrado que o comprimento da elipse  $x = a \sin \theta y = a \cos \theta$ , onde a > b > 0 é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, d\theta$$

onde  $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$  é a excentricidade da elipse. Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 44 na Seção 7.1 para expressar L como uma série em potências da excentricidade até o termo  $e^6$ .

### Projeto Escrito

#### Como Newton Descobriu a Série Binomial

O Teorema Binomial, que dá a expansão  $(a+b)^k$ , era conhecido pelos matemáticos chineses muitos séculos antes da época de Newton para o caso onde o expoente k é um inteiro positivo. Em 1665, quando tinha 22 anos, Newton foi o primeiro a descobrir a expansão em série infinita de  $(a+b)^k$  quando k é um expoente fracionário (positivo ou negativo). Ele não publicou sua descoberta, mas a estabeleceu e deu exemplos de como usá-la em uma carta (chamada hoje epístola prior) datada de 13 de junho de 1676, que ele enviou a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society of London, para transmiti-la a Leibniz. Quando Leibniz respondeu, ele perguntou como Newton tinha descoberto a série binomial. Newton escreveu uma segunda carta, a epístola posterior, em 24 de outubro de 1676, na qual ele explicou detalhadamente como chegou à sua descoberta por uma rota muito indireta. Ele estava investigando as áreas sob as curvas  $y = (1-x^2)^{n/2}$  de 0 até x para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$  Estas são fáceis de calcular se n for par. Observando os padrões e interpolando, Newton pôde adivinhar as respostas para valores de n ímpares. Então ele notou que poderia obter as mesmas respostas expressando  $(1-x^2)^{n/2}$  como uma série infinita.

Escreva um relatório sobre a descoberta de Newton da série binomial. Comece estabelecendo a série binomial na notação de Newton (veja a *epistola prior* na página 285 de [4] ou na página 402 de [2]). Explique por que a versão de Newton é equivalente ao Teorema 2 na Seção 11.11. Então leia a *epistola posterior* de Newton (veja a página 287 em [4] ou a página 404 em [2]) e explique os padrões que Newton descobriu nas áreas sob as curvas  $y = (1 - x^2)^{n/2}$ . Mostre como ele pôde adivinhar as áreas sob as curvas restantes e como verificou suas respostas. Finalmente, explique como essas descobertas levaram à série binomial. Os livros de Edwards [1] e Katz [3] contêm comentários sobre as cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 178–187.

- John Fauvel e Jeremy Gray, eds., The History of Mathematics: A Reader. Londres: MacMillan Press, 1987.
- 3. Victor Katz, A History of Mathematics: An Introduction. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 463–466.
- D. J. Struik, ed., A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

# 11,12

### Aplicações de Polinômios de Taylor

Nesta seção exploraremos dois tipos de aplicações de polinômios de Taylor. Primeiro, veremos como eles são usados para aproximar as funções — os cientistas de computação gostam deles porque os polinômios são as mais simples das funções. Depois, investigaremos como os físicos e os engenheiros utilizam esses polinômios na relatividade, óptica, radiações de corpos negros, dipolos elétricos, na velocidade das ondas de água e na construção de vias expressas através do deserto.

# Aproximando Funções Polinômios

Suponha que f(x) seja igual à soma de sua série de Taylor em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Na Seção 11.10 introduzimos a notação  $T_n(x)$  para a n-ésima soma parcial dessa série e a chamamos polinômio de Taylor de grau n de f em a. Então

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$
  
=  $f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ 

Como f é a soma de sua série de Taylor, sabemos que  $T_n(x) \to f(x)$  quando  $n \to \infty$ , e assim  $T_n$  pode ser usada como uma aproximação de f:  $f(x) \approx T_n(x)$ .

Note que o polinômio de Taylor de primeiro grau

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é o mesmo que a linearização de f em a discutida na Seção 3.11 do Volume I. Note também que  $T_1$  e sua derivada possuem o mesmo valor em a que f e f' têm. Em geral, pode ser mostrado que as derivadas de  $T_n$  em a concordam com aquelas de f até as derivadas de ordem n, inclusive (veja o Exercício 36).

Para ilustrar essas idéias, vamos olhar novamente para os gráficos de  $y = e^x$  e seus primeiros polinômios de Taylor, como mostrado na Figura 1. O gráfico de  $T_1$  é a reta tangente a  $y = e^x$  em (0, 1); essa reta tangente é a melhor aproximação linear para  $e^x$  próximo de (0, 1). O gráfico de  $T_2$  é a parábola  $y = 1 + x + x^2/2$ , e o gráfico de  $T_3$  é a curva cúbica  $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ , que é uma aproximação melhor para a curva exponencial  $y = e^x$  do que  $T_2$ . O próximo polinômio de Taylor  $T_4$  seria uma aproximação ainda melhor e assim por diante.

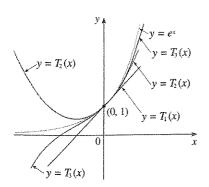


FIGURA 1

X	x = 0.2	x = 3.0
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
e*	1,221403	20,085537

Os valores na tabela dão uma demonstração numérica da convergência dos polinômios de Taylor  $T_n(x)$  para a função  $y = e^x$ . Vemos que, quando x = 0,2 a convergência é muito rápida, mas, quando x = 3 ela é um tanto mais lenta. De fato, quanto mais longe x está de 0, mais lentamente  $T_n(x)$  converge para  $e^x$ .

Quando usamos um polinômio de Taylor  $T_n$  para aproximar uma função f, temos de fazer as seguintes perguntas: quão boa é uma aproximação? Quão grande devemos tomar n para obter a precisão desejada? Para responder a essas questões, precisamos olhar os valores absolutos do resto:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Aqui existem três métodos possíveis para estimar o tarnanho do erro:

- 1. Se um dispositivo gráfico estiver disponível, podemos usá-lo para plotar  $|R_n(x)|$  e assim estimar o erro.
- 2. Se a série for alternada, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.
- 3. Em todos os casos podemos usar a Desigualdade de Taylor (Teorema 11.10.9), que diz que, se  $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ , então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

#### EXEMPLO 1

- (a) Aproxime a função  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  por um polinômio de Taylor de grau 2 em a = 8.
- (b) Qual é a precisão dessa aproximação quando  $7 \le x \le 9$ ?

### SOLUÇÃO

(a) 
$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \frac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

Então, o polinômio Taylor de segundo grau é

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x - 8) + \frac{f''(8)}{2!}(x - 8)^2$$
$$= 2 + \frac{1}{12}(x - 8) - \frac{1}{288}(x - 8)^2$$

A aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) A série de Taylor não é alternada quando x < 8; assim, não podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas nesse exemplo. Mas podemos usar a Desigualdade de Taylor com n = 2 e a = 8:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

onde  $|f'''(x)| \le M$ . Como  $x \ge 7$ , temos  $x^{8/3} \ge 7^{8/3}$  e dessa forma,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \le \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

Portanto, podemos tomar M=0,0021. Também  $7 \le x \le 9$ , e assim  $-1 \le x-8 \le 1$  e  $|x-8| \le 1$ . A Desigualdade de Taylor dá

$$|R_2(x)| \le \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

Então, se  $7 \le x \le 9$ , a aproximação na parte (a) tem precisão de 0,0004.

Vamos usar um dispositivo gráfico para verificar os cálculos no Exemplo 1. A Figura 2 mostra que os gráficos de  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = T_2(x)$  estão muito próximos um do outro quando x está próximo de 8. A Figura 3 mostra o gráfico de  $|R_2(x)|$  calculado a partir da expressão

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Vemos a partir do gráfico que

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

quando  $7 \le x \le 9$ . Então, a estimativa do erro a partir de métodos gráficos é ligeiramente melhor que a estimativa do erro a partir da Desigualdade de Taylor, nesse caso.

#### EXEMPLO 2

(a) Qual é o máximo erro possível usando a aproximação

quando  $-0.3 \le x \le 0.3$ ? Use essa aproximação para encontrar sen 12° com precisão de seis casas decimais.

(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

#### **SOLUÇÃO**

(a) Note que a série de Maclaurin

é alternada para todos os valores de x diferentes de zero; dessa maneira, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. O erro na aproximação de sen x pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é no máximo

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5.040}$$

Se  $-0.3 \le x \le 0.3$ , então  $|x| \le 0.3$ ; assim, o erro é menor que

$$\frac{(0,3)^7}{5040} \approx 4,3 \times 10^{-8}$$

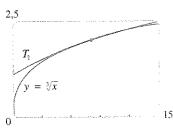


FIGURA 2

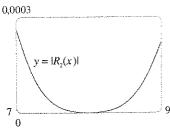


FIGURA 3

$$sen 12^{\circ} = sen\left(\frac{12\pi}{180}\right) = sen\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^{3} \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^{5} \frac{1}{5!}$$

$$\approx 0,20791169$$

Então, com precisão de seis casas decimais, sen 12° ≈ 0,207912.

(b) O erro será menor que 0,00005 se

$$\frac{|x|^7}{5.040} < 0.00005$$

Resolvendo essa desigualdade para x, temos

$$|x|^7 < 0.252$$
 ou  $|x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$ 

Assim a aproximação dada tem precisão de 0,00005 quando |x| < 0.82.

O que acontecerá se usarmos a Desigualdade de Taylor para resolver o Exemplo 2? Como  $f^{(7)}(x) = -\cos x$ , temos  $|f^{(7)}(x)| \le 1$ , logo,

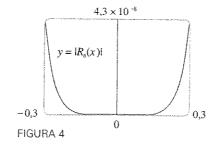
$$\left|R_6(x)\right| \leqslant \frac{1}{7!} \left|x\right|^7$$

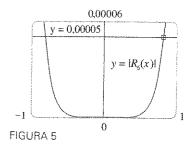
Assim obtemos as mesmas estimativas usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.

E sobre métodos gráficos? A Figura 4 mostra o gráfico de

$$|R_6(x)| = |\sin x - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5)|$$

e vemos a partir dele que  $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$  quando  $|x| \le 0.3$ . Esta é a mesma estimativa que obtivemos no Exemplo 2. Para a parte (b) queremos  $|R_6(x)| < 0.00005$ , assim plotamos  $y = |R_6(x)|$  e y = 0.00005 na Figura 5. Colocando o cursor no ponto de interseção à direita descobrimos que a desigualdade é satisfeita quando |x| < 0.82. De novo, esta é a mesma estimativa que obtivemos na solução do Exemplo 2.





Se tivesse nos pedido para aproximar sen 72° em vez de sen 12° no Exemplo 2, teria sido sábio usar os polinômios de Taylor em  $a=\pi/3$  (em vez de a=0) porque eles são aproximações melhores para sen x para valores de x próximos de  $\pi/3$ . Note que 72° está mais próximo de  $60^\circ$  (ou  $\pi/3$  radianos) e as derivadas de sen x são fáceis de calcular em  $\pi/3$ .



A Figura 6 mostra os gráficos das aproximações por polinômios de Taylor

$$T_1(x) = x T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

para a curva seno. Você pode ver que, quando n aumenta,  $T_n(x)$  é uma aproximação boa para sen x em um intervalo cada vez maior.

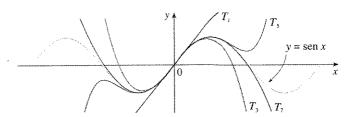


FIGURA 6

O uso desse tipo de cálculo realizado nos Exemplos 1 e 2 pode ser feito em calculadoras e computadores. Por exemplo, quando você pressiona a tecla sen ou  $e^x$  em sua calculadora, ou quando um programador de computador usa uma sub-rotina para uma função trigonométrica ou exponencial ou de Bessel, em muitas máquinas uma aproximação polinomial é calculada. O polinômio é com freqüência um polinômio de Taylor que foi modificado de modo que o erro seja espalhado mais uniformemente por um intervalo.

# Aplicações à Física

Os polinômios de Taylor são usados freqüentemente na física. Para obter informações sobre uma equação, um físico com freqüência simplifica uma função considerando apenas os primeiros dois ou três termos em sua série de Taylor. Em outras palavras, o físico usa um polinômio de Taylor como uma aproximação para a função. A Desigualdade de Taylor pode, então, ser usada para medir a precisão da aproximação. O exemplo a seguir mostra uma maneira na qual essa idéia é usada em relatividade especial.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Na teoria da relatividade especial de Einstein a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde  $m_0$  é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é a diferença entre sua energia total e sua energia em repouso:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

- (a) Mostre que, quando v for muito pequeno comparado a c, essa expressão para K coincide com a física clássica de Newton  $K = \frac{1}{2}m_0v^2$ .
- (b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a diferença entre essas expressões para K quando  $|v| \le 100 \text{ m/s}$ .

#### **SOLUÇÃO**

(a) Usando as expressões dadas para K e m, obtivemos

$$K = mc^{2} - m_{0}c^{2} = \frac{m_{0}c^{2}}{\sqrt{1 - v^{2}/c^{2}}} - m_{0}c^{2}$$
$$= m_{0}c^{2} \left[ \left( 1 - \frac{v^{2}}{c^{2}} \right)^{-1/2} - 1 \right]$$

779

☐ A curva superior na Figura 7 é o gráfico da expressão para a energia cinética *K* de um objeto com velocidade *v* na relatividade espacial. A curva inferior mostra a função usada para *K* na física Newtoniana clássica. Quando *v* é muito menor que a velocidade da luz, as curvas são praticamente idênticas.

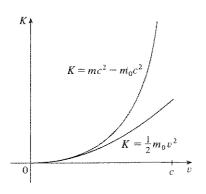


FIGURA 7

Com  $x = -v^2/c^2$ , a série de Maclaurin para  $(1+x)^{-1/2}$  é calculada mais facilmente como uma série binomial com  $k = -\frac{1}{2}$ . (Note que |x| < 1 porque v < c.) Portanto temos

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots$$

 $K = m_0 c^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \cdots \right) - 1 \right]$  $= m_0 c^2 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \cdots \right)$ 

Se v for muito menor que c, todos os termos depois do primeiro são muito menores quando comparados ao primeiro termo. Se os omitirmos, obteremos

$$K \approx m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

(b) Se  $x = -v^2/c^2$ ,  $f(x) = m_0 c^2[(1+x)^{-1/2} - 1]$  e M for um número tal que  $|f''(x)| \le M$ , então podemos usar a Desigualdade de Taylor para escrever

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!} x^2$$

Temos  $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1+x)^{-5/2}$  e nos foi dado que  $|v| \le 100$  m/s, assim

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1-v^2/c^2)^{5/2}} \le \frac{3m_0c^2}{4(1-100^2/c^2)^{5/2}} \quad (=M)$$

Então, com  $c = 3 \times 10^8$  m/s,

$$|R_1(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1-100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

Assim, quando  $|v| \le 100 \text{ m/s}$ , a grandeza do erro usando a expressão newtoniana para a energia cinética é no máximo  $(4.2 \times 10^{-10})m_0$ .

Outra aplicação à física ocorre em óptica. A Figura 8 é adaptada a partir de *Optics*, 2. ed., de Eugene Hecht (Reading, MA, Addison-Wesley, 2002), p. 133. Ela mostra uma onda de uma fonte pontual S encontrando uma interface esférica de raio R centrada em C. O raio SA é refratado em direção a P.

Usando o princípio de Fermat de que a luz viaja de modo a minimizar o tempo, Hecht deriva a equação

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o} \right)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são índices de refração e  $\ell_o$ ,  $\ell_i$ ,  $s_o$  e  $s_i$  são as distâncias indicadas na Figura 8. Pela Lei dos Co-senos, aplicada aos triângulos ACS e ACP, temos

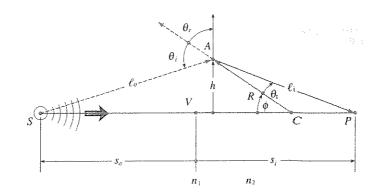


FIGURA 8

Refração em uma interface esférica

☐ Aqui usamos a identidade

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 - 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como a Equação 1 é difícil para se trabalhar, Gauss, em 1841, a simplificou usando a aproximação linear  $\cos \phi \approx 1$  para valores pequenos de  $\phi$ . (Isso equivale a usar o polinômio de Taylor de grau 1.) Então a Equação 1 se torna a equação mais simples a seguir [como lhe foi solicitado que mostrasse no Exercício 32(a)]:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como óptica de Gauss, ou óptica de primeira ordem, e se tornou a ferramenta teórica básica usada para desenhar lentes.

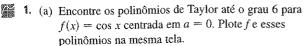
Uma teoria mais precisa é obtida aproximando  $\cos \phi$  por seu polinômio de Taylor de grau 3 (que é o mesmo que o polinômio de Taylor de grau 2). Ela leva em consideração raios para os quais  $\phi$  não é tão pequeno, isto é, raios que atingem a superfície a distâncias h maiores acima do eixo. No Exercício 32(b) lhe é pedido para que use essa aproximação para derivar a equação mais precisa

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2 \left[ \frac{n_1}{2s_o} \left( \frac{1}{s_o} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{2s_i} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s_i} \right)^2 \right]$$

A teoria óptica resultante é conhecida como óptica de terceira ordem.

Outras aplicações dos polinômios de Taylor à física são exploradas nos Exercícios 30, 31, 33, 34 e 35 e no Projeto Aplicado das páginas 780-781.

# 11.12 Exercícios



(b) Avalie f e esses polinômios em  $x = \pi/4$ ,  $\pi/2$  e  $\pi$ .

(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para f(x).

(a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 3 para f(x) = 1/x centrada em a = 1. Plote f e esses polinômios na mesma tela.

(b) Avalie f e esses polinômios em x = 0.9 e 1,3.

(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para f(x).

**3–10**  $\square$  Encontre o polinômio de Taylor  $T_n(x)$  para a função f em a. Plote f e  $T_n$  na mesma tela.

3.  $f(x) = \ln x$ , a = 1, n = 4

4.  $f(x) = e^x$ , a = 2, n = 3

**5.**  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi/6$ , n = 3

**6.**  $f(x) = \cos x$ ,  $a = 2\pi/3$ , n = 4

7.  $f(x) = \arcsin x$ , a = 0, n = 3

**8.**  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , a = 1, n = 3

**10.** 
$$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$$
,  $a = 1$ ,  $n = 2$ 

11–12  $\square$  Use um sistema algébrico computacional para encontrar os polinômios de Taylor  $T_n$  em a=0 para os valores de n dados. Então plote esses polinômios e f na mesma tela.

**11.** 
$$f(x) = \sec x$$
,  $n = 2, 4, 6, 8$ 

**12.** 
$$f(x) = \operatorname{tg} x$$
,  $n = 1, 3, 5, 7, 9$ 

13-22 <u>~</u>

- (a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com grau n em a.
- (b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação  $f(x) \approx T_n(x)$  quando x estiver no intervalo dado.

(c) Verifique seu resultado na parte (b) plotando  $|R_n(x)|$ .

**13.** 
$$f(x) = \sqrt{x}$$
,  $a = 4$ ,  $n = 2$ ,  $4 \le x \le 4.2$ 

**14.** 
$$f(x) = x^{-2}$$
,  $a = 1$ ,  $n = 2$ ,  $0.9 \le x \le 1.1$ 

**15.** 
$$f(x) = x^{2/3}$$
,  $a = 1$ ,  $n = 3$ ,  $0.8 \le x \le 1.2$ 

**16.** 
$$f(x) = \cos x$$
,  $a = \pi/3$ ,  $n = 4$ ,  $0 \le x \le 2\pi/3$ 

17. 
$$f(x) = \lg x$$
,  $a = 0$ ,  $n = 3$ ,  $0 \le x \le \pi/6$ 

**18.** 
$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$
  $a = 1$ ,  $n = 3$ ,  $0.5 \le x \le 1.5$ 

**19.** 
$$f(x) = e^{x^2}$$
,  $a = 0$ ,  $n = 3$ ,  $0 \le x \le 0.1$ 

**20.** 
$$f(x) = x \ln x$$
,  $a = 1$ ,  $n = 3$ ,  $0.5 \ge x \ge 1.5$ 

**21.** 
$$f(x) = x \sin x$$
,  $a = 0$ ,  $n = 4$ ,  $-1 \le x \le 1$ 

**22.** 
$$f(x) = \text{senh } 2x$$
,  $a = 0$ ,  $n = 5$ ,  $-1 \le x \le 1$ 

- **23.** Use a informação do Exercício 5 para estimar sen 35° com precisão de cinco casas decimais.
- **24.** Use a informação do Exercício 16 para estimar cos 69° com precisão de cinco casas decimais.
- Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin para  $e^x$  que devem ser usados para estimar  $e^{0.1}$  com precisão de 0,00001.
- **26.** Quantos termos da série de Maclaurin para  $\ln(1 + x)$  você precisa usar para estimar  $\ln 1.4$  com precisão de 0.001?

27-28 □ Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de x para os quais a aproximação dada é precisa dentro do erro estabelecido. Verifique sua resposta graficamente.

27. sen 
$$x \approx x - \frac{x^3}{6}$$
, (lerrol < 0.01)

**28.** 
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
, (lerrol < 0,005)

Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2m/s² em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro se move no próximo segundo. Seria razoável utilizar esse

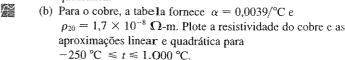
polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?

30. A resistividade ρ de um fio condutor é a recíproca da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros (Ω-m). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

onde t é a temperatura em °C. Existem tabelas que listam os valores de  $\alpha$  (o coeficiente de temperatura) e  $\rho_{20}$  (a resistividade a 20 °C) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia quase linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para  $\rho(t)$  por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em t=20.

 (a) Encontre expressões para as aproximações linear e quadrática.



(c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?

Um dipolo elétrico consiste em duas cargas elétricas de grandeza iguais e sinais opostos. Se as cargas forem q e - q e estiverem localizadas a uma distância d, então o campo elétrico E no ponto P na figura e

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

Expandindo essa expressão para E como uma série de potências de d/D, mostre que E é aproximadamente proporcional a  $1/D^3$  quando P está muito distante do dipolo.

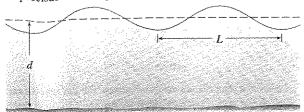


- 32. (a) Derive a Equação 3 para a óptica gaussiana a partir da Equação 1 aproximando cos φ na Equação 2 por seu polinômio de Taylor de grau 1.
  - (b) Mostre que se cos φ for trocado por seu polinômio de Taylor de grau 3 na Equação 2, então a Equação 1 se torna a Equação 4 para a óptica de terceira ordem. [Dica: Use os primeiros dois termos na série binomial para ℓ<sub>σ</sub><sup>-1</sup> e ℓ<sub>i</sub><sup>-1</sup>. Também, use φ ≈ sen φ.]
- 33. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d, como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi d}{L}$$

- (a) Se a água for profunda, mostre que  $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$ .
- (b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que  $v \approx \sqrt{gd}$ . (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)

(c) U<sub>Se 0</sub> Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que, se L > 10d, então a estimativa  $v^2 \approx gd$  tem precisão de 0.014gL.



34. O período de um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo  $\theta_0$  com a vertical é

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

onde  $k = \text{sen}(\frac{1}{2} \theta_0)$  e g é a aceleração da gravidade. (No Exercício 40 na Seção 7.7 do volume I essa integral foi aproximada pela regra de Simpson.)

 (a) Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 44 na Seção 7.1 do Volume I para mostrar que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2} k^6 + \cdots \right]$$

Se  $\theta_0$  não for muito grande, a aproximação  $T \approx 2\pi \sqrt{Lg}$ , obtida ao se usar o primeiro termo da série, é freqüentemente utilizada. Uma aproximação melhor seria obtida pelos dois primeiros termos:

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} k^2\right)$$

(b) Note que todos os termos da série, com exceção do primeiro, têm coeficientes que são no, máximo, 1/4. Use esse fato para comparar esta série com a série geométrica e mostre que

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} (1 + \frac{1}{4}k^2) \le T \le 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use as designaldades em (b) para estimar o período de um pêndulo com L=1 metro e  $\theta_0=10^\circ$ . Como isso se

compara com a estimativa  $T \approx 2\pi \sqrt{L/g}$ ? O que acontecería se  $\theta_0 = 42^\circ$ ?

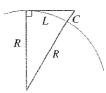
- 35. Se um topógrafo mede as diferenças nas elevações dos terrenos através do deserto, com a finalidade de se construir uma rodovia, ele tem de fazer correções devido à curvatura da Terra.
  - (a) Se R é o raio da Terra e L, o comprimento da rodovia, mostre que a correção a ser feita será

$$C = R \sec(L/R) - R$$

(b) Use um polinômio de Taylor para mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare as correções dadas pelas fórmulas em (a) e (b) para uma rodovia que tem 100 km de percurso. (Tome o raio da Terra como 6.370 km.)



- **36.** Mostre que  $T_n$  e f têm as mesmas derivadas em a até a ordem n.
- 37. Na Seção 4.9 do Volume I consideramos o método de Newton para aproximar uma raiz r da equação f(x) = 0, e a partir de uma aproximação inicial  $x_1$  obtivemos aproximações sucessivas  $x_2, x_3, \ldots$ , onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use a designaldade de Taylor com n = 1,  $a = x_n$  e x = r para mostrar que, se f''(x) existir no intervalo I contendo r,  $x_n$  e  $x_{n+1}$  e  $|f''(x)| \le M$ ,  $|f'(x)| \ge K$  para todo  $x \in I$ , então

$$|x_{n+1}-r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n-r|^2$$

[Isso significa que, se  $x_n$  for preciso até d casas decimais, então  $x_{n+1}$  é preciso até cerca de 2d casas decimais. Mais precisamente, se o erro no estágio n for no máximo  $10^{-m}$ , então o erro na etapa n+1 será no máximo  $(M/2K)10^{-2m}$ .]

# Projeto Aplicado

# Radiação Proveniente das Estrelas

Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um corpo negro é um sistema que absorve toda a radiação que cai nele. Por exemplo, uma superfície preta não-brilhante ou uma grande cavidade com um pequeno furo em sua parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

783

Proposta no final do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda  $\lambda$  como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde  $\lambda$  é medido em metros, T é a temperatura em kelvins e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com as medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que  $f(\lambda) \to \infty$  quando  $\lambda \to 0^+$ , mas experiências mostraram que  $f(\lambda) \to 0$ .] Esse fato é conhecido como a catástrofe do ultravioleta.

Em 1900 Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi h c \lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde  $\lambda$  é medido em metros, T é a temperatura em kelvins e

 $h = \text{constante de Planck} = 6,6262 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 

 $c = \text{velocidade da luz} = 2,997925 \times 10^8 \text{ m/s}$ 

 $k = \text{constante de Boltzmann} = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 

1. Use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim essa lei modela melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.

- Use um polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.
- 3. Plote f dada por ambas as leis na mesma tela e comente as similaridades e diferenças. Use  $T=5.700~{\rm K}$  (a temperatura do Sol). (Você pode querer mudar de metros para a unidade mais conveniente de micrômetros:  $1~{\mu}m~=10^{-6}~{\rm m}$ .)
  - 4. Use seu gráfico no Problema 3 para estimar o valor de  $\lambda$  para o qual  $f(\lambda)$  é um máximo na Lei de Planck.
- 5. Investigue como o gráfico de f muda quando T varia. (Use a Lei de Planck.) Em particular, plote f para as estrelas de Betelgeuse (T = 3.400 K), Procyon (T = 6.400 K) e Sirius (T = 9.200 K), assim como para o Sol. Como a radiação total emitida (a área sob a curva) varia com T? Use o gráfico para comentar por que Sirius é conhecida como uma estrela azul e Betelgeuse como uma estrela vermelha.



#### Revisão

#### 1. (a) O que é uma sequência convergente?

- (b) O que é uma série convergente?
- (c) O que significa  $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ ?
- (d) O que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$  significa?
- 2. (a) O que é uma seqüência limitada?
  - (b) O que é uma sequência monotônica?

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- (c) O que você pode dizer sobre uma seqüência monotônica limitada?
- 3. (a) O que é uma série geométrica? Sob quais circunstâncias ela é convergente? Qual é sua soma?
  - (b) O que é uma p-série? Sob quais circunstâncias ela é convergente?

#### 784 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

- 4. Suponha que ∑ a<sub>n</sub> = 3 e s<sub>n</sub> seja a n-ésima soma parcial da série. O que é lim<sub>n→∞</sub> a<sub>n</sub>? O que é lim<sub>n→∞</sub> s<sub>n</sub>?
- 5. Explique o seguinte:
  - (a) O Teste para Divergência.
  - (b) O Teste da Integral.
  - (c) O Teste da Comparação.
  - (d) O Teste da Comparação do Limite.
  - (e) O Teste da Série Alternada.
  - (f) O Teste da Razão.
  - (g) O Teste da Raiz.
- 6. (a) O que é uma série absolutamente convergente?
  - (b) O que você pode dizer sobre essa série?
  - (c) O que é uma série condicionalmente convergente?
- 7. (a) Se uma série for convergente pelo Teste da Integral, como você estima sua soma?
  - (b) Se uma série for convergente pelo Teste da Comparação, como você estima sua soma?
  - (c) Se uma série for convergente pelo Teste da Série Alternada, como você estima sua soma?
- 8. (a) Escreva a forma geral de uma série de potências.
  - (b) O que é o raio de convergência de uma série de potências?

- (c) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências?
- Suponha que f(x) seja a sorna de uma série de potências com raio de convergência R.
  - (a) Como você diferencia f? Qual é o raio de convergência da série para f'?
  - (b) Como você integra f? Qual é o raio de convergência da série para  $\int f(x) dx$ ?
- 10. (a) Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.
  - (b) Escreva uma expressão para a série de Taylor de f centrada em a.
  - (c) Escreva uma expressão para a série de Maclaurin de f.
  - (d) Como você mostra que f(x) é igual à soma de sua série de Taylor?
  - (e) Escreva a Desigualdade de Taylor.
- 11. Escreva a série de Maclaurin e o intervalo de convergência para cada uma das seguintes funções:
  - (a) 1/(1-x)
- (b)  $e^x$
- (c) sen x

- (d)  $\cos x$
- (e)  $tg^{-1}x$
- 12. Escreva a expansão da série binomial  $(1 + x)^k$ . Qual é o raio de convergência dessa série?

#### **TESTES FALSO-VERDADEIRO**

Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, explique por quê. Se for falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo.

- 1. Se  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ , então  $\sum a_n$  é convergente
- **2.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sin n}$  é convergente.
- 3. Se  $\lim_{n\to\infty} a_n = L$  então  $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ .
- **4.** Se  $\sum c_n 6^n$  for convergente, então  $\sum c_n (-2)^n$  é convergente.
- **5.** Se  $\sum c_n 6^n$  for convergente, então  $\sum c_n (-6)^n$  é convergente.
- **6.** Se  $\sum c_n x^n$  diverge quando x = 6, então ela diverge quando x = 10.
- O Teste da Razão pode ser usado para determinar se Σ 1/n<sup>3</sup> converge.
- **8.** O Teste da Razão pode ser utilizado para determinar se  $\sum 1/n!$  converge.

**9.** Se  $0 \le a_n \le b_n$  e  $\sum b_n$  divergir, então  $\sum a_n$  diverge.

**10.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

- 11. Se  $-1 < \alpha < 1$ , então  $\lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0$ .
- 12. Se  $\sum a_n$  for divergente, então  $\sum |a_n|$  é divergente.
- 13. Se  $f(x) = 2x x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots$  convergir para todo x, então f'''(0) = 2.
- **14.** Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem divergentes, então  $\{a_n + b_n\}$  é divergente.
- **15.** Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem divergentes, então  $\{a_nb_n\}$  é divergente.
- **16.** Se  $\{a_n\}$  for decrescente e  $a_n > 0$  para todo n, então  $\{a_n\}$  é convergente.
- 17. Se  $a_n > 0$  e  $\sum a_n$  convergir, então  $\sum (-1)^n a_n$  converge.
- **18.** Se  $a_n > 0$  e  $\lim_{n \to \infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$ , então  $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ .

#### **EXERCÍCIOS**

1-8 ☐ Determine se a sequência é convergente ou divergente. Se ela for convergente, encontre seu limite.

$$1. \ a_n = \frac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$$

2. 
$$a_n = \frac{9^{n+1}}{10^n}$$

3. 
$$a_n = \frac{n^3}{1+n^2}$$

$$4. \quad a_n = \cos(n\pi/2)$$

$$\mathbf{5.} \quad a_n = \frac{n \, \mathrm{sen} \, n}{n^2 + 1}$$

$$6. \quad a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

**8.**  $\{(-10)^n/n!\}$ 

- 9. Uma sequência é definida recursivamente pelas equações  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$ . Mostre que  $\{a_n\}$  é crescente e  $a_n < 2$  para todo n. Deduza que  $\{a_n\}$  é convergente e encontre seu limite.
- **10.** Mostre que  $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$  e use um gráfico para encontrar o menor valor de N que corresponde a  $\varepsilon = 0,1$  na definição de um limite.

11-22 Determine se a série é convergente ou divergente.

11. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

12. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$$

13. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$$

**14.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$\mathbf{16.} \ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n}{3n+1} \right)$$

17. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1,2)^n}$$

**18.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1+2n^2)^n}$$

**19.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{5^{n} n!}$$

**20.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$$

**21.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

**22.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

23-25 Determine se a série é condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

**23.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$$

**24.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$$

**25.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 3^n}{2^{2n+1}}$$
 **26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$$

**26.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$$

27-31 
Encontre a soma da série.

**27.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$$

**28.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

**29.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ tg^{-1}(n+1) - tg^{-1}n \right]$$
 **30.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$$

**30.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n} (2n)!}$$

31. 
$$1-e+\frac{e^2}{2!}-\frac{e^3}{3!}+\frac{e^4}{4!}-\cdots$$

- 32. Expresse a dízima periódica 4,17326326326 ... como uma
- 33. Mostre que  $\cosh x \ge 1 + \frac{1}{2} x^2$  para todo x.
- **34.** Para quais valores de x a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$  converge?

- **35.** Encontre a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$  com precisão de quatro
- **36.** (a) Encontre a soma parcial  $s_5$  da série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$  e estime o erro ao usá-la como uma aproximação para a soma
  - (b) Encontre a soma da série com precisão de cinco casas decimais.
- 37. Use a soma dos oito primeiros termos para aproximar a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$ . Estime o erro envolvido nessa
- **38.** (a) Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$  é convergente.
  - (b) Deduza que  $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$ .
- **39.** Prove que, se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for absolutamente convergente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right) a_n$$

é absolutamente convergente também.

40-43 □ Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

**40.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$$

**41.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n4^n}$$

**42.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$$

**43.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$$

44. Encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

- **45.** Encontre a série de Taylor de  $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{em} a = \pi/6$ .
- **46.** Encontre a série de Taylor de  $f(x) = \cos x$  em  $a = \pi/3$ .

47-54 □ Encontre a série de Maclaurin para f e seu raio de convergência. Você pode usar o método direto (a definição de uma série de Maclaurin) ou séries conhecidas, como a série geométrica, a série binomial ou a série de Maclaurin para  $e^x$ , sen x e  $tg^{-1}x$ .

**47.** 
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

**48.** 
$$f(x) = tg^{-1}(x^2)$$

**49.** 
$$f(x) = \ln(1-x)$$

**50.** 
$$f(x) = xe^{2x}$$

**51.** 
$$f(x) = \text{sen}(x^4)$$

**52.** 
$$f(x) = 10$$

**53.** 
$$f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$$

**54.** 
$$f(x) = (1 - 3x)^{-5}$$

#### 786 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

- **55.** Avalie  $\int \frac{e^x}{x} dx$  como uma série infinita.
- **56.** Use séries para aproximar  $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$  com precisão de duas casas decimais

57-58 D

- (a) Aproxime f por um polinômio de Taylor de grau n em a.
- (b) Plote  $f \in T_n$  na mesma tela.
  - (c) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação  $f(x) \approx T_n(x)$  quando x estiver no intervalo dado.
- (d) Verifique seu resultado na parte (c) plotando  $|R_n(x)|$ 
  - **57.**  $f(x) = \sqrt{x}$ , a = 1, n = 3,  $0.9 \le x \le 1.1$
  - **58.**  $f(x) = \sec x$ , a = 0, n = 2,  $0 \le x \le \pi/6$
  - 59. Use séries para avaliar o limite a seguir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

**60.** A força da gravidade em um objeto de massa *m* a uma altura *h* acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade.

- (a) Expresse F como uma série de potências em h/R.
- (b) Observe que, se aproximamos  $\hat{F}$  pelo primeiro termo na série, obtemos a expressão  $F \approx mg$ , que é geralmente usada quando h é muito menor que R. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para estimar a gama de valores de h para os quais a aproximação  $F \approx mg$  tem precisão de 1%. (Use R = 6.400 km.)
- **61.** Suponha que  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  para todo x.
  - (a) Se f for uma função ímpar, mostre que

$$c_0=c_2=c_4=\cdots=0$$

(b) Se f for uma função par, mostre que

$$c_1=c_3=c_5=\cdots=0$$

**62.** Se  $f(x) = e^{x^2}$ , mostre que  $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$ .



- 1. Se  $f(x) = \text{sen}(x^3)$ , encontre  $f^{(15)}(0)$ .
- 2. Uma função f é definida por

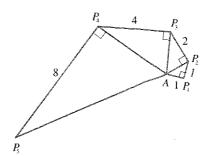
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Onde f é contínua?

- 3. (a) Mostre que  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \operatorname{co-tg} \frac{1}{2}x 2 \operatorname{co-tg} x$ .
  - (b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

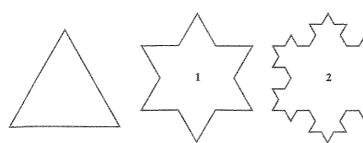
**4.** Seja  $\{P_n\}$  uma seqüência de pontos determinados como na figura. Então  $|AP_1| = 1$ ,  $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ , e o ângulo  $AP_nP_{n+1}$  é um ângulo reto. Encontre  $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$ .

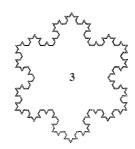


#### FIGURA PARA O PROBLEMA 4

- 5. Para construir a curva floco de neve, comece com um triângulo equilátero com lados de comprimento 1. A Etapa 1 na construção é dividir cada lado em três partes iguais, construir um triângulo equilátero na parte do meio e então apagar a parte do meio (veja a figura). A Etapa 2 consiste em repetir a Etapa 1 para cada lado do polígono resultante. Esse processo é repetido a cada etapa seguinte. A curva floco de neve é aquela que resulta da repetição desse processo indefinidamente.
  - (a) Sejam  $s_n$ ,  $l_n$  e  $p_n$  as representações do número de lados, do comprimento de um lado e do comprimento total da n-ésima curva de aproximação (a curva obtida depois da Etapa n de construção), respectivamente. Encontre as fórmulas para  $s_n$ ,  $l_n$  e  $p_n$ .
  - (b) Mostre que  $p_n \to \infty$  quando  $n \to \infty$ .
  - (c) Some uma série infinita para encontrar a área dentro da curva floco de neve.

As partes (b) e (c) mostram que a curva floco de neve é infinitamente longa, mas delimita apenas uma área finita.





$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

onde os termos são os recíprocos dos inteiros positivos cujos únicos fatores primos são 2 e 3.

7. (a) Mostre que, para  $xy \neq -1$ ,

$$arctg x - arctg y = arctg \frac{x - y}{1 + xy}$$

se o lado esquerdo estiver entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ .

(b) Mostre que

$$\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Deduza a seguinte fórmula de John Machin (1680-1751):

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Use a série de Maclaurin para arctg para mostrar que

$$0197395560 < arctg \frac{1}{5} < 0.197395562$$

(e) Mostre que

$$0.004184075 < \arctan \frac{1}{239} < 0.004184077$$

(f) Deduza que, com precisão de sete casas decimais,

$$\pi \approx 3{,}1415927$$

Machin usou esse método em 1706 para encontrar  $\pi$  com precisão de 100 casas decimais. Neste século, com a ajuda de computadores, o valor de  $\pi$  tem sido calculado com uma precisão cada vez maior. Em 1999, Takahashi e Kanada empregaram o método de Borwein e Brent/Salamin, que calcularam o valor de  $\pi$  com precisão de 206.158.430.000 casas decimais!

- 8. (a) Prove uma fórmula similar àquela no Problema 7(a), mas envolvendo arccotg em vez de arctg.
  - (b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arcco-tg}(n^2 + n + 1)$$

**9.** Encontre o intervalo de convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$  e sua soma.

10. Se  $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$ , mostre que

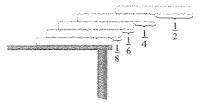
$$\lim_{n\to\infty} (a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}) = 0$$

Se você não vê como provar isso, tente a estratégia de resolução de problemas com uso de analogias (veja a página 80 do Volume I). Tente os casos especiais k=1 e k=2 primeiro. Se você vir como provar a asserção para esses casos, provavelmente verá como prová-la no caso geral.

11. Ache a soma da série  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ .

12. Suponha que você tenha um grande suprimento de livros, todos do mesmo tamanho, e os empilha na borda de uma mesa, com cada livro se estendendo mais longe da borda da mesa do que o livro embaixo dele. Mostre que é possível fazer isso de maneira que o livro no topo da pilha se estenda inteiramente além da mesa. De fato, mostre que o livro do topo pode se estender a qualquer distância além da borda da mesa se a pilha for alta o suficiente. Use o

seguinte método de empilhamento: o livro do topo se estende metade de seu comprimento além do segundo lívro. O segundo livro se estende um quarto de seu comprimento além do terceiro. O terceiro se estende um sexto de seu comprimento além do quarto, e assim por diante. (Tente você mesmo com um baralho.) Considere os centros de massa.



#### FIGURA PARA O PROBLEMA 12

**13**. Seja

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Mostre que  $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$ .

**14.** Se p > 1, avalie a expressão

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{p}} + \frac{1}{3^{p}} + \frac{1}{4^{p}} + \cdots}{1 - \frac{1}{2^{p}} + \frac{1}{3^{p}} - \frac{1}{4^{p}} + \cdots}$$

**15.** Suponha que círculos de diâmetros iguais são dispostos firmemente em n fileiras dentro de um triângulo equilátero. (A figura ilustra o caso n = 4.) Se A for a área do triângulo e  $A_n$  for a área total ocupada pelas n fileiras de círculos, mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

#### FIGURA PARA O PROBLEMA 15

16. A sequência  $\{a_n\}$  é definida recursivamente pelas equações

$$a_0 = a_1 = 1$$
  $n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$ 

Encontre a soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

#### 17. Tomando o valor de x<sup>x</sup> em 0 igual a 1 e integrando uma série termo a termo, mostre que

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

- 18. Começando com os vértices P<sub>1</sub>(0, 1), P<sub>2</sub>(1, 1), P<sub>3</sub>(1, 0), P<sub>4</sub>(0, 0) de um quadrado, construímos outros pontos, como mostrado na figura: P<sub>5</sub> é o ponto médio de P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>; P<sub>6</sub> é o ponto médio de P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>; P<sub>7</sub> é o ponto médio de P<sub>3</sub>P<sub>4</sub> e assim por diante. O caminho espiral poligonal P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>P<sub>4</sub>P<sub>5</sub>P<sub>6</sub>P<sub>7</sub>... se aproxima de um ponto P dentro do quadrado.
  - (a) Se as coordenadas de  $P_n$  forem  $(x_n, y_n)$ , mostre que  $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$  e encontre uma equação similar para as coordenadas do eixo y.
  - (b) Encontre as coordenadas de P.

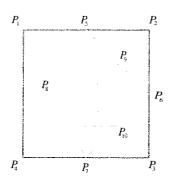
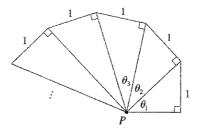


FIGURA PARA O PROBLEMA 18

**19.** Se 
$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$
 tiver raio de convergência positivo e  $e^{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ , mostre que

$$nd_n = \sum_{i=1}^n ic_i d_{n-i} \qquad n \ge 1$$

20. Triângulos retângulos são construídos conforme a figura. Cada triângulo tem altura igual a 1 e sua base é a hipotenusa do triângulo anterior. Mostre que essa sequência faz indefinidas voltas ao redor de P ao mostrar que  $\Sigma \theta_n$  é uma série divergente.



21. Considere a série cujos termos são os recíprocos de inteiros positivos que podem ser escritos na base 10 sem usar o dígito 0. Mostre que essa série é convergente e a soma é menor que 90. 22. (a) Mostre que a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad \text{\'e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

onde  $f_n$  é o n-ésimo número de Fibonacci, ou seja,  $f_1=1, f_2=1$  e  $f_{n-1}+f_{n-2}$  para  $n\geqslant 3$ . [Dica: Escreva  $x/(1-x-x^2)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$  e multiplique ambos os lados dessa equação por  $1-x-x^2$ .]

(b) Ao escrever f(x) como uma soma de frações parciais e, portanto, obtermos a série de Maclaurin em uma maneira diferente, ache uma fórmula explícita para o *n*-ésimo número de Fibonacci.

# **12**

# Vetores e a Geometria do Espaço

A velocidade do vento é um vetor, já que tem magnitude e direção. Neste capítulo introduzimos vetores e sistemas de coordenadas para o espaço tridimensional. Isso nos fornecerá ferramentas para estudar no Capítulo 14 o cálculo de funções de duas variáveis cujo gráfico é uma superfície no espaço. Neste capítulo veremos que vetores fornecem uma descrição particularmente simples de retas e planos no espaço.

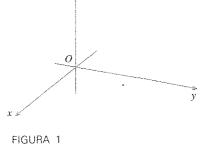
# 12.1

#### Sistema de Coordenadas Tridimensionais

Para localizar um ponto no plano são necessários dois números. Sabemos que qualquer ponto no plano pode ser representado como um par ordenado (a, b) de números reais, onde a é a coordenada x e b é a coordenada y. Por essa razão, um plano é dito bidimensional. Para localizar um ponto no espaço, necessitamos de três números. Representaremos qualquer ponto no espaço pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais.

Para representar pontos no espaço precisamos inicialmente fixar um ponto O (origem) e três retas orientadas, passando por O, que sejam perpendiculares entre si, que chamaremos eixos coordenados, denotados por eixo x, eixo y e eixo z. Geralmente, colocamos os eixos x e y como retas horizontais e a reta vertical como o eixo z, e indicamos a orientação dos eixos, como mostrado na Figura 1. O sentido do eixo z é determinado pela regra da mão direita, como ilustrado na Figura 2. Se você arredondar os dedos de sua mão direita ao redor do eixo z de forma a rodar de  $90^{\circ}$  no sentido anti-horário do eixo x para o eixo y, o polegar apontará para o sentido positivo do eixo z.

Os três eixos coordenados determinam três planos coordenados [ilustrados na Figura 3(a)]. O plano xy contém os eixos x e y, o plano yz possui os eixos y e z e o plano xz detém os eixos x e z. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, chamadas octantes. O primeiro octante é determinado pelos eixos positivos.



Eixos coordenados

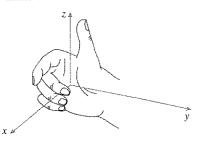


FIGURA 2 Regra da mão direita

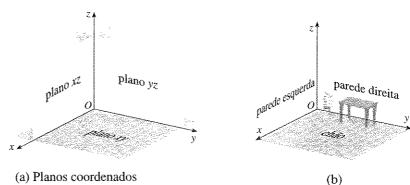
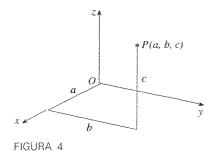


FIGURA 3

Como muitas pessoas têm dificuldade em visualizar diagramas de figuras em três dimensões, você poderá achar útil fazer o que sugerimos a seguir [veja a Figura 3(b)]. Olhe para algum canto inferior da sala e defina-o como origem. A parede que se encontra à sua esquerda está no plano xz, a parede à sua direita pertence ao plano yz e o chão pertence ao plano xy. O eixo x está ao longo da interseção do chão com a parede esquerda. O eixo y fica ao longo da interseção do chão com a parede direita. O eixo z corre ao longo da interseção das duas paredes orientado no sentido do teto. Se você está no primeiro octante e imagina outras sete salas situadas nos outros sete octantes (três no mesmo andar e quatro no andar abaixo), todas têm o canto O em comum.

Seja P um ponto qualquer do espaço, e seja a a distância (medida na perpendicular ao plano) de P até o plano yz, b a distância de P até o plano xz e c a distância de P até o plano



xy. Representaremos o ponto P pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais e chamaremos a, b e c coordenadas do ponto P; a é a coordenada x, b é a coordenada y e c é a coordenada z. Então, para localizar o ponto (a, b, c) começarnos da origem O e movemos a unidades ao longo do eixo x, em seguida, b unidades para le lamente ao eixo y e, por fim, cunidades paralelamente ao eixo z, como na Figura 4.

O ponto P(a, b, c) determina uma caixa retangular como na Figura 5. Se desenharmos uma perpendicular de P ao plano xy, obteremos o ponto Q, com coordenadas (a, b, 0), denominado projeção de P no plano xy. Da mesma forma, R(0, b, c) e S(a, 0, c) são respectivamente as projeções de P nos planos yz e xz.

Como ilustração numérica, os pontos (-4, 3, -5) e (3, -2, -6) estão indicados na Figura 6.

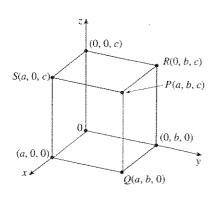


FIGURA 5

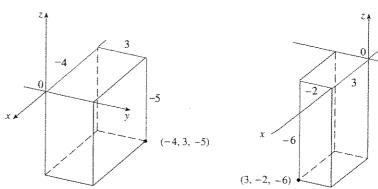


FIGURA 6

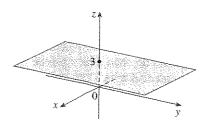
O produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  é o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais e é denotado por R³. Temos uma correspondência uma-um entre pontos P no espaço e triplas ordenadas (a, b, c) no  $\mathbb{R}^3$ . Ele é chamado sistema coordenado retangular tridimensional. Note que, em termos de coordenadas, o primeiro octante pode ser descrito como o conjunto de pontos cujas coordenadas são todas positivas.

Em geometria analítica bidimensional, o gráfico de uma equação envolvendo x e y é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Em geometria analítica tridimensional, uma equação envolvendo x, ye z representa uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

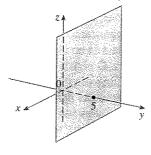
**EXEMPLO 1**  $\square$  Que superfícies de  $\mathbb{R}^3$  são representadas pelas seguintes equações? (a) z = 3

#### (b) y = 5

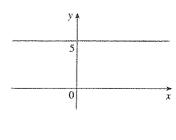
(a) A equação z = 3 representa o conjunto  $\{(x, y, z) | z = 3\}$ , que é o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}^3$  com coordenada z igual a 3. Isso representa um plano horizontal paralelo ao plano xy e três unidades acima dele, como na Figura 7(a).



(a) z = 3, um plano em  $\mathbb{R}^3$ 



(b) y = 5, um plano em  $\mathbb{R}^3$ 



(c) y = 5, um plano em  $\mathbb{R}^2$ 

(b) A equação y = 5 representa o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}^3$  com coordenada y igual a 5. Esses pontos pertencem a um plano vertical, paralelo ao plano xz, e cinco unidades à direita deste, como mostrado na Figura 7(b).

NOTA  $\Box$  Quando é dada uma equação, precisamos saber se ela representa uma curva em  $\mathbb{R}^2$  ou uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . No Exemplo 1, y=5 representa um plano em  $\mathbb{R}^3$ , mas pode representar uma reta em  $\mathbb{R}^2$  se estivermos trabalhando com geometria analítica bidimensional [veja as Figuras 7(b) e (c)].

Em geral, se k é uma constante, então x = k representa um plano paralelo ao plano yz, y = k corresponde a um plano paralelo ao plano xz e z = k refere-se a um plano paralelo ao plano xy. Na Figura 5, as faces da caixa retangular são formadas pelos três planos coordenados x = 0 (o plano yz), y = 0 (o plano xz) e z = 0 (plano xy), e pelos planos x = a, y = b e z = c.

Example :  $\Box$  Descreva e esboce a superfície em  $\mathbb{R}^3$  representada pela equação y=x.

SOLUÇÃO A equação representa o conjunto de todos os pontos em  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas x e y iguais, isto é,  $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ . Esses pontos pertencem a um plano vertical que intercepta o plano xy na reta y = x, z = 0. A parte desse plano que está no primeiro octante está esboçada na Figura 8.

A fórmula familiar para a distância entre dois pontos em um plano é estendida facilmente para a seguinte fórmula tridimensional.

rérmuis de Distância em Três Dimansões A distância  $|P_1P_2|$  entre os pontos  $P_1(x_1,y_1,z_1)$  e  $P_2(x_2,y_2,z_2)$  é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Para ver se essa fórmula é verdadeira, vamos construir uma caixa retangular (como na Figura 9), onde  $P_1$  e  $P_2$  são vértices opostos e as faces dessa caixa são paralelas aos planos coordenados. Se  $A(x_2, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_1)$  são os vértices da caixa indicados na figura, então

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|$$
  $|AB| = |y_2 - y_1|$   $|BP_2| = |z_2 - z_1|$ 

Como os triângulos  $P_1BP_2$  e  $P_1AB$  são retangulares, duas aplicações do Teorema de Pitágoras fornecem

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Combinando as duas equações, obtemos

Portanto

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 

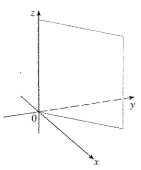


FIGURA 8
O plano y = x

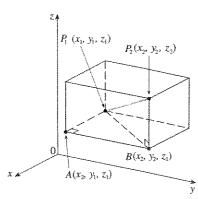


FIGURA 9

EXEMPLO 3  $\square$  A distância do ponto P(2, -1, 7) ao ponto Q(1, -3, 5) é

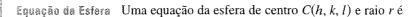
$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2}$$
  
=  $\sqrt{1+4+4} = 3$ 

EXEMPLO 4  $\square$  Encontre a equação da esfera com raio r e centro C(h, k, l).

SOLUÇÃO Por definição, a esfera é o conjunto de todos os pontos P(x, y, z) com distância ao ponto C igual a r (veja a Figura 10). Então, P pertence à esfera se e somente se |PC| = r. Elevando ao quadrado ambos os lados, temos que  $|PC|^2 = r^2$  ou

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

O resultado do Exemplo 4 deve ser guardado.



$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro é a origem O, a equação da esfera é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EXEMPLO 5  $\Box$  Mostre que  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$  é a equação de uma esfera e encontre seu centro e raio.

SOLUÇÃO Podemos reescrever a equação dada na forma da equação de uma esfera se completarmos os quadrados:

$$(x^{2} + 4x + 4) + (y^{2} - 6y + 9) + (z^{2} + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$
$$(x + 2)^{2} + (y - 3)^{2} + (z + 1)^{2} = 8$$

Comparando essa equação com a forma padrão, vemos que temos a equação de uma esfera com centro (-2, 3, -1) e raio  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

EXEMPLO 6  $\Box$  Que região de  $\mathbb{R}^3$  é representada pelas seguintes inequações?

$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$$
  $z \le 0$ 

SOLUÇÃO As inequações

$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$$

podem ser reescritas como

$$1 \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le 2$$

e portanto representam os pontos (x, y, z) com distância à origem entre 1 e, no máximo, 2. Mas nos foi dado também que  $z \le 0$ , estando os pontos, portanto, abaixo do plano xy. Assim, a inequação dada representa a região que está entre as (ou nas) esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e abaixo (ou sobre) o plano xy. O esboço da região está apresentado na Figura 11.

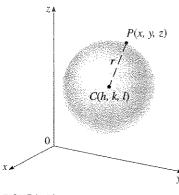
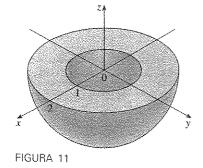


FIGURA 10



# 12.1

#### Exercícios

- 1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?
- **2.** Esboce os pontos (0, 5, 2), (4, 0, -1), (2, 4, 6) e (1, -1, 2) em um mesmo conjunto de eixos coordenados.
- 3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xz: P(6, 2, 3), Q(-5, -1, 4) ou R(0, 3, 8)? Qual ponto pertence ao plano yz?
- 4. Quais são as projeções do ponto (2, 3, 5) nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em (2, 3, 5) e com faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.
- 5. Descreva e esboce no R3 a superfície representada pela equação x + y = 2.
  - **6.** (a) Qual a representação da equação x = 4 em  $\mathbb{R}^2$ ? Em  $\mathbb{R}^3$ ? Faça um esboço delas.
    - (b) Qual a representação da equação y = 3 em  $\mathbb{R}^3$ ? O que z = 5representa? Qual a representação do par de equações y = 3 e z = 5? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que y = 3 e z = 5. Ilustre com um esboço.
  - 7. Mostre que o triângulo com vértices em P(-2, 4, 0). Q(1, 2, -1) e R(-1, 1, 2) é um triângulo equilitatero.
  - 8. Encontre o comprimento dos lados do triângulo com vértices A(1, 2, -3), B(3, 4, -2) e C(3, -2, 1). O triângulo ABC é retângulo? É isósceles?
  - 9. Determine se os pontos estão alinhados.
    - (a) A(5, 1, 3), B(7, 9, -1), C(1, -15, 11)
    - (b) K(0, 3, -4), L(1, 2, -2), M(3, 0, 1)
  - 10. Determine a distância entre (3, 7, -5) e cada um dos seguintes.
    - (a) Plano xy
- (b) Plano yz
- (c) Plano xz
- (d) Eixo x
- (e) Eixo y
- (f) Eixo z
- 11. Determine a equação da esfera com centro em (1, -4, 3) e raio 5. Qual é a interseção dessa esfera com o plano xz?
- 12. Determine a equação da esfera com centro em (6, 5, -2) e raio  $\sqrt{7}$ . Descreva sua interseção com os planos coordenados.
- 13. Determine a equação da esfera que passa pelo ponto (4, 3, -1) e tem centro em (3, 8, 1).
- 14. Determine a equação da esfera que passa pela origem e tem centro em (1, 2, 3).

15-18 🗆 Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

**15.** 
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$$

**16.** 
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$$

17. 
$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$$

**18.** 
$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$$

19. (a) Prove que o ponto médio do segmento de reta que liga  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  a  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  é

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- (b) Determine o comprimento da mediana do triângulo com vértices em A(1, 2, 3), B(-2, 0, 5) e C(4, 1, 5).
- 20. Estabeleça a equação de uma esfera que tenha um diâmetro com pontos terminais dados por (2, 1, 4) e (4, 3, 10).
- **21.** Estipule as equações das esferas com centro em (2, -3, 6) e tangência (a) no plano xy, (b) no plano yz e (c) no plano xz.
- 22. Determine a equação da maior esfera com centro em (5, 4, 9) contida no primeiro octante.

23-34 □ Descreva em palavras a região de R³ representada pela equação ou inequação.

**23.** 
$$y = -4$$

**24.** 
$$x = 10$$

**25.** 
$$x > 3$$

**26.** 
$$y \ge 0$$

**27.** 
$$0 \le z \le 6$$

**28.** 
$$y = z$$

**29.** 
$$x^2 + y^2 + z^2 > 1$$

**30.** 
$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25$$

**31.** 
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z < 3$$

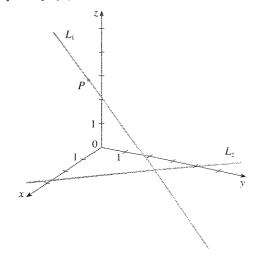
**32.** 
$$x^2 + y^2 = 1$$

**33**. 
$$x^2 + z^2 \le 9$$

**34.** 
$$xyz = 0$$

- 35-38 □ Escreva inequações para descrever a região dada.
- 35. Semi-espaço de todos os pontos que estão à esquerda do plano X2.
- 36. Caixa retangular sólida no primeiro octante limitada pelos planos x = 1, y = 2 e z = 3.
- A região constituída por todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio  $r \in R$  centradas na origem, onde r < R.
- 38. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

**39.** A figura mostra uma reta  $L_1$  no espaço e uma segunda reta  $L_2$ , que é a projeção de  $L_1$  no plano xy. (Isto é,



- os pontos de  $L_2$  estão diretamente embaixo ou em cima dos pontos de  $L_1$ .)
- (a) Determine as coordenadas do ponto P da reta  $L_1$ .
- (b) Localize no diagrama os pontos A,  $B \in C$  onde a reta  $L_1$  intercepta os planos xy,  $yz \in xz$ , respectivamente.
- **40.** Considere o ponto P tal que a distância de P a A(-1, 5, 3) seja o dobro da distância de P a B(6, 2, -2). Mostre que o conjunto desses pontos é uma esfera e determine seu raio e centro.
- **41.** Determine a equação do conjunto de pontos equidistantes dos pontos A(-1, 5, 3) e B(6, 2, -2). Descreva o conjunto.
- **42.** Determine o volume do sólido que está contido em ambas as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

# 12.2

#### Vetores

O termo **vetor** é usado por cientistas para indicar quantidades (tais como deslocamento ou velocidade ou força) que tem ao mesmo tempo grandeza, direção e sentido. Um vetor é freqüentemente representado por uma seta ou segmento de reta orientado. O comprimento da seta representa o tamanho do vetor e a seta aponta na direção do vetor. Denotamos um vetor por uma letra em negrito  $(\mathbf{v})$  ou colocando uma seta sobre a letra  $(\vec{v})$ .

Por exemplo, suponha que uma partícula se mova ao longo de um segmento de reta de um ponto A para um ponto B. O vetor de deslocamento v, mostrado na Figura 1, tem um ponto inicial A (o início) e um ponto terminal B (o fim) e indicamos isso por  $v = \overrightarrow{AB}$ . Observe que o vetor  $u = \overrightarrow{CD}$  tem o mesmo tamanho, a mesma direção e sentido que v, embora ele esteja em uma posição diferente. Dizemos que u e v são equivalentes (ou iguais) e escrevemos u = v. O vetor zero, denotado por 0, tem comprimento 0. Ele é o único vetor que não tem direção específica.

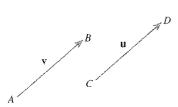
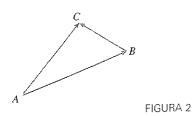


FIGURA 1 Vetores equivalentes

#### Combinando vetores



Suponha que uma partícula se mova de A para B, assim seu deslocamento é  $\overrightarrow{AB}$ . Depois, a partícula muda de direção e se move de B para C, com o vetor deslocamento  $\overrightarrow{BC}$  como na Figura 2. O efeito combinado desses deslocamentos é que a partícula se moveu de A para C. O vetor deslocamento resultante de  $\overrightarrow{AC}$  é chamado soma de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  e escrevemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Em geral, se começamos com os vetores u e v, primeiro movemos v de forma que seu início coincida com o fim de u e definimos a soma de u e v como:

Definição da Adição da Veteras Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores posicionados de maneira que o ponto inicial de  $\mathbf{v}$  é o ponto terminal de  $\mathbf{u}$ , então a soma  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  é o vetor do ponto inicial de  $\mathbf{u}$  ao ponto terminal de  $\mathbf{v}$ .

~~~

A definição de adição de vetores é ilustrada na Figura 3. Você pode ver por que essa definição é algumas vezes chamada Lei do Triângulo.



FIGURA 3 Lei do triângulo

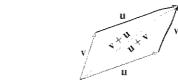


FIGURA 4 Lei do Paralelograma

Na Figura 4, começamos com os mesmos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como na Figura 3 e desenhamos uma cópia de  $\mathbf{v}$  com o mesmo ponto inicial de  $\mathbf{u}$ . Completando o paralelogramo, vemos que  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ . Isso nos dá outra maneira de construir a soma: se posicionarmos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de maneira que eles comecem no mesmo ponto, então  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  estará ao longo da diagonal do paralelogramo com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como lados. (Esta é a chamada Lei do Paralelogramo.)

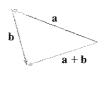
EXEMPLO 1 Desenhe a soma dos vetores a e b mostrados na Figura 5.

SOLUÇÃO Primeiro transladamos **b** e posicionamos seu ponto inicial no ponto final de **a**, tomando cuidado para desenhar uma cópia de **b** que tenha o mesmo tamanho e direção. Logo após, desenhamos o vetor **a** + **b** [veja Figura 6(a)] começando no ponto inicial de **a** e terminando no ponto final da cópia de **b**.

Alternativamente, podemos posicionar  $\mathbf{b}$  tal que ele comece onde  $\mathbf{a}$  começa e construir  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  pela Lei do Paralelogramo como na Figura  $\mathbf{6}(\mathbf{b})$ .

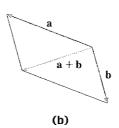


FIGURA 5



(a)

FIGURA 6



É possível multiplicar um vetor por um número real c. (Nesse contexto, chamamos o número real c de **escalar** para distingui-lo de um vetor.) Por exemplo, queremos que 2v seja o mesmo vetor que v + v, o qual possui a mesma direção e sentido de v, mas tem o dobro de tamanho. Em geral, multiplicamos um vetor por um escalar da seguinte maneira.

Definição de Multiplicação por um Se c é um escalar e  $\mathbf{v}$ , um vetor, então a multiplicação escalar  $c\mathbf{v}$  é o vetor cujo tamanho é |c| vezes o tamanho de  $\mathbf{v}$  e cuja direção e sentido é a mesma de  $\mathbf{v}$  se c>0 e sentido oposto a  $\mathbf{v}$  se c<0. Se c=0 ou  $\mathbf{v}=\mathbf{0}$  então  $c\mathbf{v}=\mathbf{0}$ .

Essa definição é ilustrada na Figura 7. Vemos que os números reais funcionam como fatores de escala aqui; por causa disso nós os chamamos escalares. Note que dois vetores não-nulos são **paralelos** se eles são múltiplos escalares um do outro. Em particular, o vetor  $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$  tem o mesmo comprimento que  $\mathbf{v}$ , mas apontam em sentidos opostos. Nós o chamamos de **negativo** de  $\mathbf{v}$ . Pela diferença  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  de dois vetores, queremos dizer

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

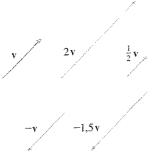


FIGURA 7 Múltiplos escalares de v

Logo, podemos construir  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  desenhando primeiro o negativo de  $\mathbf{v}$ ,  $-\mathbf{v}$ , e então adicionando a ele o vetor  $\mathbf{u}$  e usando a Lei do Paralelogramo como na Figura 8(a). Alternativamente, como  $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$ , o vetor  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , quando adicionado a  $\mathbf{v}$  nos dá  $\mathbf{u}$ . Assim, podemos construir  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  como na Figura 8(b) usando a Lei do Triângulo.

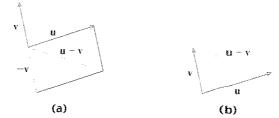


FIGURA 8 Desenhando  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ 

EXEMPLO 2  $\Box$  Se **a** e **b** são os vetores mostrados na Figura 9, desenhe **a** -2**b**.

SOLUÇÃO Primeiro, desenhamos o vetor  $-2\mathbf{b}$  apontando na direção oposta a  $\mathbf{b}$  e com o dobro de seu tamanho. Nós o posicionamos com seu ponto inicial no ponto final de  $\mathbf{a}$  e então usamos a Lei do Triângulo para desenhar  $\mathbf{a} + (-2\mathbf{b})$  como na Figura 10.



# Componentes

Para alguns propósitos é melhor introduzir um sistema de coordenados e tratar os vetores algebricamente. Se posicionarmos o ponto inicial de um vetor  $\bf a$  na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o ponto terminal de  $\bf a$  tem coordenadas da forma  $(a_1, a_2)$  ou  $(a_1, a_2, a_3)$  dependendo se nosso sistema de coordenadas for em duas ou três dimensões (veja a Figura 11). Essas coordenadas são denominadas **componentes** de  $\bf a$  e escrevemos

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$$
 ou  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 

Usamos a notação  $\langle a_1, a_2 \rangle$  para o par ordenado que se refere a um vetor para não confundir com o par ordenado no  $\langle a_1, a_2 \rangle$  que corresponde a um ponto plano.

Por exemplo, os vetores apresentados na Figura 12 são todos equivalentes ao vetor  $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$  cujo ponto terminal é P(3, 2). O que eles têm em comum é que o ponto terminal é alcançado a partir do ponto inicial por um deslocamento de três unidades para a direita e duas para cima. Podemos pensar de todos esses vetores geométricos como **representações** do vetor algébrico  $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$ . A representação particular  $\overrightarrow{OP}$  da origem ao ponto P(3, 2) é chamada de **posição do vetor** do ponto P.

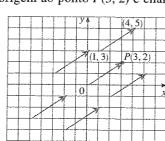


FIGURA 12 Representações do vetor  $\mathbf{a} = (3, 2)$ 

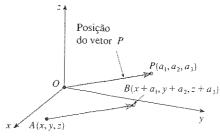
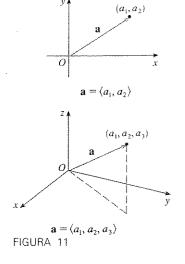


FIGURA 13 Representações de  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 



Em três dimensões, o vetor  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  é a **posição do vetor** do ponto  $P(a_1, a_2, a_3)$ . (Veja a Figura 13.) Vamos considerar qualquer outra representação  $\overrightarrow{AB}$  de  $\mathbf{a}$ , onde o ponto inicial é  $A(x_1, y_1, z_1)$  e o ponto final é  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Então, temos que  $x_1 + a_1 = x_2$ ,  $y_1 + a_2 = y_2$  e  $z_1 + a_3 = z_2$  e assim  $a_1 = x_2 - x_1$ ,  $a_2 = y_2 - y_1$ , e  $a_3 = z_2 - z_1$ . Portanto, temos o seguinte resultado.

Dados os pontos  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$ , o vetor a com representação  $\overrightarrow{AB}$  é  $\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ 

EXEMPLO 3  $\Box$  Ache o vetor representado pelo segmento de reta com ponto inicial A(2, -3, 4) e ponto final B(-2, 1, 1).

SOLUÇÃO Por (1), o vetor correspondente a  $\overrightarrow{AB}$  é

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$

A magnitude ou comprimento do vetor  $\mathbf{v}$  é o comprimento de qualquer uma de suas representações e é denotado pelo símbolo  $\|\mathbf{v}\|$  ou  $\|\mathbf{v}\|$ . Ao se usar a fórmula da distância para calcular o comprimento de um segmento OP, obtemos as seguintes fórmulas.

O comprimento de um vetor bidimensional  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$  é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

O comprimento de um vetor tridimensional  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Como somamos os vetores algebricamente? A Figura 14 mostra que, se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ , então a soma é  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ , no mínimo, para o caso onde os componentes são positivos. Em outras palavras, para somar os vetores algébricos, somamos suas componentes. Similarmente, para subtrair os vetores, subtraímos as componentes. Dos triângulos similares na Figura 15, vemos que as componentes de  $c\mathbf{a}$  são  $ca_1$  e  $ca_2$  Assim, para multiplicar um vetor por um escalar, multiplicamos cada componente pelo escalar.

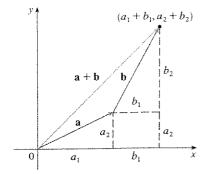
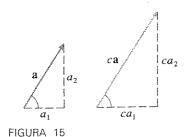


FIGURA 14



$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$
  
Similarmente, para os vetores tridimensionais,

 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ 

Se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ , então

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ 

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

**EXEMPLO 4**  $\odot$  Se  $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$ , determine  $| \mathbf{a} |$  e os vetores  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $3\mathbf{b}$  e  $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ .

SOLUÇÃO 
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$
  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$   
 $= \langle 4 - 2, 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle$   
 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle$ 

$$= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle$$

Denotaremos por  $V_2$  o conjunto de todos os vetores bidimensionais e por  $V_3$  o conjunto de todos os vetores tridimensionais. Genericamente, adiante, precisaremos considerar o conjunto  $V_n$  dos vetores de dimensão n. Um vetor de dimensão n é uma n-upla ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

onde  $a_1, a_2, \ldots, a_n$  são números reais chamados componentes de **a**. Adição e multiplicação escalar são definidas nos termos dos componentes como nos casos de n = 2 e n = 3.

Proposition in the latter Se a, b e c são vetores em  $V_n$  e c e d são escalares, então

1. a + b = b + a2. a + (b + c) = (a + b) + c3. a + 0 = a4. a + (-a) = 05. c(a + b) = ca + cb6. (c + d)a = ca + da7. (cd) a = c(da)8. 1a = a

Essas oito propriedades dos vetores podem ser facilmente verificadas tanto geométrica quanto algebricamente. Por exemplo, a Propriedade 1 pode ser vista na Figura 5 (equivale à Lei do Paralelogramo) ou como se segue no caso n = 2:

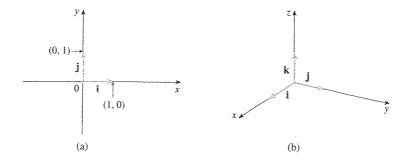
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$
$$= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle$$
$$= \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Podemos ver que a Propriedade 2 (lei associativa) é verdadeira olhando a Figura 9 e aplicando a Lei do Triângulo várias vezes. O vetor  $\overrightarrow{PQ}$  é obtido ou primeiro construindose  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  e então somando-se  $\mathbf{c}$  ou somando-se  $\mathbf{a}$  ao vetor  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

Três vetores em  $V_3$  têm papel especial. Sejam

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$
  $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$   $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ 

Então  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são vetores que têm módulo 1, direção e sentido dos eixos positivos x, y e z, respectivamente. Da mesma forma, em duas dimensões, definimos  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  e  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ . (Veja a Figura 17.)



Vetores em *n* dimensões são usados para listar várias quantidades em um modo organizado. Por exemplo, as componentes do vetor de dimensão 6

$$\mathbf{p}=\langle p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6\rangle$$
 podem representar os preços de seis itens diferentes requeridos na fabricação de um artigo particular. Vetores de dimensão  $4\langle x,y,z,t\rangle$  são usados em teoria da relatividade, onde as primeiras três componentes especificam a posição no espaço e o quarto representa o tempo.

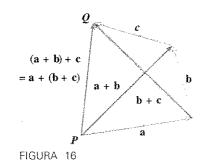


FIGURA 17 Base padrão em  $V_2$  e  $V_3$ 

803

Se  $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ , então podemos escrever

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$
  
=  $a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle$ 

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

Assim, qualquer vetor em  $V_3$  pode ser expresso em função da base padrão i, j e k. Por exemplo,

$$\langle 1, -2, 6 \rangle = i - 2j + 6k$$

Da mesma forma, em duas dimensões, podemos escrever

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$

Veja a Figura 18 para a interpretação geométrica das Equações 3 e 2 e compare com a Figura 17.

EXEMPLO 5  $\Box$  Se  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ , escreva o vetor  $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  em função de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ .

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 1, 2, 5, 6 e 7 dos vetores, temos

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$
  
=  $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ 

Um vetor unitário ou versor é um vetor cujo módulo é 1. Os vetores i, j e k são exemplos de vetores unitários ou versores. Em geral, se  $a \neq 0$ , então o vetor unitário que tem mesma direção e mesmo sentido de a, chamado versor de a, é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Para verificar isso, seja  $c = 1/|\mathbf{a}|$  Então  $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$  e c é um escalar positivo, de modo que  $\mathbf{u}$  tem o mesmo sentido do vetor  $\mathbf{a}$ . Além disso

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$$

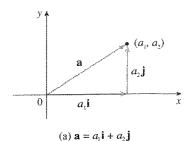
EXEMPLO 6  $\Box$  Determine o versor do vetor  $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

SOLUÇÃO O vetor dado tem módulo

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

portanto, pela Equação 4, seu versor é

$$\frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$



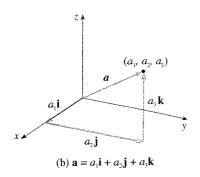


FIGURA 18

# Aplicações

Vetores são úteis em muitos aspectos da física e da engenharia. No Capítulo 13 veremos como eles descrevem a velocidade e a aceleração de objetos movendo-se no espaço. Aqui olharemos para as forças. Uma força é representada por um vetor porque tem grandeza (medida em libras ou newtons), direção e sentido. Se várias forças estão agindo em um objeto, a **força resultante** experimentada pelo objeto é o vetor-soma dessas forças.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> NT: Na literatura em português o uso do termo versor é comum e foi introduzido no texto pelos tradutores.

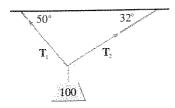


FIGURA 19

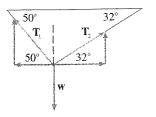


FIGURA 20

EXEMPLO 7 
Um peso de 100 lb está pendurado entre dois fios, como mostrado na Figura 19. Determine as tensões (forças)  $T_1$  e  $T_2$  em ambos os fios e-suas normas.

SOLUÇÃO Primeiro vamos exprimir  $T_1$  e  $T_2$  em função de suas componentes horizontal e vertical. Da Figura 20, vemos que

$$\mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ \mathbf{i} + |\mathbf{T}_1|\sin 50^\circ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2| \cos 32^{\circ} \mathbf{i} + |\mathbf{T}_2| \sin 32^{\circ} \mathbf{j}$$

A resultante  $T_1 + T_2$  das tensões contrabalançam o peso w, e precisamos ter

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{w} = 100\mathbf{j}$$

Então

$$(-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ)\mathbf{i} + (|\mathbf{T}_1|\sin 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\sin 32^\circ)\mathbf{j} = 100\mathbf{j}$$

Igualando as componentes, obtemos

$$-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ = 0$$

$$|\mathbf{T}_1| \sin 50^\circ + |\mathbf{T}_2| \sin 32^\circ = 100$$

Resolvendo a primeira equação para | T<sub>2</sub>| e substituindo na segunda, temos

$$|\mathbf{T}_1| \sin 50^\circ + \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \sin 32^\circ = 100$$

Ou seja, as normas das tensões são

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{100}{\sin 50^\circ + \tan 32^\circ \cos 50^\circ} \approx 85,64 \text{ lb}$$

e

$$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^{\circ}}{\cos 32^{\circ}} \approx 64,91 \text{ lb}$$

Substituindo em (5) e (6), obtemos os vetores-tensão

$$T_1 \approx -55,05i + 65,60j$$
  $T_2 \approx 55,05i + 34,40j$ 

$$T_2 \approx 55,05 i + 34,40 j$$

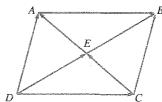
300

# 12.2

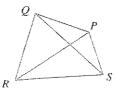
#### Exercícios

- 1. Quais das seguintes grandezas são vetoriais ou escalares? Explique.
  - (a) O custo de um bilhete de cinema
  - (b) A corrente de um rio
  - (c) O caminho inicial do vôo entre Houston e Dallas
  - (d) A população mundial
- **2.** Qual a relação existente entre o ponto (4, 7) e o vetor (4, 7)? Faça um esboço ilustrativo.

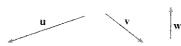
Indique os vetores iguais no paralelogramo mostrado.



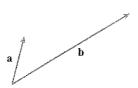
- 4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.
  - (a)  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (c)  $\overrightarrow{QS} \overrightarrow{PS}$
- (b)  $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
- (d)  $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PO}$



- 5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
  - (a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- (b)  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
- (c) v + w



- 6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
  - (a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- (b)  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
- (c) 2a
- (d)  $-\frac{1}{2}$ **b**
- (e) 2a + b
- (f) b 3a



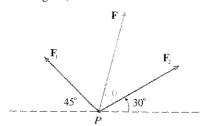
- 7-12 Determine o vetor a com representação dada pelo segmento de reta orientado AB. Desenhe AB e o equivalente com início na origem.
- 7. A(2,3), B(-2,1)
- **8.** A(-2, -2), B(5, 3)
- **9.** A(-1, -1), B(-3, 4)
- **10.** A(-2, 2), B(3, 0)
- **11.** A(0,3,1), B(2,3,-1)
- **12.** A(4, 0, -2), B(4, 2, 1)
- 13-16 Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.
- **13.** (3, -1), (-2, 4)
- **14.**  $\langle -2, -1 \rangle$ ,  $\langle 5, 7 \rangle$

- **15.**  $\langle 0, 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 0, 0, -3 \rangle$ **16.**  $\langle -1, 0, 2 \rangle$ ,  $\langle 0, 4, 0 \rangle$
- 17-22  $\Box$  Determine |a|, a + b, a b,  $2a \in 3a + 4b$ .
- 17.  $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 6, 2 \rangle$
- 18. a = 2i 3i, b = i + 5j
- **19.**  $\mathbf{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$
- **20.**  $\mathbf{a} = \langle -3, -4, -1 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 6, 2, -3 \rangle$
- 21. a = i 2j + k, b = j + 2k
- 22. a = 3i 2k, b = i j + k

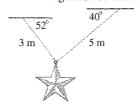
- 23-25 Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.
- **23.** (9, -5)
- 24. 12i 5j

805

- **25**. 8i j + 4k
- **26.** Ache um vetor que possui a mesma direção que  $\langle -2, 4, 2 \rangle$ . mas tem comprimento 6.
- **27.** Se v está no primeiro quadrante e faz um ângulo de  $\pi/3$  com o eixo x-positivo e  $|\mathbf{v}| = 4$ , ache as componentes de  $\mathbf{v}$ .
- 28. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38º com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.
- 29. Duas forças F, e F, com grandezas 10 lb e 12 lb agem sobre um objeto em um ponto P como mostrado na figura. Determine a força resultante F agindo em P assim como sua magnitude. direção e sentido. (Indique a direção determinando o ângulo  $\theta$ exposto na figura.)



- 30. Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado rapidez. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção com sentido para o norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O curso verdadeiro ou trajetória do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A rapidez em relação ao solo do avião é o módulo da resultante. Determine a trajetória real e a rapidez em relação ao solo do avião.
- 31. Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 3 mi/h. O navio está se movendo em direção ao norte com rapidez de 22 mi/h. Determine a rapidez e a direção da mulher em relação à superfície da água.
- 32. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas na decoração natalina que está suspensa sobre uma praça. A decoração tem uma massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e a magnitude de cada tensão.

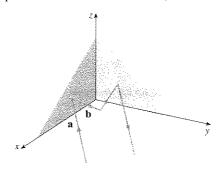


- 33. Um varal de roupas é estendido entre dois postes, 8 m distantes um do outro. O fio do varal está bastante esticado, de forma a ser considerado horizontal. Quando uma camisa molhada com uma massa de 0,8 kg é pendurada no meio do varal, esse ponto central é deslocado para baixo em 8 cm. Determine a tensão em cada metade do varal.
- **34.** A tensão **T** em cada ponta de uma corrente tem uma magnitude de 25 N. Qual o peso da corrente?



- **35.** Se  $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$  e  $\overrightarrow{C}$  são vértices de um triângulo, determine  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ .
- **36.** Seja C um ponto no segmento de reta  $\overrightarrow{AB}$  que é duas vezes mais longe de B do que de A. Se  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  e  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ , mostre que  $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ .
- 37. (a) Desenhe os vetores  $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$  e  $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$ .
  - (b) Mostre, por um esboço, que existem escalares  $s \in t$  tais que c = sa + tb.
  - (c) Use o esboço para estimar os valores de s e t.
  - (d) Determine os valores exatos de s e t.
- 38. Suponha que a e b sejam vetores não-nulos não-paralelos e c seja um vetor pertencente ao plano determinado por a e b. Dê um argumento geométrico para mostrar quer c pode ser escrito como c = sa + tb para uma escolha conveniente de s e t. Depois dê argumentos usando componentes.

- 39. Se  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$  e  $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tal que  $|\mathbf{r} \mathbf{r}_0| = 1$ .
- **40.** Se  $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ ,  $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ , descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) tal que  $|\mathbf{r} \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} \mathbf{r}_2| = k$ , onde  $k > |\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|$ .
- 41. A Figura 16 fornece uma demonstração geométrica da Propriedade 2 dos vetores. Use os componentes para dar uma prova algébrica desse fato no caso n = 2.
- **42.** Prove a Propriedade 5 dos vetores algebricamente para n=3. Use então a semelhança de triângulos para fazer uma prova geométrica.
- 43. Utilize os vetores para provar que uma reta unindo os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.
- 44. Suponha que os três planos coordenados são todos espelhados e que um raio de luz dado pelo vetor a = \langle a\_1, a\_2, a\_3 \rangle atinge o plano xz, como mostrado na figura. Use o fato de os ângulos de incidência e de reflexão serem iguais para mostrar que a direção do raio refletido é dada por b = \langle a\_1, -a\_2, a\_3 \rangle. Deduza que, após ser refletido em todos os três espelhos perpendiculares, o raio resultante é paralelo ao raio inicial. (Cientistas norte-americanos usaram esse princípio, juntamente com um feixe de laser e um conjunto de espelhos em cantoneira na Lua, para calcular de modo preciso a distância da Terra à Lua.)



# 12.3

#### O Produto Escalar

Até aqui aprendemos a somar os vetores e multiplicá-los por um escalar. A seguinte questão surge: é possível multiplicar dois vetores de modo que o valor resultante seja de alguma utilidade? Um desses produtos é o produto escalar, cuja definição vem a seguir. O outro é o produto vetorial, que será discutido na próxima seção.

1 Definição Se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então o produto escalar de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  é o número  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Assim, para achar o produto escalar de a por b multiplicamos as componentes correspondentes e somamos. O resultado não é um vetor. É um número real, isto é, um escalar, por isso o nome produto escalar. O produto escalar também é conhecido como produto interno. Apesar de a definição ter sido dada para os vetores tridimensionais, o produto escalar para os vetores bidimensionais é definido de forma análoga:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

807

EXEMPLO 1 C

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$
  
 $\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\frac{1}{2} \rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4(-\frac{1}{2}) = 6$   
 $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$ 

O produto escalar obedece às muitas regras que valem para o produto de números reais. Esse fato é apresentado no seguinte teorema.

 $\fbox{2}$  Propriedades do Produto Escalar Se a, b e c são vetores em  $V_3$  e c é um escalar, então

1. 
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$2. a \cdot b = b \cdot a$$

3. 
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

4. 
$$(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$$

$$\mathbf{5.} \ \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Essas propriedades são facilmente provadas usando-se a Definição 1. Por exemplo, vamos fazer a prova das Propriedades 1 e 3:

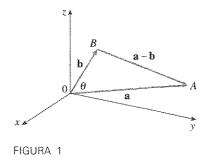
1. 
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$$

3. 
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$$
  
 $= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$   
 $= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$   
 $= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$   
 $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ 

As provas restantes ficam como exercício.

O produto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  tem uma interpretação geométrica em termos do **ângulo**  $\theta$  entre  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ , definido como o ângulo entre os representantes de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ , ambos com ponto inicial na origem, onde  $0 \le \theta \le \pi$ . Em outras palavras,  $\theta \in \mathbf{o}$  ângulo entre os segmentos de reta  $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{OB}$  da Figura 1. Note que, se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$  são vetores paralelos, então  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

No teorema a seguir a fórmula dada é utilizada por físicos como *definição* do produto escalar.



Teorema Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

Prova Se aplicarmos a Lei dos Cossenos ao triângulo OAB da Figura 1, obteremos

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\theta$$

(Observe que a Lei dos Cossenos ainda se aplica nos casos limites quando  $\theta = 0$  ou  $\pi$ 

ou  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .) Mas  $|OA| = |\mathbf{a}|, |OB| = |\mathbf{b}| e |AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ , de forma que a Equação 4 se torna

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

Usando as Propriedades 1, 2 e 3 do produto escalar, podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$$= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

Portanto, a Equação 5 fornece

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$
$$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

Então ou

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

EXEMPLO 2  $\odot$  Se os vetores **a** e **b** têm normas 4 e 6, e o ângulo entre eles é  $\pi/3$ , determine  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

SOLUÇÃO Usando o Teorema 3, temos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

A fórmula do Teorema 3 nos permite ainda determinar o ângulo entre dois vetores.

 $\boxed{\mathbf{5}}$  Corolário Se  $\theta$  é o ângulo entre dois vetores não-nulos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , então

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Determine o ângulo entre os vetores  $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$ . SOLUÇÃO Como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$
 e  $|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$ 

e como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

temos, do Corolário 6,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Assim o ângulo entre a e b é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1,46 \quad (\text{ou } 84^\circ)$$

Dois vetores não-nulos a e b são perpendiculares ou ortogonais se o ângulo entre eles é  $\theta = \pi/2$ . O Teorema 3 nos fornece

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi/2) = 0$$

e reciprocamente se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , então cos  $\theta = 0$ , o que implica que  $\theta = \pi/2$ . O vetor nulo  $\mathbf{0}$  é dito perpendicular a todos os vetores. Temos, portanto, um método para determinar se dois vetores são ortogonais.

 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

EXEMPLO 4  $\Box$  Mostre que 2i + 2j - k é perpendicular a 5i - 4j + 2k.

SOLUÇÃO Como

7

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

esses vetores são perpendiculares por (7).

Como  $\cos \theta > 0$  se  $0 \le \theta < \pi/2$  e  $\cos \theta < 0$  se  $\pi/2 < \theta \le \pi$ , vemos que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  é positivo se  $\theta < \pi/2$  e negativo se  $\theta > \pi/2$ . O produto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  nos fornece uma medida de quão próxima é a direção para onde os dois vetores apontam. O produto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  é positivo se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  têm o mesmo sentido geral,  $\mathbf{0}$  se são perpendiculares, e negativo se têm sentido geral oposto (veja a Figura 2). No caso extremo onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  têm mesma direção e sentido, temos  $\theta = 0$ , portanto  $\cos \theta = 1$  e

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  têm a mesma direção, mas sentidos opostos, então  $\theta = \pi$  e assim cos  $\theta = -1$  e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ .

# Ângulos Diretores e Cossenos Diretores

Os **ângulos diretores** de um vetor não-nulo **a** são os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (no intervalo  $[0, \pi]$ ) que **a** forma com os eixos coordenados positivos x, y e z (veja a Figura 3).

Os cossenos desses ângulos diretores,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ , são chamados **cossenos diretores** do vetor **a**. Usando o Corolário 6 e substituindo **b** por **i**, obtemos

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Isso pode ser visto diretamente na Figura 3.) Da mesma forma, temos

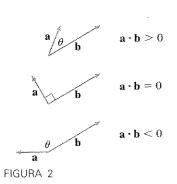
$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

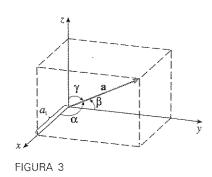
Quadrando as expressões nas Equações 8 e 9 e somando, obtemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Podemos ainda usar as Equações 8 e 9 para escrever

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle |\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \cos \beta, |\mathbf{a}| \cos \gamma \rangle$$
$$= |\mathbf{a}| \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle$$





Portanto

$$\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle$$

que diz que os cossenos diretores de a são os componentes do versor de a.

EXEMPLS 5 Determine os ângulos diretores do vetor a = (1, 2, 3).

SOLUÇÃO Como  $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ , as Equações 8 e 9 fornecem

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$$
  $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$   $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$ 

e então

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^{\circ}$$
  $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^{\circ}$   $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^{\circ}$ 

#### Projeções

A Figura 4 mostra as representações  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$  de dois vetores  $\overrightarrow{a}$  e  $\overrightarrow{b}$  com mesma origem P. Se S é o pé da perpendicular do ponto R à reta que contém  $\overrightarrow{PQ}$ , então o vetor com representação  $\overrightarrow{PS}$  é chamado **vetor projeção** de  $\overrightarrow{b}$  sobre  $\overrightarrow{a}$  e é denotado por proj $\overrightarrow{a}$   $\overrightarrow{b}$ .

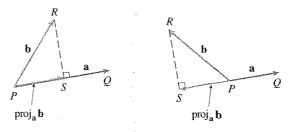


FIGURA 4 Projeções de vetores

A projeção escalar de **b** sobre **a** (também chamada **componente de b ao longo de a**) é definida como o módulo do vetor projeção, cujo valor é dado pelo número  $|\mathbf{b}| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre **a** e **b** (veja a Figura 5 você pode pensar a projeção escalar de **b** como sendo o comprimento da sombra de **b**). Denotaremos por comp<sub>a</sub> **b**. Observe que esse número é negativo se  $\pi/2 < \theta \le \pi$ . A equação

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{a}| (|\mathbf{b}| \cos \theta)$$

mostra que o produto escalar de a por b pode ser interpretado como o módulo de a multiplicado pela projeção escalar de b sobre a. Como

$$|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}$$

a componente de **b** ao longo de **a** pode ser computada tomando-se o produto escalar de **b** pelo versor de **a**. Resumindo, temos:

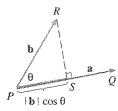


FIGURA 5 Projeção escalar

SWEY

Projeção escalar de **b** sobre **a**:  $\operatorname{comp}_{a} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$ 

Vetor projeção de b sobre a:  $\operatorname{proj}_a b = \left(\frac{a \cdot b}{|a|}\right) \frac{a}{|a|} = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$ 

Note que o vetor projeção é a projeção escalar vezes o versor de a.

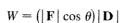
EXEMPLO 6  $\Box$  Determine a projeção escalar de  $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$  sobre  $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$ . SOLUÇÃO Como  $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ , a projeção escalar de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$  é

comp<sub>a</sub> 
$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

O vetor projeção é esse escalar multiplicado pelo versor de a:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14} \mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$$

Um uso de projeção ocorre em física, no cálculo do trabalho. Na Seção 6.4 do Volume I definimos o trabalho exercido por uma força constante F movendo um objeto por uma distância d como W = Fd, mas isso só se aplicava quando a força era exercida ao longo do eixo de deslocamento do objeto. Suponha agora que a força constante seja um vetor  $\mathbf{F} = PR$  com direção diferente do eixo de deslocamento do objeto, como indicado na Figura 6. Se a força move o objeto de P a Q, o vetor deslocamento é  $\mathbf{D} = PQ$ . O trabalho realizado é definido como o produto do componente da força ao longo de  $\mathbf{D}$  pela distância percorrida:



Do Teorema 3, temos

Assim, o trabalho realizado por uma força constante  ${\bf F}$  é o produto escalar  ${\bf F}\cdot{\bf D}$ , onde  ${\bf D}$  é o vetor deslocamento.

**EXEMPLO 7** — Um caixote de madeira é puxado 8 m acima em uma rampa sob uma força constante de 200 N aplicada em um ângulo de 25º com a rampa. Calcule o trabalho realizado.

SOLUÇÃO Se  ${\bf F}$  e  ${\bf D}$  são os vetores força e deslocamento, respectivamente, como mostrado na Figura 7, então o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}| |\mathbf{D}| \cos 25^{\circ}$$
$$= (200)(8) \cos 25^{\circ} \approx 1450 \text{ N} \cdot \text{m} = 1450 \text{ J}$$

**EXEMPLO 8**  $\Box$  Uma força dada pelo vetor  $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  move uma partícula do ponto P(2, 1, 0) para o ponto Q(4, 6, 2). Determine o trabalho realizado.

SOLUÇÃO O vetor deslocamento é  $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2 \rangle$ ; portanto, utilizando a Equação 12, o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 3, 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 5, 2 \rangle$$
  
= 6 + 20 + 10 = 36

Se a unidade de comprimento é o metro e a força é medida em newtons, o trabalho realizado é de 36 joules.

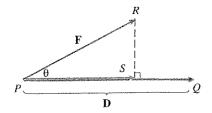
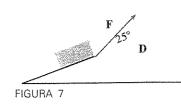


FIGURA 6



## 12.3

## Exercícios

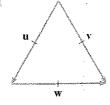
- 1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explíque.
  - (a)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
- (b)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- (c)  $|\mathbf{a}| (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
- (d)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- (e)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$
- (f)  $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- 2. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e  $\frac{1}{3}$  e o ângulo entre eles é  $\pi/4$ .

3-10 Determine  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

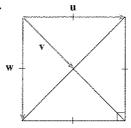
- **3.**  $\mathbf{a} = \langle 4, -1 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 3, 6 \rangle$
- **4.**  $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 4), \quad \mathbf{b} = (-8, -3)$
- **5.**  $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 3, -1, 10 \rangle$
- **6.**  $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$
- 7. a = i 2j + 3k, b = 5i + 9k
- 8. a = 4j 3k, b = 2i + 4j + 6k
- **9.**  $|{\bf a}| = 12$ ,  $|{\bf b}| = 15$ , o ângulo entre  ${\bf a}$  e  ${\bf b}$  é  $\pi/6$
- **10.**  $|\mathbf{a}| = 4$ ,  $|\mathbf{b}| = 10$ , o ângulo entre  $\mathbf{a} \in \mathbf{b} \in 120^{\circ}$

11-12 □ Se u é um vetor unitário, determíne u · v e u · w.

11.



12



- 13. (a) Mostre que  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ .
  - (b) Mostre que  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ .
- 14. Um vendedor vende a hambúrgueres, b cachorros-quentes e c refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se A = \langle a, b, c \rangle e P = \langle 2, 1,5, 1 \rangle, qual o significado do produto escalar A \cdot P?

15-29 Determine o ângulo entre os vetores. (Estabeleça inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até o grau mais próximo.)

**15.** 
$$a = \langle 3, 4 \rangle, b = \langle 5, 12 \rangle$$

- **16.**  $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle, \ \mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$
- 17.  $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 4, 0, -1 \rangle$
- **18.**  $\mathbf{a} = \langle 6, -3, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 2, 1, -2 \rangle$
- 19. a = j + k, b = i + 2j 3k
- 20. a = 2i j + k, b = 3i + 2j k

- 21-22 © Determine, aproximando o valor até o grau mais próximo, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.
- **21.** A(1,0), B(3,6), C(-1,4)
- **22.** D(0, 1, 1), E(-2, 4, 3), F(1, 2, -1)

23-28 Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

- **23.** (a)  $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$ 
  - (b) **a** =  $\langle 4, 6 \rangle$ , **b** =  $\langle -3, 2 \rangle$
  - (c) a = -i + 2j + 5k, b = 3i + 4j k

9 0 2 2 2 2 2 2

- (d)  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- **24.** (a)  $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$ 
  - (b) u = i j + 2k, v = 2i j + k
  - (c)  $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ ,  $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$
- **25.** Use os valores para decidir se o triângulo com vértices P(1, -3, -2), Q(2, 0, -4), e R(6, -2, -5) é retângulo.
- **26.** Para que valores de b são os vetores  $\langle -6, b, 2 \rangle$  e  $\langle b, b^2, b \rangle$  ortogonais?
- 27. Determine um vetor unitário ortogonal i + j e i + k.
- Ache dois valores unitários que façam um ângulo de 60° com v = (3, 4).

29-33 Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor aproximado até o grau mais próximo.)

- **29**. (3, 4, 5)
- **30.**  $\langle 1, -2, -1 \rangle$
- 31. 2i + 3j 6k
- 32. 2i i + 2k
- **33.**  $\langle c, c, c \rangle$ , onde c > 0
- 34. Se um vetor tem ângulos diretores  $\alpha = \pi/4$  e  $\beta = \pi/3$ , determine o terceiro ângulo diretor  $\gamma$ .

35-40 🗆 Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a**.

- **35.**  $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle, \ \mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$
- **36.**  $a = \langle 1, 2 \rangle, b = \langle -4, 1 \rangle$
- **37.**  $\mathbf{a} = \langle 4, 2, 0 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
- **38.**  $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 3, 3, 4 \rangle$
- 39. a = i + k, b = i j
- 40. a = 2i 3j + k, b = i + 6j 2k
- Mostre que o vetor orth<sub>a</sub> **b** = **b** proj<sub>a</sub> **b** é ortogonal a **a**. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de **b**.)

.

- **42.** Para os vetores do Exercício 36, determine ortha **b** e ilustre esboçando os vetores **a**, **b**, proja **b** e ortha **b**.
- **43** Se  $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$ , determine um vetor  $\mathbf{b}$  tal que comp<sub>a</sub>  $\mathbf{b} = 2$ .

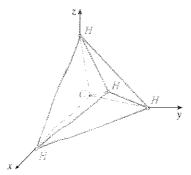
- 44. Suponha que a e b sejam vetores não-nulos.
  - (a) Sob quais circunstâncias comp<sub>a</sub> b = comp<sub>b</sub> a?
  - (b) Sob quais circunstâncias proj<sub>a</sub> b = proj<sub>b</sub> a?
- 45. Uma força constante com representação vetorial F = 10i + 18j 6k move um objeto em linha reta do ponto (2, 3, 0) ao ponto (4, 9, 15). Calcule o trabalho realizado se a distância for medida em metros e a grandeza da força for medida em newtons.
- 46. Calcule o trabalho realizado por uma força de 20 lb agindo na direção N50°W para mover um objeto 4 pés no sentido oeste.
- 47. Uma mulher exerce uma força horizontal de 25 lb em um engradado quando ela o empurra para subir uma rampa de 10 pés de comprimento e com um ângulo de inclinação de 20° acima da horizontal. Calcule o trabalho realizado sobre a caixa.
- **48.** Um vagão é puxado a uma distância de 100 m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 50 N. O cabo do vagão é mantido em um ângulo de 30° para cima em relação à horizontal. Quanto trabalho é realizado?
- **49.** Use projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto  $P_1(x_1, y_1)$  à reta ax + by + c = 0 é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Use essa fórmula para determinar a distância do ponto (-2, 3) à reta 3x - 4y + 5 = 0.

- **50.** Se  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , mostre que a equação vetorial  $(\mathbf{r} \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} \mathbf{b}) = 0$  representa uma esfera e determina seu centro e raio.
- Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas
- Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces.
- 53. Uma molécula de metano, CH<sub>4</sub>, é estruturada com os quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular e o carbono no centro. O ângulo de vínculo é o ângulo formado pela combinação H—C—H; é o ângulo entre as retas que ligam o carbono a dois átomos de hidrogênio. Mostre que esse ângulo de vínculo é de aproximadamente 109,5°. [Dica: Tome os vértices do tetraedro em (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) e

 $(1,\,1,\,1),$  como exposto na figura. Mostre então que o centro é  $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right),\right]$ 



- 54. Se  $\mathbf{c} = |\mathbf{a}| \mathbf{b} + |\mathbf{b}| \mathbf{a}$ , onde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{c}$  são vetores não-nulos, mostre que  $\mathbf{c}$  é a bissetriz do ângulo entre  $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ .
- 55. Prove as Propriedades 2, 4 e 5 do produto escalar (Teorema 2).
- 56. Suponha que todos os lados de um quadrilátero tenham o mesmo comprimento e que os lados opostos sejam paralelos. Use vetores para provar que as diagonais são perpendiculares.
- 57. Utilize o Teorema 3 para provar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

58. A Desigualdade Triangular para vetores é

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

- (a) Dê uma interpretação geométrica para a Desigualdade Triangular.
- (b) Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz do Exercício 57 para provar a Desigualdade Triangular. [Dica: Use o fato de que | a + b |² = (a + b) · (a + b) e utilize a Propriedade 3 do produto escalar.]
- 59. A Lei do Paralelogramo estabelece que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

- (a) Dê uma interpretação geométrica da Lei do Paralelogramo.
- (b) Prove a Lei do Paralelogramo. (Veja a dica do Exercício 58.)

# 12.4

#### O Produto Vetorial

O **produto vetorial**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , ao contrário do produto escalar, é um vetor, por isso seu nome. Note que só é definido  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores *tridimensionais*.

The initial Se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então o **produto vetorial** de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Pode parecer um modo estranho de definir um produto. A razão de tal definição é que o produto vetorial assim definido tem muitas propriedades títeis, como veremos adiante. Em particular, veremos que o vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  quanto a  $\mathbf{b}$ .

Para ajudar a memorização, vamos usar a notação de determinantes. O determinante de ordem 2 é definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

O determinante de ordem 3 pode ser definido em termos dos determinantes de segunda ordem, como:

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 \\
b_1 & b_2 & b_3 \\
c_1 & c_2 & c_3
\end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que a cada termo do lado direito da Equação 2 aparece um número  $a_i$  da primeira linha do determinante, e  $a_i$  é multiplicado por um determinante de segunda ordem obtido do determinante do lado esquerdo, onde é retirada a linha e a coluna em que aparece o elemento  $a_i$ . Note também que o sinal de menos aparece no segundo termo. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1(0 - 4) - 2(6 + 5) + (-1)(12 - 0) = -38$$

Se reescrevermos a Definição 1 utilizando determinantes de segunda ordem e a base canônica de vetores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , veremos que o produto vetorial do vetor  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$  por  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$  é

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Em vista da semelhança entre as Equações 2 e 3, escrevemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Apesar de a primeira linha do determinante simbólico da Equação 4 ser constituída de vetores, se fizermos a expansão como se fosse um determinante ordinário usando a regra dada pela Equação 2, obteremos a Equação 3. A fórmula simbólica dada pela Equação 4 é provavelmente o modo mais fácil de lembrarmos e calcularmos o produto vetorial.

EXEMPLO 1  $\Box$  Se  $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$ , então

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\mathbf{i} - (-5 - 8)\mathbf{j} + (7 - 6)\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

EXEMPLO 2  $\square$  Mostre que  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  para o vetor  $\mathbf{a}$  em  $V_3$ .

SOLUÇÃO Se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$
  
=  $(a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k}$   
=  $0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 

Uma das propriedades mais importantes do produto vetorial é dada pelo seguinte teorema.

 $\boxed{5}$  Toorema O vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é ortogonal a  $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ .

Prova Para mostrar que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é ortogonal a  $\mathbf{a}$ , vamos efetuar seu produto escalar com  $\mathbf{a}$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

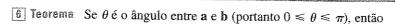
$$= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3$$

$$= 0$$

De forma semelhante mostramos que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ . Portanto,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é ortogonal tanto a  $\mathbf{a}$  quanto a  $\mathbf{b}$ .

Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são representados por segmentos de retas orientados, com mesma origem (como na Figura 1), então o Teorema 5 diz que o produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  resulta em um vetor com direção perpendicular ao plano que passa por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . O sentido desse vetor é determinado pela *regra da mão direita*: com os dedos da mão direita curvados girando no sentido de  $\mathbf{a}$  para  $\mathbf{b}$  (através de um ângulo menor que  $180^\circ$ ), seu polegar estará apontando no sentido do vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Conhecendo o sentido e a direção do vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , resta a descrição geométrica de seu módulo. Isso é dado pelo teorema seguinte.



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

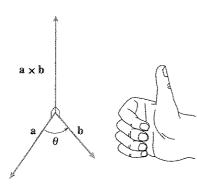


FIGURA 1

Prova Das definições de produto vetorial e norma de um vetor, temos

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^{2} = (a_{2}b_{3} - a_{3}b_{2})^{2} + (a_{3}b_{1} - a_{1}b_{3})^{2} + (a_{4}b_{2} - a_{2}b_{1})^{2}$$

$$= a_{2}^{2}b_{3}^{2} - 2a_{2}a_{3}b_{2}b_{3} + a_{3}^{2}b_{2}^{2} + a_{3}^{2}b_{1}^{2} - 2a_{1}a_{3}b_{1}b_{3} + a_{1}^{2}b_{3}^{2}$$

$$+ a_{1}^{2}b_{2}^{2} - 2a_{1}a_{2}b_{1}b_{2} + a_{2}^{2}b_{1}^{2}$$

$$= (a_{1}^{2} + a_{2}^{2} + a_{3}^{2})(b_{1}^{2} + b_{2}^{2} + b_{3}^{2}) - (a_{1}b_{1} + a_{2}b_{2} + a_{3}b_{3})^{2}$$

$$= |\mathbf{a}|^{2}|\mathbf{b}|^{2} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{2}$$

$$= |\mathbf{a}|^{2}|\mathbf{b}|^{2} - |\mathbf{a}|^{2}|\mathbf{b}|^{2}\cos^{2}\theta \qquad \text{upole Temperator (1.3.3)}$$

$$= |\mathbf{a}|^{2}|\mathbf{b}|^{2}(1 - \cos^{2}\theta)$$

$$= |\mathbf{a}|^{2}|\mathbf{b}|^{2}\sin^{2}\theta$$

Elevando ao quadrado e observando que  $\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$  porque  $\sin\theta \ge 0$  quando  $0 \le \theta \le \pi$ , temos

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

Como um vetor fica completamente determinado se conhecermos seu módulo, direção e sentido, podemos dizer que o vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é perpendicular aos vetores  $\mathbf{a}$  è  $\mathbf{b}$ , o sentido é dado pela regra da mão direita e seu módulo é  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ . De fato, é assim que por vezes definimos o vetor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

[7] Corolário Dois vetores a e b são paralelos se e somente se

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Prova Dois vetores não-nulos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são paralelos se e somente se  $\theta = 0$  ou  $\pi$ . Em qualquer dos casos sen  $\theta = 0$ , assim  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$  e, portanto,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

A interpretação geométrica do Teorema 6 pode ser vista examinando-se a Figura 2. Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são tomados como segmentos de reta orientados com o mesmo ponto inicial, determinam um paralelogramo cuja base é  $|\mathbf{a}|$ , a altura é  $|\mathbf{b}|$  sen  $\theta$ , e com área dada por

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Então temos a seguinte forma de interpretar o módulo do produto escalar.

O módulo do produto escalar  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é igual à área do paralelogramo determinado por  $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ .

EXEMPLO 3  $\Box$  Ache um vetor perpendicular ao plano que passa através dos pontos P(1, 4, 6), Q(-2, 5, -1) e R(1, -1, 1).

SOLUÇÃO O vetor  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$  é perpendicular a ambos  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$  e, portanto, perpendicular ao plano que passa por P, Q e R. Sabemos de (12.2.1) que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$
  
 $\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 

జ్ Caracterização geométrica de బ 🛪 ఏ

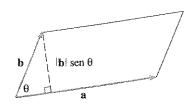


FIGURA 2

Calculando o produto vetorial desses vetores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

Logo, o vetor  $\langle -40, -15, 15 \rangle$  é perpendicular ao plano dado. Qualquer escalar não-nulo que seja múltiplo desse vetor, tal como  $\langle -8, -3, 3 \rangle$ , é também perpendicular ao plano.

EXEMPLO A = Determine a área do triângulo com vértices P(1, 4, 6), Q(-2, 5, -1) e R(1, -1, 1).

SOLUÇÃO No Exemplo 3 calculamos  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$ . A área do paralelogramo com lados adjacentes PQ e PR é o comprimento do produto vetorial:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

A área A do triângulo PQR é metade da área desse paralelogramo, ou seja,  $\frac{5}{2}\sqrt{82}$ .

Se aplicarmos os Teoremas 5 e 6 aos vetores da base-padrão i, j e k com  $\theta = \pi/2$ , obteremos

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Observe que

$$i \times j \neq j \times i$$

Portanto, o produto vetorial não é uma operação comutativa. Temos ainda que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

enquanto

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Então, a lei associativa para multiplicação também não vale obrigatoriamente aqui; em geral, temos,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Entretanto, algumas das propriedades usuais da álgebra valem para o produto vetorial. O teorema a seguir resume as propriedades dos produtos vetoriais.

- 8 Teorema Se a, b e c são vetores e c é um escalar, então
- 1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- 2.  $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
- 3.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- 4.  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
- 5.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
- 6.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Podemos provar essas propriedades escrevendo os vetores em termos de seus componentes e usar a definição de produto vetorial. Faremos, a seguir, a prova da Propriedade 5 e deixaremos as outras como exercício.

Prova da Propriedade 5 Se  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  e  $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ , então

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

O produto  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  que aparece na Propriedade 5 é chamado **produto misto de a**, **b** e **c**. Note que, da Equação 9, podemos escrever o produto misto como o determinante:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

O significado geométrico do produto misto pode ser visto considerando-se o paralelepípedo determinado pelos vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  (Figura 3). A área da base do paralelepípedo é  $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ . Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , então a altura h do paralelepípedo é  $h = |\mathbf{a}| |\cos \theta|$ . (Precisamos usar  $|\cos \theta|$  em vez de  $\cos \theta$  caso  $\theta > \pi/2$ .) Portanto, o volume do paralelepípedo é

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| |\cos \theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Assim, provamos a fórmula seguinte.

 $\boxed{11}$  O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  é o módulo do produto misto:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Se usamos a fórmula (11) e descobrimos que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c** é 0, os três vetores precisam pertencer ao mesmo plano; isso quer dizer que eles são **coplanares**.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Utilize o produto misto para mostrar que os vetores  $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$  e  $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$  são coplanares.

SOLUÇÃO Se usarmos a Equação 10 para calcular o produto misto, teremos:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

300g

Portanto, por (11) o volume do paralelepípedo determinado por a, b e c é 0. Isso significa que os vetores a, b e c são coplanares.

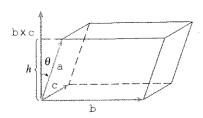


FIGURA 3

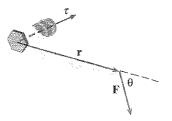


FIGURA 4

A idéia de produto vetorial aparece muito frequente mente em física. Em particular, considere uma força  ${\bf F}$  agindo em um corpo rígido em um ponto fixado dado pelo vetor de posição  ${\bf r}$ . (Por exemplo: se apertarmos um parafuso utilizando uma chave de boca como na Figura 4, conseguiremos o efeito de girá-lo.) O **torque**  ${\bf \tau}$  (em relação à origem) é definido pelo produto vetorial dos vetores de posição e força

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\tau| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor de posição e o vetor força. Observe que o único componente da força  $\mathbf{F}$  que pode causar a rotação do objeto é o perpendicular a  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $|\mathbf{F}|$  sen  $\theta$ . O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$ .

**EXEMPLO 6** 

Um parafuso é apertado por uma chave de boca que aplica uma força de 40 N em uma chave de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$|\tau| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin 75^{\circ} = (0.25)(40) \sin 75^{\circ}$$
  
= 10 \sen 75^\circ \approx 9.66 N·m = 9.66 J

Se o parafuso tem a rosca direita, o vetor torque é

$$\tau = |\tau| \mathbf{n} \approx 9,66\mathbf{n}$$

onde  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido de entrar no papel.

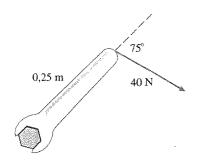


FIGURA 5

## 12.4 Exercícios

1-7  $\Box$  Determine o produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  e verifique que ele  $\epsilon$  ortogonal  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

1. 
$$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$$

**2.** 
$$\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$$

3. 
$$a = 2i + j - k$$
,  $b = j + 2k$ 

4. 
$$a = i - j + k$$
,  $b = i + j + k$ 

5. 
$$a = 3i + 2j + 4k$$
,  $b = i - 2j - 3k$ 

**6.** 
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$
,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$ 

$$\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$$

8. Se  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k} e \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , determine  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Esboce  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  como vetores com início na origem.

Diga se as afirmações a seguir fazem sentido. Se não fizerem, explique por quê. Se fizerem, diga se correspondem a um vetor ou a um escalar.

(a) 
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

(b) 
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

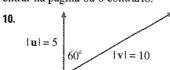
(c) 
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

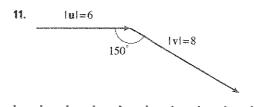
(d) 
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

(e) 
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$$

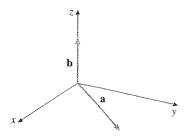
(f) 
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

10-11  $\Box$  Calcule  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$  e determine se  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  tem o sentido de entrar na página ou o contrário.





- A figura mostra um vetor a pertencente ao plano xy e um vetor b na direção de k. Seus módulos são |a| = 3 e |b| = 2.
  - (a) Calcule  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ .
  - (b) Utilize a regra da mão direita para decidir se os componentes de a × b são positivos, negativos ou nulos.



- 13. Se  $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$ , calcule  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  e  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .
- 14. Se  $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$  e  $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$ , mostre que  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .
- Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a (1, -1, 1) quanto a (0, 4, 4).
- Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a
   i + j + k quanto a 2i + k.
- 17. Mostre que  $0 \times a = 0 = a \times 0$  para qualquer vetor a em  $V_3$ .
- **18.** Mostre que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$  para todos os vetores  $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$  em  $V_3$ .
- 19. Prove a Propriedade 1 do Teorema 8.
- 20. Prove a Propriedade 2 do Teorema 8.
- 21. Prove a Propriedade 3 do Teorema 8.
- 22. Prove a Propriedade 4 do Teorema 8.
- **23**. Determine a área do paralelogramo com vértices em A(-2, 1), B(0, 4), C(4, 2), e D(2, -1).
- **24.** Determine a área do paralelogramo com vértices em K(1, 2, 3), L(1, 3, 6), M(3, 8, 6), e N(3, 7, 3).

25-28  $\Box$  (a) Ache um vetor ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

- **25.** P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3)
- **26.** P(2, 1, 5), Q(-1, 3, 4), R(3, 0, 6)
- **27.** P(0, -2, 0), Q(4, 1, -2), R(5, 3, 1)
- **28.** P(2, 0, -3), Q(3, 1, 0), R(5, 2, 2)

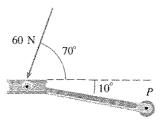
29-30 □ Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores a, b e c.

- **29.**  $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$
- 30. a = i + j k, b = i j + k, c = -i + j + k

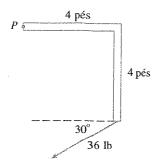
31-32 □ Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

**31.** P(2, 0, -1), Q(4, 1, 0), R(3, -1, 1), S(2, -2, 2)

- **32.** P(0, 1, 2), Q(2, 4, 5), R(-1, 0, 1), S(6, -1, 4)
- 33. Utilize o produto misto para verificar se os vetores  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  são coplanares.
- **34.** Use o produto misto para determinar se os pontos P(1, 0, 1), Q(2, 4, 6), R(3, -1, 2) e S(6, 2, 8) pertencem ao mesmo plano.
- **35.** O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com uma força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em *P*.



**36.** Determine a intensidade do torque em *P* se for aplicada uma força de 36 lb, como mostrado.



- 37. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Considere uma força aplicada no final do cabo da chave com direção dada por (0, 3, -4). Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 J.
- 38. Seja v = 5 j e seja u um vetor com norma 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para u × v. Qual a direção e o sentido de u × v?
- 39. (a) Seja P um ponto não pertencente à reta L que passa pelos pontos Q e R. Mostre que a distância d do ponto P até a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde  $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR} e \mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$ .

(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto P(1, 1, 1) à reta que passa por Q(0, 6, 8) e R(-1, 4, 7).

**40.** (a) Seja *P* um ponto não pertencente ao plano que passa pelos pontos *Q*, *R* e *S*. Mostre que a distância *d* de *P* ao plano é

$$d = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

onde  $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$  e  $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$ 

- (b) Utilize a fórmula dada na parte (a) para calcular a distância de P(2, 1, 4) ao plano definido pelos pontos Q(1, 0, 0), R(0, 2, 0) e S(0, 0, 3).
- 41. Prove que  $(\mathbf{a} \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .
- 42. Prove a parte 6 do Teorema 8, ou seja,:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

43. Utilize o Exercício 42 para provar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

44. Prove que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

- **45.** Suponha que  $a \neq 0$ .
  - (a) Se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ , é verdade que  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ?
  - (b) Se  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ , é verdade que  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ?
  - (c) Se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  e  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ , é verdade que  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ?
- 46. Se v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub> e v<sub>3</sub> são vetores não-coplanares e se

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \quad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

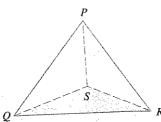
(Esses vetores aparecem no estudo de cristalografia. Vetores da forma  $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$ , onde cada  $n_i$  é um inteiro, formam um *reticulado* para o cristal. Vetores escritos de modo semelhante para  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$  formam o *reticulado recíproco*.)

- (a) Mostre que  $\mathbf{k}_i$  é perpendicular a  $\mathbf{v}_j$  se  $i \neq j$ .
- (b) Mostre que  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$  para i = 1, 2, 3.
- (c) Mostre que  $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \frac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$ .

## Projeto Descoberta

## A Geometria do Tetraedro

Um tetraedro é um sólido com quatro vértices, P, Q, R e S, e quatro faces triangulares:



 Sejam v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub> e v<sub>4</sub> vetores de comprimentos iguais à área das faces opostas aos vértices P, Q, R e S, respectivamente, direções perpendiculares às respectivas faces e sentido apontando para fora do tetraedro. Mostre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

- O volume V do tetraedro é um terço da distância de um vértice à face oposta vezes a área dessa face.
  - (a) Determine uma fórmula para o volume do tetraedro em termos das coordenadas de seus vértices P, Q, R e S.
  - (b) Determine o volume do tetraedro cujos vértices são P(1, 1, 1), Q(1, 2, 3), R(1, 1, 2) e S(3, -1, 2).
- 3. Suponha que o tetraedro da figura tenha um vértice tri-retangular S. (Isto é, os três ângulos em S são ângulos retos.) Sejam A, B e C as áreas das três faces que encontram o vértice S e seja D a área da face oposta PQR. Utilizando o resultado do Problema 1 mostre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Essa é uma versão tridimensional do Teorema de Pitágoras.)

# 12.5

## Equações de Retas e Planos

Uma reta no plano xy é determinada quando um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta) são dados. A equação da reta pode ser então escrita utilizandose a forma ponto-inclinação.

Da mesma maneira, uma reta L no espaço tridimensional é determinada quando conhecemos um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  em L e a direção de L. Em três dimensões a direção de uma reta é descrita de forma muito conveniente por um vetor; assim, seja v um vetor paralelo a L. Seja P(x, y, z) um ponto arbitrário em L e sejam  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}$  os vetores de posição de  $\underline{P_0}$  e P (ou seja, eles têm representantes  $\overline{OP_0}$  e  $\overline{OP}$ ). Se **a** é o vetor com representante  $P_0 \dot{P}$ , como na Figura 1, pela Regra do Triângulo para soma de vetores temos  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ . Mas, como a e v são vetores paralelos, existe um escalar t tal que a = tv. Assim



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

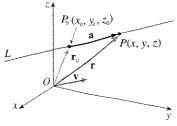


FIGURA 1

FIGURA 2

que é a equação vetorial de L. Cada valor do parâmetro t fornece um vetor de posição r de um ponto de L. Em outras palavras, à medida que t varia, a reta é traçada pelo ponto do vetor r. Como a Figura 2 indica, valores positivos de t correspondem a pontos de L pertencentes a um lado em relação a  $P_0$ , ao passo que valores negativos de t referem-se a pontos pertencentes ao outro lado de  $P_0$ .

Se o vetor v que fornece a direção da reta L é escrito sob a forma de componente  $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ , temos que  $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle$ . Podemos também escrever  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$  e  $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , e assim a equação vetorial (1) se torna

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Dois vetores iguais têm os correspondentes componentes iguais. Assim, temos três equações escalares:

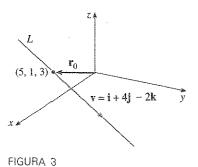
$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

$$v = v_0 + h$$

$$z=z_0+\epsilon$$

☐ A Figura 3 mostra a reta L do Exemplo 1 e sua relação com o ponto dado e o vetor direção.

onde  $t \in \mathbb{R}$ . Essas equações são chamadas **equações paramétricas** da reta L que passa pelo ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e é paralela ao vetor  $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ . Cada valor do parâmetro t fornece um ponto (x, y, z) em L.



#### EXEMPLO 1 0

- (a) Determine as equações vetorial e paramétrica de uma reta que passa pelo ponto (5, 1, 3) e são paralelas ao vetor  $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .
- (b) Determine outros dois pontos na reta.

#### SOLUÇÃO

(a) Aqui  $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \, \mathbf{e} \, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ , de forma que a equação vetorial (1) se torna

$$r = (5i + j + 3k) + t(i + 4j - 2k)$$

$$r = (5 + t)i + (1 + 4t)j + (3 - 2t)k$$

As equações paramétricas são

$$x = 5 + t$$
  $y = 1 + 4t$   $z = 3 - 2t$ 

(b) Escolhendo o valor do parâmetro t = 1 temos x = 6, y = 5 e z = 1, assim (6, 5, 1) é um ponto da reta. Da mesma forma, t = -1 fornece o ponto (4, -3, 5).

A equação vetorial e as equações paramétricas de uma reta não são únicas. Se trocarmos o ponto ou o parâmetro ou escolhermos um vetor paralelo diferente, a equação muda. Por exemplo, se, em vez do ponto (5, 1, 3), escolhermos o ponto (6, 5, 1) no Exemplo 1, as equações paramétricas da reta se tornam

$$x = 6 + t$$
  $y = 5 + 4t$   $z = 1 - 2t$ 

Ou, se mantivermos o ponto (5, 1, 3), mas escolhermos o vetor paralelo  $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ , chegaremos às equações

$$x = 5 + 2t$$
  $y = 1 + 8t$   $z = 3 - 4t$ 

Em geral, se o vetor  $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$  é usado para descrever a direção da reta L, então os números a, b e c são as **componentes do vetor diretor** de L. Como qualquer vetor paralelo a  $\mathbf{v}$  pode ser usado, quaisquer três números proporcionais a a, b e c podem ser usados como componentes do vetor diretor de L.

Outra maneira de descrever uma reta L é eliminar o parâmetro t da Equação 2. Se nenhum dos números a, b e c for 0, podemos resolver cada uma das equações para t e igualar os resultados, obtendo

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas equações são chamadas **equações simétricas** de L. Note que os números a, b e c que aparecem no denominador da Equação 3 são as componentes do vetor diretor de L, ou seja, as componentes de um vetor paralelo a L. Mesmo que uma das componentes desse vetor seja nula, podemos eliminar o parâmetro t. Por exemplo, se a=0, podemos escrever as equações de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{h} = \frac{z - z_0}{c}$$

Isso indica que a reta L pertence ao plano vertical  $x = x_0$ .

EXEMPLO 2 a

- (a) Determine as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelo ponto A(2, 4, -3) e B(3, -1, 1).
- (b) Qual a interseção dessa reta com o plano xy?

SOLUÇÃO

(a) Não nos foi dado de forma explícita o vetor paralelo à reta, mas observe que o vetor  ${\bf v}$  com representação  $\overrightarrow{AB}$  é paralelo à reta e

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Então as componentes do vetor diretor são a=1, b=-5 e c=4. Tomando o ponto (2, 4, -3) como  $P_0$ , temos as equações paramétricas (2):

$$x = 2 + t$$
  $y = 4 - 5t$   $z = -3 + 4t$ 

□ A Figura 4 mostra a reta L do Exemplo 2 e o ponto P de intersecção com o plano xy.

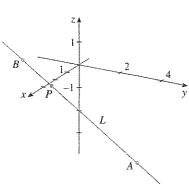


FIGURA 4

e as equações simétricas (3) são

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

(b) A reta intercepta o plano xy quando z = 0. Tomando z = 0 nas equações simétricas, obtemos:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{3}{4}$$

o que fornece  $x = \frac{11}{4}$  e  $y = \frac{1}{4}$ , portanto a reta intercepta o plano xy no ponto  $(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ .

Em geral, o procedimento do Exemplo 2 mostra que as componentes do vetor diretor da reta L que passa pelos pontos  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  são  $x_1 - x_0, y_1 - y_0$  e  $z_1 - z_0$  e as equações simétricas de L são

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Freqüentemente, precisamos de uma descrição, não de uma reta inteira, mas de apenas um segmento de reta. Como podemos descrever o segmento de reta AB no Exemplo 2? Se fizermos t=0 nas equações paramétricas no Exemplo 2(a), obteremos o ponto (2,4,-3) e se fizermos t=1, teremos (3,-1,1). Assim, o segmento de AB é descrito pelas equações paramétricas

$$x = 2 + t$$
  $y = 4 - 5t$   $z = -3 + 4t$   $0 \le t \le$ 

ou pela equação vetorial correspondente

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t \rangle$$
  $0 \le t \le 1$ 

Em geral, sabemos da Equação 1 que a equação normal de uma reta partindo (do fim) de um vetor  $\mathbf{r}_0$  na direção  $\mathbf{v}$  é  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ . Se a reta também passa por  $\mathbf{r}_1$ , então podemos fazer  $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  e assim sua equação normal será

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

O segmento de reta de  $\mathbf{r}_0$  para  $\mathbf{r}_1$  é dado pelo intervalo  $0 \le t \le 1$ .

O segmento de reta de r<sub>0</sub> para r<sub>1</sub> é dado pela equação normal

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

EXEMPLO 3  $\square$  Mostre que as retas  $L_1$  e  $L_2$  com as equações paramétricas dadas por

$$x = 1 + t$$
  $y = -2 + 3t$   $z = 4 - t$   
 $x = 2s$   $y = 3 + s$   $z = -3 + 4s$ 

são retas reversas, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas (não pertencendo, portanto, a um mesmo plano).

SOLUÇÃO As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores  $\langle 1, 3, -1 \rangle$  e  $\langle 2, 1, 4 \rangle$  não são paralelos. (Seus componentes não são proporcionais.) Se  $L_1$  e  $L_2$  tivessem um ponto em comum, existiriam valores para t e s tais que

$$1 + t = 2s 
-2 + 3t = 3 + s 
4 - t = -3 + 4s$$

83

Mas, se resolvermos as primeiras duas equações, obteremos  $t = \frac{11}{5}$  e  $s = \frac{8}{5}$ , que não satisfazem a terceira equação. Não existem valores para t e s que satisfaçam as três equações simultaneamente. Portanto,  $L_1$  e  $L_2$  são retas reversas, não se interceptam.

 $\square$  As retas  $L_1$  e  $L_2$  do Exemplo 3 são retas reversas e estão mostradas na Figura 5.

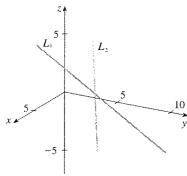
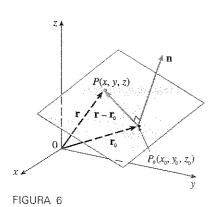


FIGURA 5



## Planos

Enquanto as retas no espaço são facilmente determinadas por um ponto e um vetor diretor, um plano é um pouco mais complicado de descrever. Um único vetor paralelo ao plano desejado não é suficiente para fixar a "direção" do plano, mas um vetor que seja perpendicular a esse plano define de modo completo sua "direção". Então, um plano no espaço fica determinado se conhecermos um ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  do plano e um vetor  $\mathbf{n}$  que seja ortogonal ao plano. Esse vetor  $\mathbf{n}$  ortogonal ao plano é chamado **vetor normal**. Seja P(x, y, z) um ponto qualquer do plano e sejam  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}$  os vetores de posição de  $P_0$  e P. Então o vetor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  é representado por  $P_0P$  (veja a Figura 6). O vetor normal  $\mathbf{n}$  é ortogonal a todo vetor do plano. Em particular,  $\mathbf{n}$  é ortogonal a  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , e assim temos

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

As Equações 5 e 6 são chamadas equações normais do plano.

Para obter a equação escalar para o plano utilizando as coordenadas cartesianas, escrevemos  $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ ,  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$  e  $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . A Equação (5) se transforma em

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

ou

ou

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

A Equação 7 é denominada equação exata do plano que passa por  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  com vetor normal  $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ .

EXEMPLO 4  $\Box$  Determine a equação do plano que passa pelo ponto (2, 4, -1) e tem como vetor normal  $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ . Estabeleça também suas interseções com os planos coordenados e faça o esboço do plano.

SOLUÇÃO Tomando  $a=2,\,b=3,\,c=4,\,x_0=2,\,y_0=4$  e  $z_0=-1$  na Equação 7, vemos que a equação do plano é

$$2(x-2) + 3(y-4) + 4(z+1) = 0$$
$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para achar a interseção com o plano x, impomos y = z = 0 nessa equação e obtemos x = 6. Da mesma forma, o intercepto  $y \notin 4$  e o intercepto  $z \notin 3$ . Isso nos permite esboçar a porção do plano pertencente ao primeiro octante (veja a Figura 7).

Coletando os termos na Equação 7 como fizemos no Exemplo 4, podemos reescrever a equação do plano como

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde  $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ . A Equação 8 é chamada **equação linear** em x, y e z. Reciprocamente, pode ser mostrado que, se a, b e c não são todos nulos, a equação linear (8) é a equação geral que representa um plano cujo normal é o vetor  $\langle a, b, c \rangle$ . (Veja o Exercício 73.)

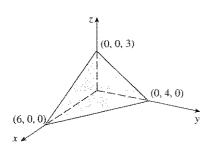


FIGURA 7

□ A Figura 8 mostra a porção do plano do Exemplo 5 contendo o triângulo PQR.

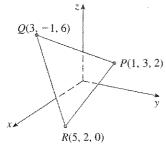


FIGURA 8

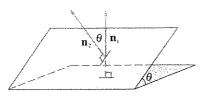


FIGURA 9

☐ A Figura 10 mostra os planos do Exemplo 7 e a reta de interseção L.

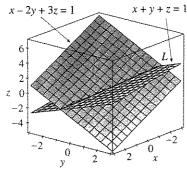


FIGURA 10

Outro modo de determinar a reta interseção é resolver a equação do plano para duas variáveis em função da terceira, que será tomada como parâmetro.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Determine a equação do plano que passa pelos pontos P(1, 3, 2),  $Q(3, -1, 6) \in R(5, 2, 0)$ .

SOLUÇÃO Os vetores a e b correspondentes a  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$  são

$$a = \langle 2, -4, 4 \rangle$$
  $b = \langle 4, -1, -2 \rangle$ 

Como tanto a quanto  $\mathbf{b}$  pertencem ao plano, seu produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal. Assim

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

com o ponto P(1, 3, 2) e o vetor normal n, uma equação do plano é

$$12(x-1) + 20(y-3) + 14(z-2) = 0$$
$$6x + 10y + 7z = 50$$

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Determine o ponto onde a reta com equação paramétrica x = 2 + 3t, y = -4t, z = 5 + t intercepta o plano 4x + 5y - 2z = 18.

SOLUÇÃO Substituindo a expressão de x, y e z das equações paramétricas na equação do plano:

$$4(2+3t) + 5(-4t) - 2(5+t) = 18$$

que pode ser simplificada para -10t = 20, ou seja, t = -2. Portanto o ponto de interseção ocorre quando o parâmetro vale t = -2. Ou seja, x = 2 + 3(-2) = -4, y = -4(-2) = 8, z = 5 - 2 = 3 e o ponto de interseção é (-4, 8, 3).

Dois planos são paralelos se seus vetores normais são paralelos. Por exemplo: os planos x + 2y - 3z = 4 e 2x + 4y - 6z = 3 são paralelos, pois seus vetores normais são $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$  e  $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$  e  $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$ . Se dois planos não são paralelos, eles se interceptam em uma reta, e o ângulo entre os dois planos é definido como o ângulo entre os vetores normais aos planos (veja o ângulo  $\theta$  na Figura 9).

#### EXEMPLO 7 c

011

- (a) Estipule o ângulo entre os planos x + y + z = 1 e x 2y + 3z = 1.
- (b) Determine na forma simétrica a equação da reta interseção L desses dois planos.

#### SOLUÇÃO

(a) Os vetores normais a esses planos são

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

Portanto, se 
$$\theta$$
 é o ângulo entre os dois planos, o Corolário 12.3.6 fornece 
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\left|\mathbf{n}_1\right| \left|\mathbf{n}_2\right|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^{\circ}$$

(b) Vamos achar primeiro um ponto em L. Por exemplo, podemos achar o ponto onde a reta intercepta o plano xy tomando z=0 na equação dos dois planos. Isso nos fornece as equações x + y = 1 e x - 2y = 1, cuja solução é x = 1, y = 0. Portanto o ponto (1, 0, 0)pertence a L.

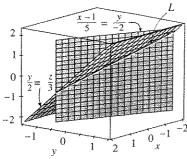
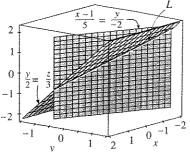


FIGURA 11

☐ A Figura 11 mostra que a reta L do Exemplo 7 pode ser vista como a interseção dos planos derivados de suas equações na forma simétrica.



Observe que, como L pertence a ambos os planos, é perpendicular ao vetor normal de ambos os planos. Então, um vetor v paralelo a L é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

e assim as equações paramétricas de L podem ser escritas como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

NOTA  $\Box$  Como uma equação linear nas variáveis x, y e z representa um plano e dois planos não paralelos se interceptam em uma reta, segue que duas equações lineares podem representar uma reta. O ponto (x, y, z) que satisfaz a ambas as equações  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  pertence a ambos os planos, e assim esse par de equações lineares representa a reta interseção dos planos (se eles não forem paralelos). Por exemplo, no Exemplo 7 a reta L foi encontrada pela interseção dos planos x + y + z = 1 e x - 2y + 3z = 1. As equações simétricas que encontramos para L podiam ter sido escritas como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} \qquad e \qquad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

que é um par de equações lineares. Elas exibem L como a reta interseção dos planos (x-1)/5 = y/(-2) e y/(-2) = z/(-3). (Veja a Figura 11.)

Em geral, quando escrevemos as equações de uma reta na forma simétrica

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

podemos pensar na reta como a interseção de dois planos

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \qquad e \qquad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

EXEMPLO 8  $\Box$  Determine a fórmula da distância D de um ponto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  ao plano ax + by + cz + d = 0.

SOLUÇÃO Seja  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer do plano dado e seja **b** um vetor correspondente a  $P_0P_1$ . Então

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

Da Figura 12 podemos ver que a distância D de  $P_1$  até o plano é igual ao valor absoluto da projeção escalar de **b** sobre o vetor normal  $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ . (Veja a Seção 12.3.) Então

$$D = |\operatorname{comp}_{n} \mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_{1} - x_{0}) + b(y_{1} - y_{0}) + c(z_{1} - z_{0})|}{\sqrt{a^{2} + b^{2} + c^{2}}}$$

$$= \frac{|(ax_{1} + by_{1} + cz_{1}) - (ax_{0} + by_{0} + cz_{0})|}{\sqrt{a^{2} + b^{2} + c^{2}}}$$

Como P<sub>0</sub> pertence ao plano, suas coordenadas satisfazem a equação do plano, e assim temos

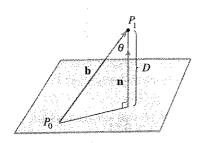


FIGURA 12

que  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ . Então, a fórmula da distância D pode ser escrita como

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

827

EXEMPLO 9  $\Box$  Determine a distância entre os dois planos paralelos 10x + 2y - 2z = 5 e 5x + y - z = 1.

SOLUÇÃO Notemos primeiro que os dois planos são paralelos, pois seus vetores normais  $\langle 10, 2, -2 \rangle$  e  $\langle 5, 1, -1 \rangle$  são vetores paralelos. Para achar a distância D entre os planos, escolhemos um ponto qualquer em um plano e calculamos sua distância ao outro plano. Em particular, se tomarmos y = z = 0 na equação do primeiro plano, obteremos 10x = 5, e portanto  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$  é um ponto desse plano. Pela Fórmula 9, a distância entre  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$  e o plano 5x + y - z - 1 = 0 é

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim a distância entre os planos é  $\sqrt{3}/6$ .

EXEMPLO 10 - No Exemplo 3 mostramos que as retas

$$L_1$$
:  $x = 1 + t$   $y = -2 + 3t$   $z = 4 - t$   
 $L_2$ :  $x = 2s$   $y = 3 + s$   $z = -3 + 4s$ 

são retas reversas. Determine a distância entre elas.

SOLUÇÃO Como as retas  $L_1$  e  $L_2$  são reversas, elas podem ser vistas como pertencentes aos planos paralelos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. A distância entre  $L_1$  e  $L_2$  é igual à distância entre  $P_1$  e  $P_2$ , que pode ser calculada como no Exemplo 9. O vetor normal a ambos os planos precisa ser ortogonal aos vetores  $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1 \rangle$  (vetor diretor de  $L_1$ ) e  $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4 \rangle$  (vetor diretor de  $L_2$ ). Assim, o vetor normal é dado por

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se impusermos s=0 na equação de  $L_2$ , obteremos o ponto (0,3,-3) pertencente a  $L_2$ , e a equação de  $P_2$  fica sendo

$$13(x-0) - 6(y-3) - 5(z+3) = 0$$
 ou  $13x - 6y - 5z + 3 = 0$ 

Tomando agora t=0 na equação de  $L_1$ , obtemos o ponto (1, -2, 4) em  $P_1$ . A distância entre  $L_1$  e  $L_2$  é igual à distância de (1, -2, 4) até 13x - 6y + 5z + 3 = 0. Pela Fórmula 9 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0.53$$

## 12.5 Exercícios

- 1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
  - (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
  - (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
  - (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
  - (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
  - (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
  - (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
  - (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
  - (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
  - (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.

- (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
- (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.
- 2-5 Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.
- 2. A reta que passa pelo ponto (1, 0, −3) e é paralela ao vetor 2i − 4j + 5k
- A reta que passa pelo ponto (-2, 4, 10) e é paralela ao vetor (3, 1, -8)

- 4. A reta que passa pela origem e é paralela à reta x = 2t, y = 1 t, z = 4 + 3t
- **5.** A reta que passa pelo ponto (1, 0, 6) e é perpendicular ao plano x + 3y + z = 5

6-12 
Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

- 6. Reta que passa pela origem e pelo ponto (1, 2, 3)
- 7. Reta que passa pelos pontos (1, 3, 2) e (-4, 3, 0)
- 8. Reta que passa pelos pontos (6, 1, -3) e (2, 4, 5)
- **9.** Reta que passa pelos pontos  $(0, \frac{1}{2}, 1)$  e (2, 1, -3)
- 10. Reta que passa por (2, 1, 0) e é perpendicular à reta  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  e  $\mathbf{j} + \mathbf{k}$
- 11. Reta que passa por (1, -1, 1) e é paralela à reta  $x + 2 = \frac{1}{2}y = z 3$
- 12 Reta que é a interseção dos planos x + y + z = 1 e x + z = 0
- A reta que passa pelos pontos (-4, -6, 1) e (-2, 0 -3) é paralela à reta que passa pelos pontos (10, 18, 4) e (5, 3, 14).
- **14.** A reta que passa pelos pontos (4, 1, -1) e (2, 5, 3) é perpendicular à reta que passa pelos pontos (-3, 2, 0) e (5, 1, 4)?
- **15.** (a) Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto (0, 2, -1) e é paralela à reta com equações paramétricas x = 1 + 2t, y = 3t, z = 5 7t.
  - (b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.
- **16.** (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (5, 1, 0) e que é perpendicular ao plano 2x y + z = 1.
  - (b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?
- Ache a equação normal para o segmento de reta de (2, -1, 4) a (4, 6, 1).
- **18.** Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de (10, 3, 1) a (5, 6, -3).

19-22  $\Box$  Determine se as retas  $L_1$  e  $L_2$  são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de interseção.

**19.** 
$$L_1$$
:  $x = -6t$ ,  $y = 1 + 9t$ ,  $z = -3t$ 

$$L_2$$
:  $x = 1 + 2s$ ,  $y = 4 - 3s$ ,  $z = s$ 

**20.** 
$$L_1$$
:  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 2 - t$ 

$$L_2$$
:  $x = -1 + s$ ,  $y = 4 + s$ ,  $z = 1 + 3s$ 

**21.** 
$$L_1$$
:  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ,  $L_2$ :  $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ ,

**22.** 
$$L_1$$
:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ 

$$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

23-38 🗆 Determine a equação do plano.

- O plano que passa pelo ponto (6, 3, 2) e é perpendicular ao vetor (-2, 1, 5)
- **24.** O plano que passa pelo ponto (4, 0, -3) e cujo vetor normal é  $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- 25. O plano que passa pelo ponto (1, -1, 1) e cujo vetor normal é i + j k
- **26.** O plano que passa pelo ponto (-2, 8, 10) e é perpendicular à reta x = 1 + t, y = 2t, z = 4 3t
- 27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano 2x y + 3z = 1
- **28.** O plano que passa pelo ponto (-1, 6, -5) e é paralelo ao plano x + y + z + 2 = 0
- **29.** O plano que passa pelo ponto (4, -2, 3) e é paralelo ao plano 3x 7z = 12
- **30.** O plano que contém a reta x = 3 + 2t, y = t, z = 8 t e é paralelo ao plano 2x + 4y + 8z = 17
- **31.** O plano que passa pelos pontos (0, 1, 1), (1, 0, 1) e (1, 1, 0)
- **32.** O plano que passa pela origem e pelos pontos (2, -4, 6) e (5, 1, 3)
- **33.** O plano que passa pelos pontos (3, -1, 2), (8, 2, 4) e (-1, -2, -3)
- 34. O plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e contém a reta x = 3t, y = 1 + t, z = 2 t
- **35.** O plano que passa pelo ponto (6, 0, -2) e contém a reta x = 4 2t, y = 3 + 5t, z = 7 + 4t
- **36.** O plano que passa pelo ponto (1, -1, 1) e contém a reta com equação na forma simétrica x = 2y = 3z
- 37. O plano que passa pelo ponto (-1, 2, 1) e contém a reta obtida pela interseção dos planos x + y z = 2 e 2x y + 3z = 1
- 38. Plano que passa pela reta obtida pela interseção dos planos x-z=1 e y+2z=3 e é perpendicular ao plano x+y-2z=1

39-41 □ Determine o ponto dado pela interseção da reta e do plano especificados.

- **39.** x = 3 t, y = 2 + t, z = 5t; x y + 2z = 9
- **40.** x = 1 + 2t, y = 4t, z = 2 3t; x + 2y z + 1 = 0
- **41.** x = y 1 = 2z; 4x y + 3z = 8
- **42.** Onde a reta que passa pelos pontos (1, 0, 1) e (4, -2, 2) intercepta o plano x + y + z = 6?

#### ☐ CÁLCULO Editora Thomson 830

43. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta obtida pela interseção dos planos x + y + z = 1 e x + z = 0.

44. Determine o cosseno do ângulo entre os planos x + y + z = 0 e x + 2y + 3z = 1.

85-50 □ Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

**45** 
$$x + 4y - 3z = 1$$
,  $-3x + 6y + 7z = 0$ 

**46.** 
$$2z = 4y - x$$
,  $3x - 12y + 6z = 1$ 

**47.** 
$$x + y + z = 1$$
,  $x - y + z = 1$ 

**48.** 
$$2x - 3y + 4z = 5$$
,  $x + 6y + 4z = 3$ 

**49.** 
$$x = 4y - 2z$$
,  $8y = 1 + 2x + 4z$ 

**50.** 
$$x + 2y + 2z = 1$$
,  $2x - y + 2z = 1$ 

53-52 □ (a) Determine a equação na forma simétrica da reta de interseção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

**51.** 
$$x + y - z = 2$$
,  $3x - 4y + 5z = 6$ 

**52.** 
$$x - 2y + z = 1$$
,  $2x + y + z = 1$ 

53-54 🗆 Determine as equações na forma paramétrica da reta obtida pela interseção dos planos.

**53.** 
$$z = x + y$$
,  $2x - 5y - z = 1$ 

**54.** 
$$2x + 5z + 3 = 0$$
,  $x - 3y + z + 2 = 0$ 

9 2 5 3 5 b 55. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos

que são equidistantes dos pontos (1, 1, 0) e (0, 1, 1).

56. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos (-4, 2, 1) e (2, -4, 3).

57. Determine a equação do plano x que intercepta a, o plano que intercepta b e o plano z que intercepta c.

58. (a) Determine o ponto dado pela interseção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t \langle 1, -1, 2 \rangle$$
  
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s \langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

59. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto (0, 1, 2), são paralelas ao plano x + y + z = 2 e perpendiculares à reta x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t.

60. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto (0, 1, 2), são perpendiculares à reta x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t, e interceptam essa reta.

61. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

$$P_1$$
:  $4x - 2y + 6z = 3$ 

$$P_2$$
:  $4x - 2y - 2z = 6$ 

$$P_3$$
:  $-6x + 3y - 9z = 5$   $P_4$ :  $z = 2x - y - 3$ 

$$P_4$$
:  $z = 2x - y - 1$ 

62. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

$$L_1$$
:  $x = 1 + t$ ,  $y = t$ ,  $z = 2 - 5t$ 

$$L_2$$
:  $x + 1 = y - 2 = 1 - z$ 

$$L_3$$
:  $x = 1 + t$ ,  $y = 4 + t$ ,  $z = 1 - t$ 

$$L_4$$
:  $\mathbf{r} = \langle 2, 1, -3 \rangle + t \langle 2, 2, -10 \rangle$ 

83-64 ☐ Utilize a fórmula que aparece no Exercício 39 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

**63.** 
$$(1, 2, 3)$$
;  $x = 2 + t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,  $z = 5t$ 

**64.** 
$$(1, 0, -1)$$
;  $x = 5 - t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 1 + 2t$ 

65-66 □ Determine a distância do ponto ao plano dado.

**65.** 
$$(2, 8, 5)$$
,  $x - 2y - 2z = 1$ 

**66.** 
$$(3, -2, 7), 4x - 6y + z = 5$$

= 9 3 3 3 3 5

67-68 □ Determine a distância entre os planos paralelos dados

**67.** 
$$z = x + 2y + 1$$
,  $3x + 6y - 3z = 4$ 

**68.** 
$$3x + 6y - 9z = 4$$
,  $x + 2y - 3z = 1$ 

69. Mostre que a distância entre os planos paralelos  $ax + by + cz + d_1 = 0$  e  $ax + by + cz + d_2 = 0$  é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

70. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano x + 2y - 2z = 1 e distantes duas unidades um do outro.

71. Mostre que as retas com equações simétricas x = y = z e x + 1 = y/2 = z/3 são reversas e determine a distância entre

72. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas x = 1 + t, y = 1 + 6t, z = 2t

$$ex = 1 + 2s, y = 5 + 15s, z = -2 + 6s$$

73. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação ax + by + cz + d = 0 representa um plano e  $\langle a, b, c \rangle$  é o vetor normal ao plano.

Dica: Suponha  $a \neq 0$  e reescreva a equação na forma

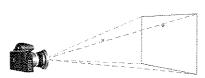
$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

74. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

- (a) x + y + z = c
- (b) x + y + cz = 1
- (c)  $y \cos \theta + z \sin \theta = 1$

## Projeto de Laboratório

## Pondo 3D em Perspectiva

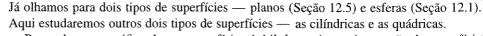


Os programadores de computação gráfica encaram o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: Como representar uma cena tridimensional como uma imagem plana em um plano (um monitor ou uma tela). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho – a câmera – está localizado. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam através do ponto de visão e uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *planos cortantes*.

- 1. Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano yz com vértices (0, ±400, 0) e (0, ±400, 600), e a câmera esteja localizada em (1000, 0, 0). Uma reta L na cena passa através dos pontos (230, -285, 102) e (860, 105, 264). Em quais pontos L será contada pelos planos cortantes?
- 2. Se o segmento de reta cortado é projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.
- 3. Use equações paramétricas para plotar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. Logo após, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada término dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.
- 4. Um retângulo com vértices (621, -147, 206), (563, 31, 242), (657, -111, 86), e (599, 67, 122) é adicionado na cena. A reta L intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo aparecer opaco, um programador pode usar linhas escondidas as quais removem porções do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a porção de L que deve ser removida.

## 12.6

## Superfícies Cilíndricas e Quádricas



Para esboçar o gráfico dessas superfícies é útil determinar a interseção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas são denominadas **traços** (ou **secções transversais**) da superfície.

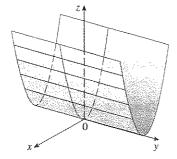


FIGURA 1 A superfície  $z = x^2$  é uma superfície cilíndrica parabólica.

#### Cilindros

Um **cilindro** é uma superfície constituída de todas as retas (chamadas **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana.

**EXEMPLO** 1  $\Box$  Esboce a superfície  $z = x^2$ .

SOLUÇÃO Observe que a equação do gráfico,  $z=x^2$ , não envolve y. Isso significa que qualquer plano vertical de equação y=k (paralelo ao plano xz) intercepta o gráfico segundo uma curva de equação  $z=x^2$ . Os traços verticais são portanto parábolas. A Figura 1 indica como o gráfico é formado tomando a parábola  $z=x^2$  no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. O gráfico é uma superfície, chamada de cilindro

parábolico, feito de um número infinito de cópias deslocadas da mesma parábola. Aqui as geratrizes da superfície cilíndrica são paralelas ao eixo y.

Notemos que a variável y não aparece na equação da superfície cilíndrica do Exemplo 1. Esse fato é comum às superfícies cilíndricas cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados. Se uma das variáveis x, y ou z está faltando na equação da superfície, a superfície obtida é cilíndrica.

**EXEMPLO 2** 

Identifique e esboce as superfícies.

(a) 
$$x^2 + y^2 = 1$$

(b) 
$$y^2 + z^2 = 1$$

SOLUÇÃO

- (a) Como z não aparece e as equações  $x^2 + y^2 = 1$ , z = k, representam uma circunferência de vaio ! no plano z = k, a superfície  $x^2 + y^2 = 1$  é um cilindro circular cujo eixo de rotação é o eixo z (veja a Figura 2). Aqui as geratrizes da superfície cilíndrica são retas verticais.
- (b) Nesse caso a variável x é que está faltando, e a superfície é um cilindro circular cujo eixo de rotação é o eixo x (veja a Figura 3). Ela é obtida tomando-se a circunferência  $y^2 + z^2 = 1$ , x = 0, no plano yz e deslocando-a paralelamente ao eixo x.

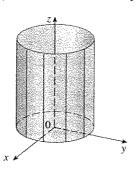


FIGURA 2  $x^2 + y^2 = 1$ 

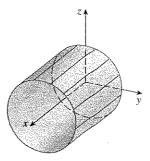


FIGURA 3  $y^2 + z^2 = 1$ 



NOTA  $\Box$  Quando estamos tratando de superfícies, é importante reconhecer que uma equação como  $x^2 + y^2 = 1$  representa uma superfície cilíndrica e não uma circunferência. O traço dessa superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 1$  no plano xy é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ , z = 0.

## Quádricas

Uma superfície **quádrica** é o gráfico de uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z. A forma mais geral dessa equação é dada por

$$Ax^{2} + By^{2} + Cz^{2} + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde  $A, B, C, \ldots, J$  são constantes. Por rotação e translação essa equação pode ser posta na forma padrão?

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$
 ou  $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$ 

As superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no plano. (Veja a Seção 10.5 para uma revisão das cônicas.)

EXEMPLO 3 

Utilize traços para fazer o esboço da quádrica com equação

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUÇÃO Substituindo z=0, determinamos que o traço no plano  $xy \notin x^2 + y^2/9 = 1$ , que reconhecemos ser a equação de uma elipse. Em geral, o traço horizontal no plano z=k é

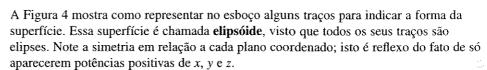
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

que é uma elipse, desde que  $k^2 < 4$ , ou seja, -2 < k < 2.

Da mesma forma, os traços verticais também são elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2$$
  $x = k$  (if  $-1 < k < 1$ )

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9}$$
  $y = k$  (if  $-3 < k < 3$ )



**EXEMPLO 4**  $\Box$  Utilize os traços para esboçar a superfície  $z = 4x^2 + y^2$ .

SOLUÇÃO Impondo x=0, obtemos  $z=y^2$ , de forma que no plano yz a interseção da superfície é uma parábola. Se tomarmos x=k (uma constante), obteremos  $z=y^2+4k^2$ . Isso significa que se deslocarmos o gráfico para um plano paralelo ao plano yz obteremos uma nova parábola com concavidade para cima. Da mesma forma, tomando y=k, o traço é  $z=4x^2+k^2$ , que corresponde novamente a uma parábola com concavidade para cima. Impondo z=k, obteremos os traços horizontais  $4x^2+y^2=k$ , que reconhecemos como uma família de elipses. Sabendo a forma dos traços, podemos esboçar o gráfico da Figura 5. Pelo fato de os traços serem parábolas e elipses, a quádrica  $z=4x^2+y^2$  é denominada **parabolóide elíptico**.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Esboce a superfície  $z = y^2 - x^2$ .

SOLUÇÃO Os traços nos planos verticais x=k são parábolas  $z=y^2-k^2$ , com concavidade para cima. Os traços em y=k são parábolas  $z=-x^2+k^2$ , com concavidade para baixo. Os traços horizontais são  $y^2-x^2=k$ , uma família de hipérboles. Na Figura 6 desenhamos esses traços e mostramos como eles aparecem quando colocados nos planos corretos na Figura 7.

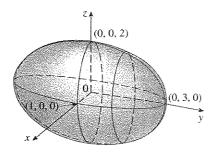


FIGURA 4 Elipsóide  $x^2 + \frac{y^2}{Q} + \frac{z^2}{4} = 1$ 

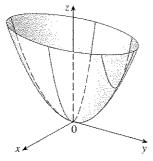
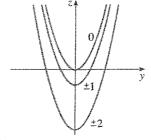
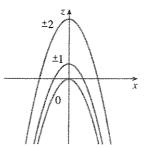
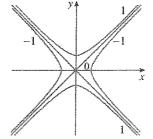


FIGURA 5 A superfície  $z = 4x^2 + y^2$  é um parabolóide elíptico. Os traços horizontais são elipses e os traços verticais são parábolas.



Traços em x = k são  $z = y^2 - k^2$ 





Traços em x = k são  $z = -x^2 + k^2$  Traços em z = k são  $y^2 - x^2 = k$ 

FIGURA 6
Traços verticais são parábolas; traços horizontais são hipérboles. Todos os traços são identificados com o valor de k.

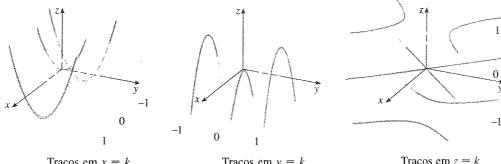


FIGURA 7 Tracos movidos para suas posições nos planos corretos

Traços em x = k

Traços em y = k

Traços em z = k

Na Figura 8 colocamos juntos os traços da Figura 7 para formar a superfície  $z = y^2 - x^2$ , um parabolóide hiperbólico. Observe que o formato da superfície perto da origem se assemelha a uma sela. Essa superfície será alvo de estudos futuros na Seção 14.7, quando discutirmos os pontos de sela.

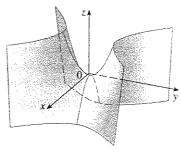


FIGURA 8

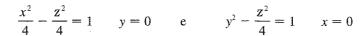
A superfície  $z = y^2 - x^2$  é um parabolóide hiperbólico.

**EXEMPLO** 6  $\Box$  Desenbe a superfície  $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ .

SOLUÇÃO O traço em qualquer plano horizontal z = k é a elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

mas os traços nos planos xz e yz são as hipérboles



Essa superfície é chamada hiperbolóide de uma folha e está esboçada na Figura 9.

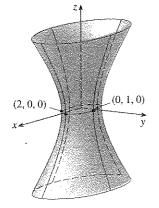


FIGURA 9

A idéia de usar os traços para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais. Na maioria desses programas os traços nos planos verticais x = k e y = k são apresentados para valores de k igualmente espaçados, e partes do gráfico são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas. A Tabela 1 mostra gráficos de computador de seis quádricas básicas na forma padrão. Todas as superfícies são simétricas em relação ao eixo z. Se uma quádrica é simétrica em relação a um eixo diferente, sua equação se modifica de modo apropriado.

TABELA 1 Gráfico de Quádricas

| Superfície              | Equação                                                                                                                                                                                | Superficie                  | Еднаçãо                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Elipsóide               | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todos os traços são elipses. Se $a = b = c$ , o elipsóide é uma esfera.                                                      | Cone                        | $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Traços horizontais são elipses. Traços verticais nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles se $k \neq 0$ , mas são um par de retas quando $k = 0$ .        |
| Parabolóide Elíptico    | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Traços horizontais são elipses. Traços verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do parabolóide. | Hiperbolóide de Uma Folha   | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Traços horizontais são elipses. Traços verticais são hipérboles. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.                  |
| Parabolóide Hiperbólico | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Traços horizontais são hipérboles. Traços verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a $c < 0$                       | Hiperbolóide de Duas Folhas | $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Traços horizontais em $z = k$ são elipses se $k > c$ ou se $k < -c$ . Traços verticais são hipérboles. Os dois sinais de subtração indicam duas folhas. |

EXEMPLO 7  $\Box$  Identifique e esboce o desenho da superfície  $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ . SOLUÇÃO Dividindo por -4, colocamos na forma padrão:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Comparando essa equação com as da Tabela 1 vemos que ela representa um hiperbolóide de duas folhas, exceto que aqui o eixo de rotação do hiperbolóide é o eixo y. Os traços nos planos xy e yz são hipérboles

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$
  $z = 0$  e  $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$   $x = 0$ 

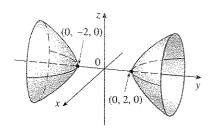


FIGURA 10

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$$

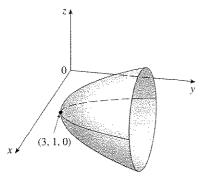


FIGURA 11

$$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$$

A superfície não tem traço no plano xz, mas os traços nos planos verticais y = k para |k| > 2 são as elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1$$
  $y = k$ 

que podem ser escritas como

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Esses traços são usados para fazer o esboço na Figura 10.

EXEMPLO 8  $\Box$  Classifique a quádrica  $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$ .

SOLUÇÃO Completando os quadrados, reescrevemos a equação como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Comparando essa equação com a Tabela 1, vemos que se trata de um parabolóide elíptico. Aqui, entretanto, o eixo de rotação do parabolóide é paralelo ao eixo y, e foi transladado de forma que o vértice é o ponto (3, 1, 0). Os traços nos planos y = k (k > 1) são elipses

$$(x-3)^2 + 2z^2 = k-1$$
  $y = k$ 

O traço no plano xy é uma parábola com equação  $y = 1 + (x - 3)^2$ , z = 0. O desenho do parabolóide está esboçado na Figura 11.

## 12.6

#### Exercícios

- 1. (a) O que a equação  $y = x^2$  representa como uma curva em  $\mathbb{R}^2$ ?
  - (b) O que ela representa como uma superfície em ℝ³?
  - (c) O que a equação  $z = y^2$  representa?
- 2. (a) Esboce o gráfico de  $y = e^x$  como uma curva em  $\mathbb{R}^2$ .
  - (b) Esboce o gráfico de  $y = e^x$  como uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (c) Descreva e esboce a superfície  $z = e^{y}$ .
- 3-8 Descreva e esboce o gráfico da superfície.

3. 
$$y^2 + 4z^2 = 4$$

4. 
$$z = 4 - x$$

**5.** 
$$x - y^2 = 0$$

6. 
$$yz = 4$$

7. 
$$z = \cos x$$

8. 
$$x^2 - y^2 = 1$$

- 9. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de uma folha da Tabela 1.
  - (b) Se trocarmos a equação em (a) para  $x^2 y^2 + z^2 = 1$ , como isso afeta o gráfico?
  - (c) E se trocarmos a equação em (a) para  $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0?$

10. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$  e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de duas folhas da Tabela 1. (b) Se a equação na parte (a) for trocada para  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ , o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11-20  $\Box$  Determine o traço da superfície dada nos planos x = k, y = k, z = k. Identifique a superfície e faça um esboço dela.

**11.** 
$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$$
 **12.**  $4y = x^2 + z^2$ 

**12.** 
$$4y = x^2 + z^2$$

13. 
$$y^2 = x^2 + z^2$$

14. 
$$z = x^2 - y^2$$

**15.** 
$$-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$$

**16.** 
$$25y^2 + z^2 = 100 + 4x^2$$

17. 
$$x^2 + 4z^2 - y = 0$$

18. 
$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$$

19 
$$v = \tau^2 - x^2$$

$$16x^2 = y^2 + 4z$$

21-28 □ Case a equação com seu gráfico (identificado por I-VIII). Dê razões para sua escolha.

**21.** 
$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$$

**22.** 
$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

23. 
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

**24.** 
$$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

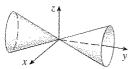
**25.** 
$$y = 2x^2 + z^2$$

**26.** 
$$y^2 = x^2 + 2z^2$$

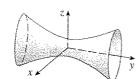
27. 
$$x^2 + 2z^2 = 1$$

**28.** 
$$y = x^2 - z^2$$

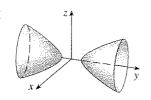
I



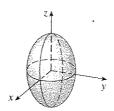
11



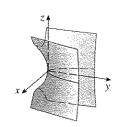
Ш



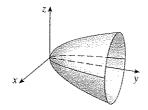
IV



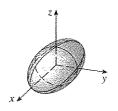
V



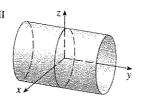
VI



VII



VIII



29–36  $\ \Box$  Coloque a equação na forma padrão, classifique a superfície e faça o esboço.

**29.** 
$$z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$$

**30.** 
$$x^2 = 2y^2 + 3z^2$$

31. 
$$x = 2y^2 + 3z^2$$

**32.** 
$$4x - y^2 + 4z^2 = 0$$

33. 
$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$$

**34.** 
$$4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$$

**35.** 
$$x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$$

**36.** 
$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$$

37-40 □ Use o computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela de inspeção até conseguir uma boa visão da superfície.

**37.** 
$$z = 3x^2 - 5y^2$$

**38.** 
$$8x^2 + 15y^2 + 5z^2 = 100$$

**39.** 
$$z^2 = x^2 + 4y^2$$

**40.** 
$$z = y^2 + xy$$

41. Desenhe a região delimitada pela superfície  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $x^2 + y^2 = 1$  para  $1 \le z \le 2$ .

**42.** Desenhe a região delimitada pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 2 - x^2 - y^2$ .

**43.** Determine a equação da superfície obtida pela rotação da parábola  $y = x^2$  em torno do eixo y.

**44.** Determine a equação da superfície obtida pela rotação da reta x = 3y em torno do eixo x.

**45.** Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto (-1, 0, 0) e do plano x = 1. Identifique essa superfície.

**46.** Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos *P* para os quais a distância de *P* ao eixo *x* é o dobro da distância de *P* ao plano *yz*. Identifique a superfície.

47. Mostre que, se o ponto (a, b, c) pertence ao parabolóide hiperbólico z = y² - x², então as retas com equação paramétrica x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t e x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t estão contidas inteiramente no parabolóide. (Isso mostra que o parabolóide hiperbólico é o que é chamado superfície regrada; ele pode ser gerado pelo movimento de uma reta. De fato, esse exercício mostra que passando emr cada ponto do parabolóide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras quádricas que têm superfície regrada são cilíndros, cones e hiperbolóides de uma folha.)

**48.** Mostre que a curva obtida pela interseção das superfícies  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$  e  $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$  pertence a um plano.

**49.** Desenhe as superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 1 - y^2$  em uma mesma tela usando uma janela de tamanho  $|x| \le 1.2$ ,  $|y| \le 1.2$ , e observe a curva da interseção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

FIGURA 1

# 12.7

 $P(r, \theta, z)$ 

 $(r, \theta, 0)$ 

Coordenadas cilíndricas de um ponto

## Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Lembre-se de que em geometria plana introduzimos o sistema de coordenadas polares para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões (ver a Seção 10.3). Em três dimensões existem dois sistemas de coordenadas semelhantes às coordenadas polares que fornecem uma descrição conveniente de algumas superfícies e sólidos que aparecem geralmente. Esses sistemas serão especialmente úteis no Capítulo 15, quando calcularemos volumes e integrais triplas.

## Quádricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada  $(r, \theta, z)$ , onde  $r \in \theta$  são as coordenadas polares da projeção de P sobre o plano xy e z é a distância direta do plano xy ao ponto P (veja a Figura 1).

Para converter de coordenadas cilíndricas para coordenadas retangulares, usamos as equações

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

enquanto para converter de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas, utilizamos

$$r^2 = x^2 + y$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Essas equações seguem das Equações 10.3.1 e 10.3.2.

#### EXEMPLO 1 a

- (a) Plote o ponto com coordenadas cilíndricas  $(2, 2\pi/3, 1)$  e determine suas coordenadas retangulares.
- (b) Determine as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares (3, -3, -7).

## **SOLUÇÃO**

(a) O ponto com coordenadas cilíndricas  $(2, 2\pi/3, 1)$  está plotado na Figura 2. Da Equação 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Assim o ponto em coordenadas retangulares é  $(-1, \sqrt{3}, 1)$ .

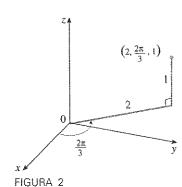
(b) Da Equação 2, temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \operatorname{assim} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

Portanto temos um conjunto de coordenadas cilíndricas dado por  $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ . Outro conjunto é  $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$ . Como em coordenadas polares, existem infinitas escolhas possíveis.

0/HIL 2 X 2/75



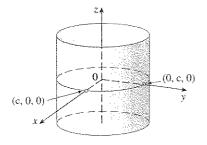


FIGURA 3 r = c, um cilindro

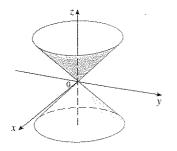


FIGURA 4 z = r, um cone

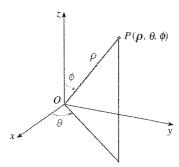


FIGURA 5 Coordenadas esféricas de um ponto

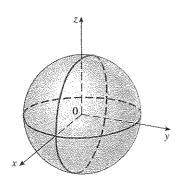


FIGURA 6  $\rho = c$ , uma esfera

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo, e o eixo z é escolhido para coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação em coordenadas cartesianas  $x^2 + y^2 = c^2$  é o eixo z. Em coordenadas cilíndricas ele tem uma equação muito simples dada por r = c. (Veja a Figura 3.) Esta é a razão para o nome coordenadas "cilíndricas".

EXEMPLO 2  $\square$  Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é z=r.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor z, ou superior, de cada ponto na superfície é igual a r, a distância do ponto ao eixo z. Como  $\theta$  não aparece, ele pode variar. Então qualquer traço horizontal no plano z=k (k>0) é um círculo de raio k. Esses traços sugerem que a superfície é um cone. Isso pode ser confirmado convertendo-se a equação em coordenadas retangulares. Da primeira equação em (2), temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação  $z^2 = x^2 + y^2$  (comparando com a Tabela 1 da Seção 12.6) como um cone cujo eixo é o z (veja a Figura 4).

EXEMPLO 3  $\Box$  Determine a equação em coordenadas cilíndricas para o elipsóide  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Como  $r^2 = x^2 + y^2$ , da Equação 2, temos

$$z^2 = 1 - 4(x^2 + y^2) = 1 - 4r^2$$

Assim, uma equação do elipsóide em coordenadas cilíndricas é  $z^2 = 1 - 4r^2$ .

## Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas**  $(\rho, \theta, \phi)$  de um ponto P no espaço são indicadas na Figura 5, onde  $\rho = |OP|$  é a distância da origem a P,  $\theta$  é o mesmo ângulo que em coordenadas cilíndricas, e  $\phi$  é o ângulo entre o eixo positivo z e o segmento de reta QP. Note que

$$\rho \ge 0$$
  $0 \le \phi \le \pi$ 

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas onde a simetria é em relação a um ponto. Por exemplo, uma esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples  $\rho=c$  (veja a Figura 6); esta é a razão para o nome coordenadas "esféricas". O gráfico da equação  $\theta=c$  é um semiplano vertical.

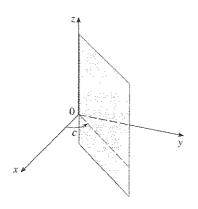


FIGURA 7  $\theta = c$ , um semiplano

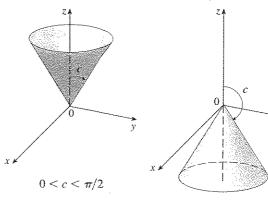


FIGURA 8  $\phi = c$ , um semicone

 $\pi/2 < c < \pi$ 

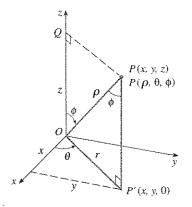


FIGURA 9

(veja a Figura 7), e a equação  $\phi = c$  representa um semicone com eixo z como seu eixo (veja a Figura 8).

A relação entre as coordenadas retangulares e as coordenadas esféricas pode ser vista da Figura 9. Dos triângulos *OPQ* e *OPP'*, temos

$$z = \rho \cos \phi$$
  $r = \rho \sin \phi$ 

Mas  $x = r \cos \theta$  e y = r sen  $\theta$ ; assim, para converter de coordenadas esféricas para retangulares utilizamos as equações

Também, a fórmula da distância mostra que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Usamos essas equações para converter de coordenadas retangulares para esféricas.

**EXEMPLO 4**  $\square$  O ponto  $(2, \pi/4, \pi/3)$  é dado em coordenadas esféricas. Plote o ponto e determine suas coordenadas retangulares.

SOLUÇÃO Plotamos o ponto na Figura 10. Das Equações 3, temos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Assim, o ponto  $(2, \pi/4, \pi/3)$  tem coordenadas retangulares dadas por  $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ .

**EXEMPLO 5**  $\Box$  O ponto  $(0, 2\sqrt{3}, -2)$  é dado em coordenadas retangulares. Determine as coordenadas esféricas desse ponto.

SOLUÇÃO Da Equação 4, temos

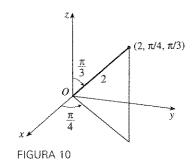
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e as Equações 3 fornecem

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
  $\phi = \frac{2\pi}{3}$ 

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Note que  $\theta \neq 3\pi/2$  porque  $y = 2\sqrt{3} > 0$ .) Assim, as coordenadas esféricas do ponto dado são  $(4, \pi/2, 2\pi/3)$ .



O L. ...

**EXEMPLO 6** Determine uma equação em coordenadas esféricas para o hiperbolóide de duas folhas com equação  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Substituindo as expressões da Equação 3 na equação dada, temos

$$\rho^{2} \operatorname{sen}^{2} \phi \cos^{2} \theta - \rho^{2} \operatorname{sen}^{2} \phi \operatorname{sen}^{2} \theta - \rho^{2} \cos^{2} \phi = 1$$

$$\rho^{2} [\operatorname{sen}^{2} \phi (\cos^{2} \theta - \operatorname{sen}^{2} \theta) - \cos^{2} \phi] = 1$$

$$\rho^{2} (\operatorname{sen}^{2} \phi \cos 2 \theta - \cos^{2} \phi) = 1$$

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Determine a equação em coordenadas retangulares da superfície cuja equação esférica é  $\rho = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$ .

SOLUÇÃO Das Equações 4 e 3, temos

ou

ou

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = \rho^{2} = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi = y$$
  
$$x^{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^{2} + z^{2} = \frac{1}{4}$$

que é a equação de uma esfera com centro  $(0, \frac{1}{2}, 0)$  e raio  $\frac{1}{2}$ .

EXEMPLO 8 🗆 Utilize o computador para desenhar um retrato do sólido que permanece quando um buraco de raio 3 é retirado do centro de uma esfera de raio 4.

SOLUÇÃO Para deixar as equações simples, vamos escolher o sistema de coordenadas de forma que o centro da esfera esteja na origem e o eixo do cilindro formado pelo furo seja o eixo z. Podemos usar tanto as coordenadas cilíndricas quanto as esféricas para descrever o sólido, mas a descrição fica muito mais simples se usarmos as coordenadas cilíndricas. Assim a equação do cilindro é r=3 e a equação da esfera é  $x^2+y^2+z^2=16$ , ou  $r^2+z^2=16$ . Os pontos do sólido são os que estão fora do furo e dentro da esfera, e portanto satisfazem as inequações

$$3 \le r \le \sqrt{16-z^2}$$

Para garantir que o computador desenhe somente as partes apropriadas dessa superfície, determinamos sua interseção resolvendo as equações r = 3 e  $r = \sqrt{16 - z^2}$ :

$$\sqrt{16-z^2}=3$$
  $\Rightarrow$   $16-z^2=9$   $\Rightarrow$   $z^2=7$   $\Rightarrow$   $z=\pm\sqrt{7}$ 

O sólido está entre  $z=-\sqrt{7}$  e  $z=\sqrt{7}$ , e então pedimos ao computador o gráfico da superfície com as seguintes equações e janela de inspeção:

$$r = 3$$
  $0 \le \theta \le 2\pi$   $-\sqrt{7} \le z \le \sqrt{7}$   $r = \sqrt{16 - z^2}$   $0 \le \theta \le 2\pi$   $-\sqrt{7} \le z \le \sqrt{7}$ 

O retrato resultante, mostrado na Figura 11, é exatamente o que queríamos.

☐ A maioria dos programas para gerar gráficos tridimensionais pode desenhar superfícies que são dadas em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Como o Exemplo 8 demonstra, isso é um modo muito conveniente para desenhar sólidos.

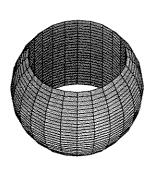


FIGURA 11

## Exercícios

| and . | O que são as coordenadas cilíndricas? Para que tipo d | de |
|-------|-------------------------------------------------------|----|
|       | superfícies elas fornecem uma descrição conveniente   | ?  |

- 2. O que são as coordenadas esféricas? Para que tipo de superfícies elas fornecem uma descrição conveniente?
- 3-8 □ Plote o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.
- 3.  $(2, \pi/4, 1)$
- 4.  $(1, 3\pi/2, 2)$
- **5**, (3, 0, -6)
- **6.**  $(1, \pi, e)$
- 7.  $(4, -\pi/3, 5)$
- **8.**  $(5, \pi/6, 6)$
- 9-12 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas.
- **9.** (1, −1, 4)
- **10.** (3, 3, -2)
- **11.**  $(-1, -\sqrt{3}, 2)$
- **12.** (3, 4, 5)
- u n a
- 13-18 🗆 Plote o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.
- **13.** (1, 0, 0)
- **14.**  $(3, 0, \pi)$

4 4 9 8 8

- **15.**  $(1, \pi/6, \pi/6)$
- **16.**  $(5, \pi, \pi/2)$
- **17.**  $(2, \pi/3, \pi/4)$ 2 y 4 A
- **18.**  $(2, \pi/4, \pi/3)$
- 19-22 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.
- **19.**  $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
- **20.**  $(0, \sqrt{3}, 1)$
- **21.** (0, -1, -1)
- **22.**  $(-1, 1, \sqrt{6})$
- 23-26 Converta de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas.
- **23.**  $(1, \pi/6, \sqrt{3})$
- **24.**  $(\sqrt{6}, \pi/4, \sqrt{2})$
- **25.**  $(\sqrt{3}, \pi/2, -1)$
- **26.**  $(4, \pi/8, 3)$ s 2 2
- 27-30 🗆 Converta de coordenadas esféricas para coordenadas cilíndricas.
- **27.** (2, 0, 0)
- **28.**  $(2\sqrt{2}, 3\pi/2, \pi/2)$
- **29.**  $(8, \pi/6, \pi/2)$
- **30.**  $(4, \pi/4, \pi/3)$
- 31-35 □ Descreva em palavras a superfície cuja equação é dada a seguir.
- **31**. r = 3

**32.**  $\rho = 3$ 

и и п е л

**33.**  $\phi = 0$ 

- **34.**  $\phi = \pi/2$
- **35.**  $\phi = \pi/3$
- **36.**  $\theta = \pi/3$
- 37-48 □ Identifique a superfície cuja equação é dada.
- 37.  $z = r^2$

- 38.  $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
- **39.**  $\rho \cos \phi = 2$
- **40.**  $\rho \sin \phi = 2$
- 41.  $r = 2 \cos \theta$
- **42.**  $\rho = 2 \cos \phi$
- **43.**  $r^2 + z^2 = 25$
- 44.  $r^2 2z^2 = 4$

- **45.**  $\rho^2(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 4$  **46.**  $\rho^2(\sin^2\phi 4\cos^2\phi) = 1$

- **48.**  $\rho^2 6\rho + 8 = 0$
- X 2 2 2 2 49-56 ☐ Escreva a equação (a) em coordenadas cilíndricas e (b) em coordenadas esféricas.
- **49.**  $z = x^2 + y^2$
- **50.**  $x^2 + v^2 + z^2 = 2$

**51.** x = 3

- **52.**  $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0$
- **53.**  $x^2 y^2 2z^2 = 4$
- **54.**  $v^2 + z^2 = 1$

- **55.**  $x^2 + y^2 = 2y$
- **56.**  $z = x^2 y^2$
- 57-82 □ Esboce o desenho do sólido descrito pelas desigualdades.
- **57.**  $r^2 \le z \le 2 r^2$
- **58.**  $0 \le \theta \le \pi/2$ ,  $r \le z \le 2$
- **59.**  $\rho \leq 2$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$
- **60.**  $2 \le \rho \le 3$ ,  $\pi/2 \le \phi \le \pi$
- **61.**  $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ ,  $0 \le \phi \le \pi/6$ ,  $0 \le \rho \le \sec \phi$
- **62.**  $0 \le \phi \le \pi/3$ ,  $\rho \le 2$
- 63. Uma concha cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno de 6 cm, e raio externo de 7 cm. Escreva as inequações que descrevem a concha em um sistema de coordenadas apropriado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas com respeito à concha.
- 64. (a) Ache as inequações que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas que escolheu.
  - (b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva as inequações que descrevem uma das metades.
- 65. Um sólido é constituído do conjunto de pontos que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e abaixo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ . Descreva o sólido utilizando inequações envolvendo coordenadas esféricas.
- 66. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar o sólido envolvido pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 5 - x^2 - y^2$ .
- 67. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar um silo constituído de um cilindro com raio 3 e altura 10 sobreposto por um hemisfério.
  - 68. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas às coordenadas esféricas  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  como se segue. Tomamos a origem como o centro da Terra e a orientação positiva do eixo z passa pelo pólo norte. A orientação positiva do eixo x passa pelo ponto onde o primeiro meridiano (o meridiano de Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Assim a latitude de  $P \in \alpha = 90^{\circ} - \phi^{\circ}$  e a longitude  $\in \beta = 360^{\circ} - \theta^{\circ}$ . Determine a distância no grande círculo entre Los Angeles (lat. 34.06° N, long. 118.25° W) e Montreal (lat. 45.50° N, long. 73,60° W). Tome o raio da Terra como sendo 3.960 mi. (Um grande círculo é a circunferência obtida pela interseção da esfera que representa o globo terrestre com um plano que passa pelo centro da Terra.)

## Projeto de Laboratório

## Famílias de Superfícies

Neste projeto descobriremos as formas que membros de famílias de superfícies podem tomar. Veremos o que acontece com as formas quando modificamos gradativamente algumas constantes.

1. Utilize um computador para analisar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como se altera a forma do gráfico variando os valores das constantes a e b?

- 2. Use um computador para analisar a família de superfícies  $z = x^2 + y^2 + cxy$ . Determine para que valor da constante c a superfície se modifica de um tipo de quádrica para outro.
- 3. Membros da família de superfícies dadas em coordenadas esféricas pela equação

$$\rho = 1 + 0.2 \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\phi$$

foram sugeridos como modelo para tumores e são chamados esferas com protuberâncias ou esferas enrugadas. Utilize um computador para estudar essa família de superfícies tomando m e n como inteiros positivos. Qual o papel dos valores de m e n na forma da superfície?

# 12 Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. Qual a diferença entre um vetor e um escalar?
- 2. Como adicionamos dois vetores geometricamente? Como os adicionamos algebricamente?
- 3. Se a é um vetor e c é um escalar, qual a relação entre ca e a geometricamente? Como determinar ca algebricamente?
- 4. Como determinar um vetor de um ponto a outro?
- 5. Como determinar o produto escalar a · b de dois vetores se você conhece seus comprimentos e o ângulo entre eles? E se você conhece seus componentes?
- 6. Para que o produto escalar é útil?
- Escreva as expressões para a projeção escalar e vetor projeção de b sobre a. Ilustre com um diagrama.
- 8. Como determinar o produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de dois vetores se você conhece suas normas e o ângulo entre eles? E se você conhece seus componentes?
- 9. Para que o produto vetorial é útil?
- 10. (a) Como calcular a área do paralelogramo definido pelos
  - (b) Como calcular o volume do paralelepípedo definido pelos vetores a, b e c?

- 11. Como determinar um vetor perpendicular a um plano?
- 12. Como determinar o ângulo entre dois planos que se cruzam?
- 13. Escreva as equações vetorial, paramétrica e simétrica para uma reta.
- 14. Escreva as equações normal e geral do plano.
- 15. (a) Como você sabe se dois vetores são paralelos?
  - (b) Como você sabe se dois vetores são perpendiculares?
  - (c) Como você sabe se dois planos são paralelos?
- 16. (a) Descreva um método para determinar se três pontos P, Q e R estão alinhados.
  - (b) Descreva um método para determinar se quatro pontos P, Q, R e S são coplanares.
- 17. (a) Como você determina a distância de um ponto a uma reta?
  - (b) Como você determina a distância de um ponto a um plano?
  - (c) Como você determina a distância entre retas?
- 18. O que é o traço de uma superfície? Como determiná-lo?
- 19. Escreva as equações na forma padrão dos seis tipos de quádricas.
- 20. (a) Escreva as equações para converter coordenadas cilíndricas para retangulares. Em que situação é recomendável utilizar coordenadas cilíndricas?
  - (b) Escreva as equações para converter coordenadas esféricas em retangulares. Em que situação é recomendável utilizar coordenadas esféricas?

#### **TESTES FALSO-VERDADEIRO**

Determine se as afirmações são falsas ou verdadeiras. Se verdadeira, explique a razão. Se falsa, explique por que ou forneça um contra-exemplo.

- 1. Para quaisquer vetores  $\mathbf{u} \in \mathbf{v} \in V_3$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .
- 2. Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V_3$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ .
- 3. Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V_3$ ,  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$ .
- **4.** Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V_3$  e qualquer escalar k,  $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$
- **5.** Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V_3$  e qualquer escalar k,  $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}.$
- **6.** Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V_3$ ,  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$

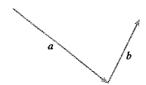
- 7. Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V_3$ ,  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$
- **8.** Para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $V_3$ ,  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$
- **9.** Para quaisquer vetores  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}$  em  $V_3$ ,  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ .
- 10. Para quaisquer vetores  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}$  em  $V_3$ ,  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .
- 11. O produto vetorial de dois vetores unitários é um vetor unitário.
- 12. A equação linear Ax + By + Cz + D = 0 representa uma reta no espaço.
- 13. O conjunto de pontos  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$  é uma circunferência.
- **14.** Se  $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$  e  $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ , então  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$ .

## **EXERCÍCIOS**

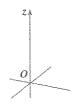
- 1. (a) Determine a equação da esfera de centro (1, -1, 2) e raio 3.
  - (b) Determine o centro e o raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 10z + 2 = 0$$

- 2. Copie os vetores da figura e utilize-os para desenhar os seguintes vetores.
  - (a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- (b)  $\mathbf{a} \mathbf{b}$
- (c)  $-\frac{1}{2}a$
- (d) 2a + b



3. Se u e v são vetores mostrados na figura, determine u · v e  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ . O sentido do vetor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é entrando ou saindo do papel?



4. Calcule a quantidade dada se

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{c} =$$

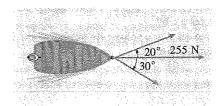
(a) 2a + 3b(c) a · b

- (b) **b**
- (d)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (e)  $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$
- (f)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (h)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- $(g) \in \times \in$ (i) compa b
- (j) proj<sub>a</sub> b
- (k) O ângulo entre a e b (com precisão até os graus)

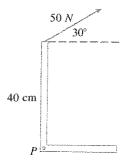
- **5.** Determine os valores de x tais que o vetor (3, 2, x) e  $\langle 2x, 4, x \rangle$  sejam ortogonais.
- 6. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a  $\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ .
- 7. Suponha que  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$ . Determine
  - (a)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
- (b)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
- (c)  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- (d)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
- 8. Mostre que, se a, b e c estão em  $V_3$ , então

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$

- 9. Determine o ângulo agudo entre duas diagonais de um cubo.
- **10.** Dados os pontos A(1, 0, 1), B(2, 3, 0), C(-1, 1, 4) e D(0, 3, 2), determine o volume do paralelepípedo com lados adjacentes AB, AC e AD.
- 11. (a) Determine um vetor perpendicular ao plano que passa pelos pontos A(1, 0, 0), B(2, 0, -1) e C(1, 4, 3).
  - (b) Determine a área do triângulo ABC.
- 12. Uma força constante  $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$  move um objeto ao longo de um segmento de reta de (1, 0, 2) a (5, 3, 8). Determine o trabalho realizado se a distância é medida em metros e a força em newtons.
- 13. Um barco é puxado para a praia usando duas cordas, como mostrado no diagrama. Se é necessária uma força de 255 N, determine a grandeza da força exercida em cada corda.



 Determine a módulo do torque no ponto P se uma força de 50 N é aplicada como mostrado.



15-17 □ Determine as equações paramétricas da reta.

- **15.** Passa pelo ponto (4, -1, 2) e (1, 1, 5)
- **16.** Passa pelos pontos (1, 0, -1) e é paralela à reta  $\frac{1}{3}(x 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$
- 17. Passa por (-2, 2, 4) e é perpendicular ao plano 2x y + 5z = 12

18-28 🗆 Determine a equação do plano que satisfaz as condições.

- **18.** Passa por (2, 1, 0) e é paralelo a x + 4y 3z = 1
- **19.** Passa por (3, -1, 1), (4, 0, 2), e (6, 3, 1)
- **20.** Passa por (1, 2, -2) e contém a reta x = 2t, y = 3 t, z = 1 + 3t

- 21. Determine o ponto no qual a reta com equações paramétricas x = 2 t, y = 1 + 3t, z = 4t, intercepta o plano 2x y + z = 2.
- **22.** Determine a distância da origem até a reta x = 1 + t, y = 2 t, z = -1 + 2t.
- 23. Determine se as retas dadas pelas equações simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

 $\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}$ 

são paralelas, simétricas ou concorrentes.

- 24. (a) Mostre que os planos x + y z = 1 e 2x 3y + 4z = 5 não são nem paralelos nem perpendiculares.
  - (b) Determine, com precisão até graus, o ângulo entre os planos.
- **25.** Determine a distância entre os planos 3x + y 4z = 2 e 3x + y 4z = 24.

26-34 □ Identifique e esboce o gráfico de cada superfície.

- **26.** x = 3
- 31.  $-4x^2 + y^2 4z^2 = 4$
- **27.** x = z
- **32.**  $y^2 + z^2 = 1 + x^2$
- **28.**  $y = z^2$
- $33. \quad 4x^2 + 4y^2 8y + z^2 = 0$
- **29.**  $x^2 = y^2 + 4z^2$
- **34.**  $x = y^2 + z^2 2y 4z + 5$
- **30.** 4x y + 2z = 4
- **35.** Um elipsóide é gerado pela rotação da elipse  $4x^2 + y^2 = 16$  em torno do eixo x. Determine uma equação do elipsóide.
- **36.** Uma superfície é constituída de todos os pontos *P* tais que a distância de *P* ao plano *y* = 1 é o dobro da distância de *P* ao ponto (0, −1, 0). Determine a equação dessa superfície e identifique-a.
- 37. As coordenadas cilíndricas de um ponto são  $(2\sqrt{3}, \pi/3, 2)$ . Determine suas coordenadas retangulares e esféricas.
- 38. As coordenadas retangulares de um ponto são (2, 2, -1). Determine suas coordenadas cilíndricas e esféricas.
- **39.** As coordenadas esféricas de um ponto são  $(8, \pi/4, \pi/6)$ . Determine suas coordenadas retangulares e cilíndricas.

40-43 □ Identifique a superfície cujas equações são dadas.

- **40.**  $\phi = \pi/4$
- 41.  $\theta = \pi/4$
- 42.  $r = \cos \theta$
- **43.**  $\rho = 3 \sec \phi$

44-48 ☐ Escreva a equação dada em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas.

- **44.**  $x^2 + y^2 = 4$
- **45.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- **46.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$
- 47. Escreva a equação da superfície obtida pela rotação da parábola z = 4y², x = 0, em torno do eixo z em coordenadas cilíndricas.
- **48.** Faça o esboço do sólido constituído por todos os pontos com coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  tal que  $0 \le \theta \le \pi/2$ ,  $0 \le \phi \le \pi/6$  e  $0 \le \rho \le 2$  cos  $\phi$ .

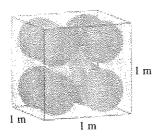


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

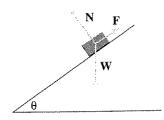


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

- 1. Cada lado de uma caixa cúbica mede 1 m. A caixa contém nove bolas de mesmo raio r. O centro de uma das bolas está no centro da caixa, e essa bola encosta em todas as outras oito bolas. Cada uma das oito bolas toca 3 lados da caixa. As bolas estão firmemente dispostas na caixa. (Veja a figura.) Determine o raio r. (Se você tiver problemas com este exercício, leia sobre a estratégia de resolver problemas em uso análogo na página 80 do Volume I.)
- 2. Seja B uma caixa sólida de comprimento L, largura W e altura H. Seja S o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância de no máximo 1 de algum ponto de B. Expresse o volume de S em função de L, W e H.
- 3. Seja L a reta obtida pela interseção dos planos cx + y + z = c e x cy + cz = -1, onde c é um número real.
  - (a) Determine as equações simétricas da reta L.
  - (b) Quando o número c varia, a reta L descreve uma superfície S. Determine a equação da curva resultante da interseção de S com o plano horizontal z = t (traço de S no plano z = t).
  - (c) Determine o volume do sólido limitado por S e pelos planos z = 0 e z = 1.
- 4. Um avião é capaz de viajar a 180 km/h em condições normais. O piloto decola para o norte guiado pela bússola do avião. Depois de 30 minutos de vôo, o piloto constata que, em decorrência do vento, viajou 80 km a 5° para o leste.
  - (a) Qual a velocidade do vento?
  - (b) Em que direção o piloto deveria ter encabeçado o avião para alcançar o destino pretendido?
- 5. Suponha que um bloco de massa m seja colocado em um plano inclinado, como mostrado na figura. A descida do plano inclinado pelo bloco é reduzida pela força de atrito; se θ não for muito grande, o atrito impedirá o deslocamento para baixo do bloco. As forças que agem sobre o bloco são seu peso W, onde | W | = mg (g é a aceleração da gravidade); a força normal N, (a componente normal da força reacionária no plano do bloco) onde | N | = n; e a força F devida ao atrito, que age paralelamente ao plano inclinado, no sentido contrário ao movimento. Se o bloco estiver parado e θ for aumentado, | F | aumentará até atingir seu valor máximo, além do qual o bloco começará a deslizar. Nesse ângulo θ<sub>s</sub>, pode ser observado que | F | é proporcional a n. Então, quando | F | é máximo, podemos dizer que | F | = μ<sub>s</sub>n, onde μ<sub>s</sub> é chamado coeficiente de atrito estático e depende dos materiais que estão em contato.
  - (a) Observe que N + F + W = 0 e deduza que  $\mu_s = tg(\theta_s)$ .
  - (b) Suponha que, para θ > θ<sub>s</sub>, uma força externa H seja aplicada ao bloco, horizontalmente da esquerda para a direita, e seja | H | = h. Se h for pequeno, o bloco poderá ainda deslizar; se h for suficientemente grande, o bloco subirá o plano inclinado. Seja h<sub>min</sub> o menor valor de h que permita ao bloco permanecer parado (logo, | F | é máximo). Escolhendo os eixos coordenados de modo que F esteja na direção do eixo x, determine para cada força atuante seus componentes paralelo e perpendicular ao plano inclinado e mostre que

$$h_{\min} \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta = n$$

 $h_{\min}\cos\theta + \mu_{s}n = mg \sin\theta$ 

(c) Mostre que

$$h_{\min} = mg \operatorname{tg}(\theta - \theta_s)$$

Isso parece razoável? Parece razoável para  $\theta = \theta_s$ ? E quando  $\theta \rightarrow 90^{\circ}$ ? Explique.

(d) Seja  $h_{max}$  o maior valor de h que permita ao bloco permanecer parado. (Nesse caso, qual o sentido de F?) Mostre que

$$h_{\text{max}} = mg \, \operatorname{tg}(\theta + \theta_s)$$

Essa equação parece razoável? Explique.

# 13

# Funções Vetoriais

O cálculo de funções a valores vetoriais é usado na Seção 13.4 para provar as leis de Kepler. Essas leis descrevem o movimento dos planetas em torno do Sol e também se aplicam à órbita de um satélite em torno da Terra, como o Telescópio Espacial Hubble.

As funções que usamos até aqui eram funções reais a valores reais. Estudaremos agora as funções cujos valores são vetores, pois tais funções serão úteis para descrever superfícies e curvas espaciais. Usaremos também funções vetoriais para descrever o movimento de objetos no espaço. Em particular, elas serão úteis para derivar as leis de Kepler sobre o movimento planetário.

# **13.1** Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma função vetorial, ou função de valor vetorial, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Em particular, estamos interessados nas funções  $\bf r$  cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que para todo número t no domínio de  $\bf r$  existe um único vetor de  $V_3$  denotado por  $\bf r(t)$ . Se f(t), g(t) e h(t) são os componentes do vetor  $\bf r(t)$ , então f, g e h são funções de valor real chamadas funções componentes de  $\bf r$  e escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), q(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + q(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como na maioria das aplicações a variável independente  $\epsilon$  o tempo, utilizaremos a letra t para indicá-la.

EXEMPLO 1 C Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t} \rangle$$

então as funções componentes são

$$f(t) = t^3$$
  $g(t) = \ln(3 - t)$   $h(t) = \sqrt{t}$ 

Pela convenção usual, o domínio de **r** é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão  $\mathbf{r}(t)$  está definida. As expressões  $t^3$ ,  $\ln(3-t)$  e  $\sqrt{t}$  estão todas definidas para 3-t>0 e  $t\geq 0$ . Portanto o domínio de **r** é o intervalo [0,3).

O limite de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como se segue.

Se 
$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$
, então 
$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Da mesma forma, poderíamos escrever a definição usando os  $\varepsilon$ - $\delta$  (ver o Exercício 43). Os limites da função vetorial obedecem às mesmas regras dos limites da função real (ver o Exercício 41).

EXEMPLO 2 
$$\Box$$
 Determine  $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$  onde  $\mathbf{r}(t) = (1+t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{k}$ .

SOLUÇÃO De acordo com a Definição 1, o limite de  $\bf r$  é o vetor cujos componentes são os limites das funções componentes de  $\bf r$ :

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} (1 + t^3)\right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} t e^{-t}\right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] \mathbf{k}$$
$$= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(pela Equação 3.4.2)}$$

 $\Box$  Se  $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ , essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor  $\mathbf{r}(t)$  se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor  $\mathbf{L}$ .

Uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é contínua em a se

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que  $\mathbf{r}$  é contínua em a se e somente se suas funções componentes f, g e h são contínuas em a.

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais

e t varia no intervalo I é chamado **curva espacial**. As equações em (2) são denominadas **equações paramétricas de** C e t é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em C como tendo sido traçado pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é (f(t), g(t), h(t)). Se consideramos a função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então  $\mathbf{r}(t)$  é um vetor de posição do ponto P(f(t), g(t), h(t)) sobre C. Assim, qualquer função vetorial  $\mathbf{r}$  define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento  $\mathbf{r}(t)$ , como mostrado na Figura 1.

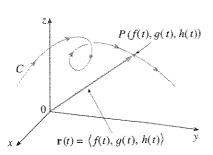


FIGURA 1 C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$ .

EXEMPLO 3 

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t$$
  $y = 2 + 5t$   $z = -1 + 6t$ 

que são reconhecidas da Equação 12.5.2 como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto (1, 2, -1) e paralela ao vetor  $\langle 1, 5, 6 \rangle$ . Outro modo de ver é observar que a função pode ser escrita como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ , onde  $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$  e  $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$  e esta é a equação vetorial da reta dada pela Equação 12.5.1.

Curvas planas podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva dada pelas equações paramétricas  $x = t^2 - 2t$  e y = t + 1 (ver o Exemplo 1 na Seção 10.1) pode ser descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$$

onde  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  e  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ .

EXEMPLO 4 

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$r(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t$$
  $y = \sin t$   $z = t$ 

Como  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , a curva precisa pertencer ao cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$ . O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto (x, y, 0), que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  no plano xy (veja o Exemplo 2 da Seção 10.1). Como z = t, a curva faz uma espiral para cima ao redor de um cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada hélice.

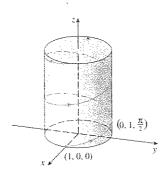


FIGURA 2

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas espirais. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucléico, material genético de células vivas). Em 1953 James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Nos Exemplos 3 e 4 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. Nos dois exemplos a seguir daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para determinar suas equações paramétricas.

EXEMPLO 5 — Determine a equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto P(1, 3, -2) ao ponto Q(2, -1, 3).

SOLUÇÃO Na Seção 12.5 encontramos uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor  $\mathbf{r}_0$  à extremidade do vetor  $\mathbf{r}_1$ .

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

(Veja a equação 12.5.4.) Aqui tomamos  ${\bf r}_0=<1,3,-2>$  e  ${\bf r}_1=<2,-1,3>$  para obter uma equação para o segmento de reta de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t) \langle 1, 3, -2 \rangle + t \langle 2, -1, 3 \rangle$$
  $0 \le t \le 1$ 

ou

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle$$
  $0 \le t \le 1$ 

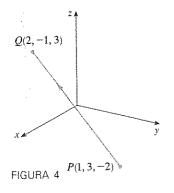
10

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1+t$$
  $y = 3-4t$   $z = -2+5t$   $0 \le t \le 1$ 

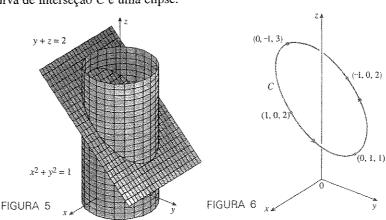
EXEMPLO 6  $\Box$  Determine a equação vetorial que representa a curva obtida pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano y + z = 2.

SOLUÇÃO A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra que a curva de interseção C é uma elipse.



☐ A Figura 4 mostra o segmento de reta *PQ* do Exemplo 5.

FIGURA 3



A projeção de C sobre o plano xy é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , z = 0. Assim sabemos do Exemplo 2 da Seção 10.1 que podemos escrever

$$x = \cos t$$
  $y = \sin t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \sin t$$

Escrevendo as equações paramétricas para C, obtemos

$$x = \cos t$$
  $y = \sin t$   $z = 2 - \sin t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \,\mathbf{i} + \sin t \,\mathbf{j} + (2 - \sin t) \,\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Essa equação é chamada parametrização da curva C. As setas na Figura 6 indicam o sentido em que a curva C é percorrida quando o valor do parâmetro t cresce.

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de serem desenhadas que as curvas planas. Para uma representação mais acurada precisamos utilizar alguma tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$x = (4 + \sin 20t) \cos t$$
  $y = (4 + \sin 20t) \sin t$   $z = \cos 20t$ 

Essa curva é denominada **toróide espiral**, porque sua envoltória é um toro. Outra curva interessante, o **nó trevo**, com equações

$$x = (2 + \cos 1.5t) \cos t$$
  $y = (2 + \cos 1.5t) \sin t$   $z = \sin 1.5t$ 

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer dessas curvas a mão.

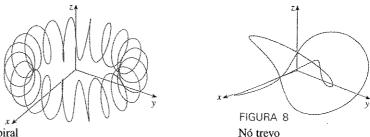


FIGURA 7 xx FIGURA 8

Toróide espiral Nó trevo

Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas es

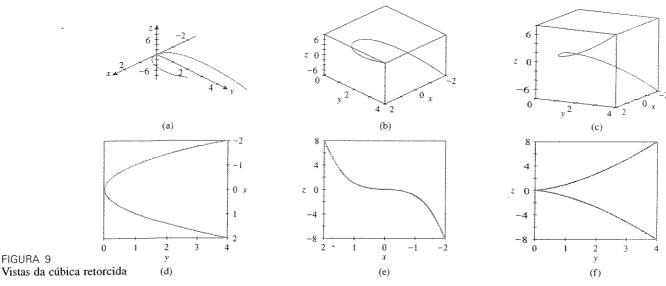
Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, a ilusão óptica torna difícil entender a forma real da curva. (Isso é verdadeiro em especial na Figura 8. Veja o Exercício 42.) O próximo exemplo mostra como tratar esse problema.

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ . Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

SOLUÇÃO Começaremos plotando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas  $x=t, y=t^2, z=t^3$  para  $-2 \le t \le 2$ . O resultado é apresentado na Figura 9(a), mas enxergá-la através desse único gráfico é muito difícil, em virtude da natureza da curva. A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.

FIGURA 9

FIGURA 10



Temos uma melhor idéia sobre a curva quando a observamos de diversos ângulos. A parte (c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista. As partes (d), (e) e (f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa. Em particular, a parte (d) mostra a vista de cima da caixa. A curva obtida é a projeção da curva no plano xy, a parábola  $y = x^2$ . A parte (e) exibe a projeção no plano xz, a curva cúbica  $z = x^3$ . Fica claro por que essa curva é chamada cúbica retorcida.

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 se desenvolve em uma superfície cilíndrica parabólica  $y = x^2$ . (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas, x = t e  $y = t^2$ .) A Figura 10 mostra a superfície e a cúbica retorcida, sobrepostas, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre a superfície cilíndrica. Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular (veja a Figura 2).

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica  $z = x^3$ . Então podemos ver a curva como a interseção das duas superfícies cilíndricas  $y = x^2$  e  $z = x^3$ . (Veja a Figura 11.)

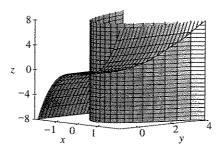
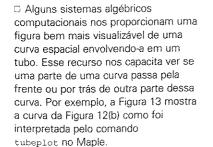
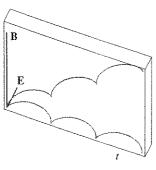


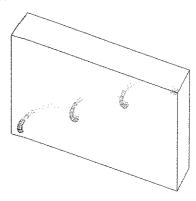
FIGURA 11



Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial em Ciências é a trajetória de uma partícula com carga positiva nos campos elétrico e magnético E e B orientados ortogonalmente. Dependendo da velocidade inicial dada com a partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a ciclóide

estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)] ou é uma curva cuja projeção é a tricóide investigada no Exercício 38 da Seção 10.1 [Figura 12 (b)].





(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen } t, 1 - \cos t, t \rangle$ 

(b)  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$ 

FIGURA 13

FIGURA 12 Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

> Para mais detalhes relativos à física envolvida e animações das trajetórias das partículas, veja os seguintes endereços na web:

- lompado.uah.edu/Links/CrossedFields.html
- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

#### 13.1 Exercícios

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$$

2. 
$$\mathbf{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\mathbf{i} + \sin t \,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\mathbf{k}$$

3-6 □ Calcule os limites.

3. 
$$\lim_{t \to \infty} \langle \cos t, \sin t, t \ln t \rangle$$

**4.** 
$$\lim_{t \to 0} \left\langle \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1 + t} - 1}{t}, \frac{3}{1 + t} \right\rangle$$

5. 
$$\lim_{t \to 1} \left( \sqrt{t+3} \, \mathbf{i} + \frac{t-1}{t^2-1} \, \mathbf{j} + \frac{\lg t}{t} \, \mathbf{k} \right)$$

**6.** 
$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \arctan t, e^{-2t}, \frac{\ln t}{t} \right\rangle$$

7-14 🗆 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com seta a direção na qual o parâmetro cresce.

7. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^4 + 1, t \rangle$$

8. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$$

9. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \sin 2t \rangle$$
 10.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t \rangle$ 

10. 
$$\mathbf{r}(t) = (1 + t, 3t, -t)$$

**11.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t \rangle$$

12. 
$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$$

**13.** 
$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^4 \mathbf{j} + t^6 \mathbf{k}$$

14. 
$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + \sqrt{2} \cos t \mathbf{k}$$

d 9 त 9 ट स्<u>व</u>

15-18 □ Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga  $P \in Q$ .

**15.** 
$$P(0, 0, 0)$$
,  $Q(1, 2, 3)$ 

**16.** 
$$P(1, 0, 1), Q(2, 3, 1)$$

**17.** 
$$P(1, -1, 2), Q(4, 1, 7)$$

**18.** 
$$P(-2, 4, 0), Q(6, -1, 2)$$

19-24 🗆 Case as equações paramétricas com os gráficos (identificados com números de I-VI). Explique a razão de sua escolha.

**19.** 
$$x = \cos 4t$$
,  $y = t$ ,  $z = \sin 4t$ 

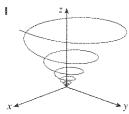
**20.** 
$$x = t$$
,  $y = t^2$ ,  $z = e^{-t}$ 

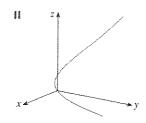
**21.** 
$$x = t$$
,  $y = 1/(1 + t^2)$ ,  $z = t^2$ 

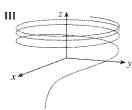
**22.** 
$$x = e^{-t} \cos 10t$$
,  $y = e^{-t} \sin 10t$ ,  $z = e^{-t}$ 

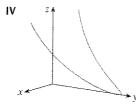
**23.** 
$$x = \cos t$$
,  $y = \sin t$ ,  $z = \sin 5t$ 

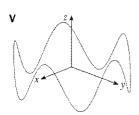
**24.** 
$$x = \cos t$$
,  $y = \sin t$ ,  $z = \ln t$ 

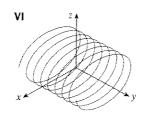












- **25** Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t \cos t$ ,  $y = t \operatorname{sen} t$ ,  $z = t \operatorname{est\acute{a}}$  no  $z^2 = x^2 + y^2$ , e use esse fato para esboçar a curva.
- **26.** Mostre que a curva com equações paramétricas x = sen t,  $y = \cos t$ ,  $z = \sin^2 t$  é a curva de interseção das superfícies  $z = x^2 e x^2 + y^2 = 1$ . Use esse fato para esboçar a curva.
- 💯 27-30 🗆 Utilize computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a garantir que a visualização é a verdadeira.

27. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t^2 \rangle$$

**28.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^4 - t^2 + 1, t, t^2 \rangle$$

**29.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$$

**30.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t \rangle$$

- 31. Trace a curva com equações paramétricas  $x = (1 + \cos 16t) \cos t$ ,  $y = (1 + \cos 16t) \sin t$ ,  $z = 1 + \cos 16t$ . Explique sua aparência mostrando que a
- curva se desenvolve em um cone.

32. Trace a curva com equações paramétricas 
$$x = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t} \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t} \sin t$$
$$z = 0.5 \cos 10t$$

Explique a aparência da curva mostrando que ela se desenvolve em uma esfera.

33. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t^2$ , y = 1 - 3t,  $z = 1 + t^3$  passa pelos pontos (1, 4, 0) e (9, -8, 28)e não passa pelo ponto (4, 7, -6).

34-36 🗆 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela interseção de duas superfícies.

**34.** O cilindro 
$$x^2 + y^2 = 4$$
 e a superfície  $z = xy$ 

**35.** O cone 
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
 e o plano  $z = 1 + y$ 

**36.** O parabolóide 
$$z = 4x^2 + y^2$$
 e o cilindro parabólico  $y = x^2$ 

- 37. Tente esboçar à mão a curva obtida pela interseção do cilindro circular  $x^2 + y^2 = 4$  com o cilindro parabólico  $z = x^2$ . Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.
- **38.** Tente esboçar à mão a interseção do cilindro parabólico  $y = x^2$ com a metade superior do elipsóide  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ . Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize o computador para traçá-la.
  - 39. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão se colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão se colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição no mesmo instante. Suponha que as trajetórias das duas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle$$
  $\mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$ 

para  $t \ge 0$ . As partículas colidem?

40. Duas partículas viajam ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$$
  $\mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$ 

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

41. Suponha que u e v sejam funções vetoriais que possuem limites quando  $t \rightarrow a$  e seja c uma constante. Prove as seguintes propriedades de limites.

(a) 
$$\lim_{t \to a} \left[ \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \right] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$$

(b) 
$$\lim_{t \to c} c \mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$$

(c) 
$$\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$$

(d) 
$$\lim_{t\to a} [\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{u}(t)\times \lim_{t\to a} \mathbf{v}(t)$$

42. A visão do nó trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1.5t) \cos t$$
  $y = (2 + \cos 1.5t) \sin t$ 

$$z = \sin 1.5t$$

para esboçar a curva à mão vista de cima deixando em branco os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize o computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare

com seu desenho. Trace a curva sobre outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se plotar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando tubleplat no Maple.)

855

**43.** Mostre que  $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$  se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta > 0$  tal que  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$  para todo  $0 < |t - a| < \delta$ .

# 13.2

# Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Adiante, neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.



#### Derivadas

A **derivada**  $\mathbf{r}'$  de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definida do mesmo modo como foi feito para as funções reais:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se o limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos  $P \in Q$  têm vetores de posição  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r}(t+h)$ , então  $\overrightarrow{PQ}$  representa o vetor  $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ , que pode ser visto como o vetor secante. Se h>0, o múltiplo escalar  $(1/h)(\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t))$  tem a mesma direção e sentido que  $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ . Quando  $h\to 0$ , parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão dizemos que o vetor  $\mathbf{r}'(t)$  é chamado **vetor tangente** à curva definida por  $\mathbf{r}$  no ponto P, desde que exista  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor  $\mathbf{r}'(t)$ . Teremos ocasião de considerar o **versor tangente**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

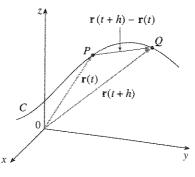
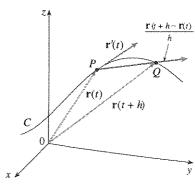


FIGURA 1



(b) Vetor tangente

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial r por diferenciação de cada componente de r.

[2] Teorema Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , onde  $f, g \in h$  são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

Prova

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \left\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \right\rangle - \left\langle f(t), g(t), h(t) \right\rangle \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle f'(t), g'(t), h'(t) \right\rangle$$

#### EXEMPLO 1

- (a) Determine a derivada de  $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} = te^{-t}\mathbf{j} + \text{sen } 2t \mathbf{k}$ .
- (b) Encontre o versor tangente no ponto onde t = 0.

#### **SOLUÇÃO**

(a) De acordo com o Teorema 2, diferenciando cada componente de r, obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + (1-t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\mathbf{k}$$

(b) Como  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , o versor tangente no ponto (1, 0, 0) é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

**EXEMPLO 2**  $\square$  Para a curva  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + (2 - t) \mathbf{j}$ , determine  $\mathbf{r}'(t)$  e desenhe o vetor de posição  $\mathbf{r}(1)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$ .

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$
 e  $\mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$ 

857

Ø

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro da equação  $x = \sqrt{t}$ , y = 2 - t nos dá  $y = 2 - x^2$ ,  $x \ge 0$ . Na Figura 2 desenhamos o vetor de posição  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  começando na origem e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$ , começando no ponto correspondente (1, 1).

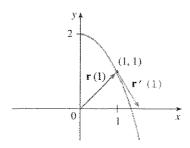


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2\cos t$$
  $y = \sin t$   $z = t$ 

no ponto  $(0, 1, \pi/2)$ .

SOLUÇÃO A equação vetorial da hélice é  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, \sin t, t \rangle$ , de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2 \operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto  $(0, 1, \pi/2)$  é  $t = \pi/2$ , e o vetor tangente é  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$ . A reta tangente passa por  $(0, 1, \pi/2)$  e é paralela ao vetor  $\langle -2, 0, 1 \rangle$ , então, pela Equação 12.5.2, suas equações paramétricas são

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$

Do mesmo modo para as funções reais, a **derivada segunda** da função vetorial  $\mathbf{r}$  é a derivada de  $\mathbf{r}'$ , ou seja,  $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$ . Por exemplo, a derivada segunda da função do Exemplo 3 é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

Uma curva dada por uma função vetorial  $\mathbf{r}(t)$  em um intervalo I é denominada **lisa** se  $\mathbf{r}'$  for contínua e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  (exceto possivelmente nos pontos terminais de I). Por exemplo, a hélice é lisa porque  $\mathbf{r}'(t)$  é sempre diferente de  $\mathbf{0}$ .

EXEMPLO 4  $\Box$  Determine se a parábola semicúbica  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t^3, t^2 \rangle$  é lisa. SOLUÇÃO Como

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, 2t \rangle$$

temos  $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$ , e então a curva não é lisa. O ponto que corresponde a t = 0 é (1, 0), e podemos ver do gráfico na Figura 4 que existe um bico agudo, chamado **cúspide**, em (1, 0). Qualquer curva com esse tipo de comportamento — uma mudança abrupta de direção — não é lisa.

Uma curva, como a semicúbica, que é feita de um número finito de pedaços lisos, é chamada lisa por partes.

□ A hélice e a reta tangente do
 Exemplo 3 estão mostradas na Figura 3.

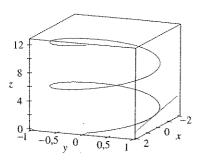


FIGURA 3

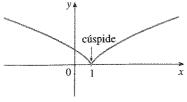


FIGURA 4 A curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t^3, t^2 \rangle$  não é lisa.

## Regras de Diferenciação

O próximo teorema mostra que as fórmulas de diferenciação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

 $\boxed{3}$  Teorema Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f, uma função real. Então,

1. 
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

2. 
$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

3. 
$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

4. 
$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

5. 
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

**6.** 
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$
 (Regra da Cadeia)

Esse teorema pode ser provado ou usando-se diretamente a Definição 1 ou empregando-se o Teorema 2 e as fórmulas de diferenciação correspondentes para a função real. As provas das Fórmulas 1, 2, 3, 5 e 6 são deixadas como exercício.

Prova da Fórmula 4 Seja

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

Então

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$$

e as regras ordinárias de diferenciação do produto fornecem

$$\frac{d}{dt} \left[ \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left[ f_i(t)g_i(t) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[ f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f'_i(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g'_i(t)$$

$$= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

200

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Mostre que, se  $|\mathbf{r}(t)| = c$  (uma constante), então  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  para todo t.

SOLUÇÃO Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

$$0 = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Então,  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ , o que implica que  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$ .

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  é sempre perpendicular ao vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ .

## Integrais

A integral definida de uma função vetorial contínua  $\mathbf{r}(t)$  pode ser estabelecida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de  $\mathbf{r}$  como a integral de suas funções componentes f, g e h como se segue. (Utilizamos a notação do Capítulo 5 do Volume I.)

$$\int_{a}^{b} \mathbf{r}(t) dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_{i}^{*}) \Delta t$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n} f(t_{i}^{*}) \Delta t \right) \mathbf{i} + \left( \sum_{i=1}^{n} g(t_{i}^{*}) \Delta t \right) \mathbf{j} + \left( \sum_{i=1}^{n} h(t_{i}^{*}) \Delta t \right) \mathbf{k} \right]$$

Então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt\right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt\right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt\right) \mathbf{k}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente da mesma.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como se segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde **R** é uma primitiva de **r**, ou seja,  $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ . Usaremos a notação  $\int \mathbf{r}(t) dt$  para as integrais indefinidas (primitivas).

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Se  $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + 2t \, \mathbf{k}$ , então

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left( \int 2 \cos t \, dt \right) \mathbf{i} + \left( \int \sin t \, dt \right) \mathbf{j} + \left( \int 2t \, dt \right) \mathbf{k}$$
$$= 2 \sin t \, \mathbf{i} - \cos t \, \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde C é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t) dt = \left[ 2 \sin t \, \mathbf{i} - \cos t \, \mathbf{j} + t^2 \, \mathbf{k} \right]_0^{\pi/2} = 2 \, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4} \, \mathbf{k}$$

# 13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ .

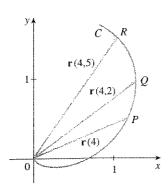
(a) Desenhe os vetores r(4,5) - r(4) e r(4,2) - r(4).

(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4,5) - \mathbf{r}(4)}{0,5}$$
 e  $\frac{\mathbf{r}(4,2) - \mathbf{r}(4)}{0,2}$ 

(c) Escreva a expressão para r'(4) e para seu versor da tangente T(4).

(d) Desenhe o vetor T(4).



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$ ,  $0 \le t \le 2$ , e desenhe os vetores  $\mathbf{r}(1)$ ,  $\mathbf{r}(1,1)$  e  $\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)$ .

(b) Desenhe o vetor r'(1) começando em (1, 1) e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1,1)-\mathbf{r}(1)}{0,1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção.

3-8 0

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

(b) Determine  $\mathbf{r}'(t)$ .

(c) Desenhe o vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  para o valor dado de t.

3.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$ ,  $t = \pi/4$ 

**4.**  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t} \rangle, t = 1$ 

**5.**  $\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t=1$ 

**6.**  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}, \ t = 0$ 

7.  $\mathbf{r}(t) = e^{t}\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j}, \quad t = 0$ 

8.  $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t \, \mathbf{i} + 3 \cos t \, \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$ 

9~16 □ Determine a derivada da função vetorial.

**9.**  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1-t, \sqrt{t} \rangle$ 

10.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 3t, t, \sin 3t \rangle$ 

11.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t} \mathbf{k}$ 

12.  $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t \, \mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2} \, \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 

13.  $\mathbf{r}(t) = e^{t^2} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t) \mathbf{k}$ 

14.  $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t \,\mathbf{i} + b \sin^3 t \,\mathbf{j} + c \cos^3 t \,\mathbf{k}$ 

**15.**  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t \, \mathbf{b} + t^2 \, \mathbf{c}$ 

**16.**  $\mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t \, \mathbf{c})$ 

17-20  $\Box$  Determine o versor tangente  $\mathbf{T}(t)$  no ponto com valor de parâmetro t dado.

17.  $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t \rangle, t = 1$ 

**18.**  $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$ 

**19.**  $\mathbf{r}(t) = \cos t \, \mathbf{i} + 3t \, \mathbf{j} + 2 \, \sin 2t \, \mathbf{k}, \quad t = 0$ 

**20.**  $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t \, \mathbf{i} + 2 \cos t \, \mathbf{j} + \tan t \, \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$ 

21. Se  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ , encontre  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{r}(1)$ ,  $\mathbf{r}''(t)$  e  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ .

**22.** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$ , determine  $\mathbf{T}(0)$ ,  $\mathbf{r}''(0)$  e  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ .

23-26 □ Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

**23.**  $x = t^5$ ,  $y = t^4$ ,  $z = t^3$ ; (1, 1, 1)

**24.**  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^2 + 1$ , z = t + 1; (-1, 1, 1)

**25.**  $x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$ ,  $z = e^{-t}$ ; (1, 0, 1)

**26.**  $x = \ln t$ ,  $y = 2\sqrt{t}$ ,  $z = t^2$ ; (0, 2, 1)

27-28 Estabeleça as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

**27.** x = t,  $y = \sqrt{2} \cos t$ ,  $z = \sqrt{2} \sin t$ ;  $(\pi/4, 1, 1)$ 

**28.**  $x = \cos t$ ,  $y = 3e^{2t}$ ,  $z = 3e^{-2t}$ ; (1, 3, 3)

a d 4 4 5 2 4 5 5 d 6 4

29. Determine se as curvas são lisas.

(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^4, t^5 \rangle$  (b)  $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + t, t^4, t^5 \rangle$ 

(c)  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \sin^3 t \rangle$ 

**30.** (a) Determine o ponto de interseção das retas tangentes à curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$  nos pontos t = 0 e t = 0,5.

(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$  se encontram na origem. Determine o ângulo de interseção destas com precisão de graus.

32. Em que ponto as curvas  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$  se encontram? Encontre o ângulo entre elas no ponto de encontro, com precisão de graus.

33-38 □ Calcule a integral.

**33.** 
$$\int_0^1 (16t^3 \mathbf{i} - 9t^2 \mathbf{j} + 25t^4 \mathbf{k}) dt$$

**34.** 
$$\int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2} \mathbf{j} + \frac{2t}{1+t^2} \mathbf{k} \right) dt$$

**35.** 
$$\int_0^{\pi/2} (3 \sin^2 t \cos t \, \mathbf{i} + 3 \sin t \cos^2 t \, \mathbf{j} + 2 \sin t \cos t \, \mathbf{k}) \, dt$$

**36.** 
$$\int_{1}^{4} \left( \sqrt{t} \, \mathbf{i} + t e^{-t} \, \mathbf{j} + \frac{1}{t^{2}} \, \mathbf{k} \right) dt$$

37. 
$$\int (e^t \mathbf{i} + 2t \, \mathbf{j} + \ln t \, \mathbf{k}) \, dt$$

**38.** 
$$\int (\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j} + t \mathbf{k}) dt$$

**39.** Determine  $\mathbf{r}(t)$  se  $\mathbf{r}'(t) = t^2 \mathbf{i} + 4t^3 \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$ .

**40.** Determine 
$$\mathbf{r}(t)$$
 se  $\mathbf{r}'(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .

41. Prove a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Prove a Fórmula 3 do Teorema 3.

- 43. Prove a Fórmula 5 do Teorema 3.
- 44. Prove a Fórmula 6 do Teorema 3.
- **45.** Se  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{i} 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ determine  $(d/dt) [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$ .
- 46. Se u e v são funções vetoriais no Exercício 45, encontre  $(d/dt) [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)].$
- 47. Mostre que se r é uma função vetorial tal que exista r", então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

**48.** Determine uma expressão para  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$ .

Se 
$$\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$$
, mostre que  $\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ .

[Dica:  $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ ]

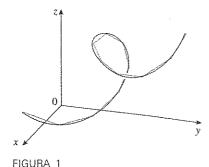
- **50.** Se uma curva tem a propriedade de o vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$ , mostre que essa curva se desenvolve em uma esfera com o centro na origem.
- **51.** Se  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$ , mostre que  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$

# Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas  $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$ , como o limite do comprimento da poligonal inscrita, e, para o caso quando f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

1 
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, a \le t \le b$ , ou, o que é equivalente, equações paramétricas x = f(t), y = g(t), z = h(t), onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva não se intercepta quando o parâmetro t cresce, podemos mostrar que



O comprimento de uma curva espacial é o limite do comprimento das poligonais inscritas.

 $L = \int_{a}^{b} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$ 2

$$= \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^{2}} dt$$

Note que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas (1) e (2) podem ser escritos de forma mais compacta:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

3

porque, para as curvas planas  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

enquanto para as curvas espaciais  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

**EXEMPLO 1**  $\square$  Calcule o comprimento do arco de curva da hélice circular de equação  $\mathbf{r}(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}$  do ponto (1, 0, 0) até o ponto  $(1, 0, 2\pi)$ .

SOLUÇÃO Como  $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , temos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de (1,0,0) até  $(1,0,2\pi)$  é descrito pelo parâmetro percorrendo o intervalo  $0 \le t \le 2\pi$ ; assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

(3

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad 1 \leq t \leq 2$$

poderia ser representada também pela função

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \quad 0 \le u \le \ln 2$$

onde a relação entre os parâmetros t e u é dada por  $t = e^u$ . Podemos ver que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva C. Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de C, obteríamos o mesmo resultado obtido usando-se as Equações 4 ou 5. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é utilizada para calcular o comprimento de uma curva lisa por trechos, o comprimento do arco é independente da parametrização empregada.

Suponhamos agora que C seja uma curva lisa por trechos dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, a \le t \le b$ , onde pelo menos uma das f, g, h seja injetora em (a, b). Definiremos a função comprimento de arco por s

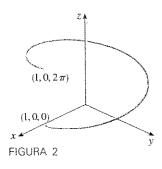
$$[6] s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

Então, s(t) é o comprimento da parte de C entre  $\mathbf{r}(a)$  e  $\mathbf{r}(t)$ . (Veja a Figura 3.) Se diferenciarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

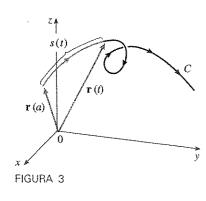
$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

É frequentemente útil parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco, pois o comprimento de arco aparece naturalmente da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva  $\mathbf{r}(t)$  já está dada em termos de um parâmetro t e s(t) é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos resolver para t como uma função de s: t = t(s). A curva pode ser então reparametrizada em termos de s

☐ A Figura 2 mostra o arco de hélice cujo comprimento é calculado no Exemplo 1.



□ Curvas lisas por trechos foram introduzidas na Seção 13.2.



863

substituindo-se o parâmetro t:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ . Assim, se s = 3, por exemplo,  $\mathbf{r}(t(3))$  é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

EXEMPLO 2  $\square$  Reparametrize a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}$  utilizando a medida de comprimento de arco de (1, 0, 0) na direção de crescimento de t.

SOLUÇÃO O ponto inicial (1, 0, 0) corresponde ao valor do parâmetro t = 0. Do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

e assim

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t$$

Portanto,  $t = s/\sqrt{2}$ , e a reparametrização pedida é obtida substituindo-se o valor de t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos(s/\sqrt{2})\mathbf{i} + \sin(s/\sqrt{2})\mathbf{j} + (s/\sqrt{2})\mathbf{k}$$

#### Curvatura

Se C é uma curva lisa definida por uma função vetorial  $\mathbf{r}$ , então  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Lembremo-nos de que o versor da tangente  $\mathbf{T}(t)$  é dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Da Figura 4, podemos ver que  $\mathbf{T}(t)$  muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.

A curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do versor da tangente com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

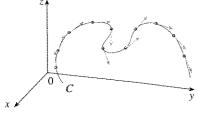


FIGURA 4 Versor da tangente em pontos igualmente espaçados de  ${\cal C}$ .

#### 8 Definição A curvatura de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde T é o versor da tangente.

A curvatura é simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usamos a Regra da Cadeia (Teorema 13.2.3, Fórmula 6) para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \mathbf{e} \quad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Mas  $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$  da Equação 7, e então

$$\kappa(t) = \frac{\left| \mathbf{T}'(t) \right|}{\left| \mathbf{r}'(t) \right|}$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Mostre que a curvatura de um círculo de raio  $a \in 1/a$ .

SOLUÇÃO Podemos tomar o círculo com centro na origem, e parametrizado como

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

Assim

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$$
 e  $|\mathbf{r}'(t)| = a$ 

portanto

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t \,\mathbf{i} + \cos t \,\mathbf{j}$$

е

$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \,\mathbf{i} - \sin t \,\mathbf{j}$$

Isso nos dá  $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ ; então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Apesar de a Fórmula 9 ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema que se segue:

10 Teorema A curvatura de uma curva dada pela função vetorial r é

$$\kappa(t) = \frac{\left| \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \right|}{\left| \mathbf{r}'(t) \right|^3}$$

Prova Como  $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'| e |\mathbf{r}'| = ds/dt$ , temos

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

e pela Regra do Produto (Teorema 13.2.3, Fórmula 3), temos

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Usando o fato de que  $T \times T = 0$  (veja o Exemplo 2 da Seção 12.4), temos

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Agora  $|\mathbf{T}(t)| = 1$  para todo t, e então  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  são ortogonais pelo Exemplo 5 da Seção 13.2. Portanto, pelo Teorema 12.4.6,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}| |\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

es Full

Então

$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

e

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

**EXEMPLO 4**  $\supset$  Determine a curvatura da cúbica retorcida  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  em um ponto genérico e em (0, 0, 0).

SOLUÇÃO Calculemos inicialmente os ingredientes:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então, aplicando o Teorema 10 temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, a curvatura é  $\kappa(0) = 2$ .

Para o caso especial da curva plana com a equação y = f(x), escolhemos x como parâmetro e escrevemos  $\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + f(x) \mathbf{j}$ . Então  $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x) \mathbf{j}$  e  $\mathbf{r}''(x) = f''(x) \mathbf{j}$ . Como  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ , temos  $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x) \mathbf{k}$ . Temos também  $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ , e então, pelo Teorema 10:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

EXEMPLO 5 — Determine a curvatura da parábola  $y=x^2$  nos pontos (0,0), (1,1) e (2,4). SOLUÇÃO Como y'=2x e y''=2, a Fórmula 11 nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em (0, 0) é  $\kappa(0) = 2$ . Em (1, 1) é  $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0,18$ . Em (2, 4) é  $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0,03$ . Observe das expressões de  $\kappa(x)$  ou do gráfico de  $\kappa$  na Figura 5 que  $\kappa(x) \to 0$  quando  $x \to \pm \infty$ . Isso corresponde a dizer que a parábola tende a uma reta quando  $x \to \pm \infty$ .

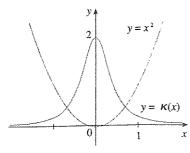
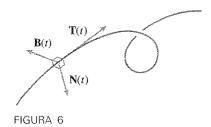


FIGURA 5 A parábola  $y = x^2$  e sua função curvatura.

#### Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção na qual a curva está se virando em cada ponto.



# □ A Figura 7 ilustra o Exemplo 6 mostrando os vetores T, N e B em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores T, N e B começando nos vários pontos da curva, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados triedro TNB, que se move ao longo da curva quando t varia. Esse triedro TNB tem um papel importante em um ramo da matemática chamado geometria diferencial e em suas aplicações em movimento de naves espaciais.

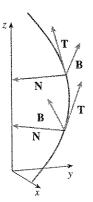


FIGURA 7

### Vetores Normal e Binormal

Em um ponto dado de uma curva lisa  $\mathbf{r}(t)$  existem muitos vetores que são ortogonais ao versor da tangente  $\mathbf{T}(t)$ . Do mesmo modo que  $|\mathbf{T}(t)|=1$  para todo t, temos  $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t)=0$  do Exemplo 5 da Seção 13.2, e então  $\mathbf{T}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ . Observe, no entanto, que  $\mathbf{T}'(t)$  pode não ser um vetor unitário. Mas, se  $\mathbf{r}'$  também for lisa, definiremos o **vetor normal principal unitário**  $\mathbf{N}(t)$  (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

O vetor  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ , denominado **vetor binormal**, é perpendicular a  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  e também é unitário (veja a Figura 6).

EXEMPLO 6 Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \,\mathbf{i} + \sin t \,\mathbf{j} + t \,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO Vamos, inicialmente, computar os ingredientes necessários para o cálculo do vetor unitário normal:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + \cos t \, \mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + \cos t \, \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\cos t \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \, \mathbf{j} \right) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \, \mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle$$

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo z. O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle$$

O plano determinado pelos vetores normal e binormal N e B em um ponto P sobre a curva C é chamado plano normal de C em P. Ele consiste em todas as retas que são ortogonais ao vetor tangente T. O plano estabelecido por T e N é denominado plano osculador de C em P. O nome vem do latim osculum, que significa "beijo". É o plano que mais se aproxima de conter a parte da curva próxima ao ponto P. (Para uma curva plana, o plano osculador é aquele que contém a curva.)

O círculo do plano osculador de C em P tem a mesma tangente que C em P, e fica do lado côncavo de C (em direção ao qual N aponta), seu raio  $\rho = 1/\kappa$  (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de C em P. É o círculo que melhor descreve o comportamento da curva C perto de P; e tem em comum com a curva a mesma tangente, normal e curvatura em P.

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular do Exemplo 6 no ponto  $P(0, 1, \pi/2)$ .

☐ A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

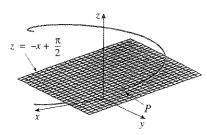


FIGURA 8

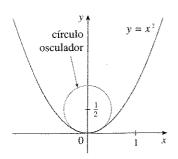


FIGURA 9

SOLUÇÃO O plano normal em P tem vetor normal  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1 \rangle$ , portanto sua equação é

$$-1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$
 ou  $z = x + \frac{\pi}{2}$ 

O plano osculador em P contém os vetores T e N, e assim seu vetor normal é  $T \times N = B$ . Do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \operatorname{sen} t, -\operatorname{cos} t, 1 \rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é (1, 0, 1), então uma equação do plano osculador é

$$1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$
 ou  $z = -x + \frac{\pi}{2}$ 

**EXEMPLO 8**  $\Box$  Determine e desenhe o círculo osculador da parábola  $y = x^2$  na origem.

SOLUÇÃO Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é  $\kappa(0) = 2$ . Dessa forma, o raio do círculo osculador é  $1/\kappa = \frac{1}{2}$  e seu centro é  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Sua equação é, portanto,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \frac{1}{2}\cos t$$
  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t$ 

Resumimos aqui as fórmulas para o vetor da tangente, os vetores normal e binormal e a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

# 13.3 Exercícios

1-6 Determine o comprimento da curva dada.

- 1.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle, -10 \le t \le 10$
- 2.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle, \quad 0 \le t \le \pi$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$
- 4.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}, \quad 1 \le t \le e$
- 5.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$
- **6.**  $\mathbf{r}(t) = 12t \,\mathbf{i} + 8t^{3/2} \,\mathbf{j} + 3t^2 \,\mathbf{k}, \ \ 0 \le t \le 1$

- 7. Use a regra de Simpson com n = 10 para estimar o comprimento do arco da cúbica retorcida x = t,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  da origem até o ponto (2, 4, 8).
- 8. Utilize o computador para traçar o gráfico da curva com equações paramétricas x = cos t, y = sen 3t, z = sen t. Determine o comprimento total da curva com precisão de quatro casas decimais.

9-11  $\Box$  Reparametrize a curva em relação ao comprimento do arco do ponto onde t = 0 na direção crescente de t.

9. 
$$\mathbf{r}(t) = 2t \, \mathbf{i} + (1 - 3t) \, \mathbf{j} + (5 + 4t) \, \mathbf{k}$$

10. 
$$\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t \, \mathbf{i} + 2 \, \mathbf{j} + e^{2t} \sin 2t \, \mathbf{k}$$

11. 
$$\mathbf{r}(t) = 3 \sin t \, \mathbf{i} + 4t \, \mathbf{j} + 3 \cos t \, \mathbf{k}$$

12. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido do ponto (1, 0) na direção crescente de t. Expresse a reparametrização na forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

12.12

- (a) Determine os vetores tangente e normal T(t) e N(t).
- (b) Utilize a Fórmula 9 para achar a curvatura.

**13.**  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \operatorname{cos} t \rangle$ 

14. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle$$
,  $t > 0$ 

**15.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^{t}, e^{-t} \rangle$$

**16.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$$

17-13 🗆 Utilize o Teorema 10 para achar a curvatura.

17. 
$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{k}$$

**18.** 
$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (1 + t^2) \mathbf{k}$$

19. 
$$\mathbf{r}(t) = 3t \, \mathbf{i} + 4 \sin t \, \mathbf{j} + 4 \cos t \, \mathbf{k}$$

**20.** Determine a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t \rangle$  no ponto

**20.** Determine a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle e^{t} \cos t, e^{t} \sin t, t \rangle$  no ponto (1, 0, 0).

21. Estabeleça a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  no ponto (1, 1, 1).

22. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas

$$x = t$$
  $y = 4t^{3/2}$   $z = -t^2$ 

e calcule a curvatura no ponto (1, 4, -1).

23-25 
Use a Fórmula 11 para achar a curvatura.

**22.** 
$$y = \cos x$$

23. 
$$v = 4x^{5/2}$$

\* a 6 2

**26–27**  $\square$  Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando  $x \to \infty$ ?

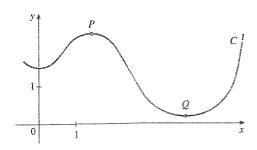
**26.** 
$$y = \ln x$$

**27.** 
$$v = e^{t}$$

28. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4

na origem.

(a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.



(b) Estime a curvatura em  $P \in Q$  desenhando o círculo osculador nesses pontos.

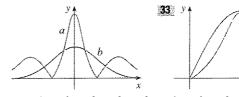
38–31 □ Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura κ(x). Esse é o gráfico que você esperava?

**30.** 
$$y = xe^{-x}$$

**31.** 
$$y = x^4$$

32–33  $\square$  Dois gráficos, a e b são mostrados. Um é a curva y = f(x) e o outro é o gráfico da sua função curvatura  $y = \kappa(x)$ . Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

22



34. (a) Faça o gráfico da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen } 3t, \text{sen } 2t, \text{sen } 3t \rangle$ . Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?

(b) Use CAS para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão da parte(a)?

35. O gráfico de  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$  é ilustrado na Figura 12(b) da Seção 13.1. Onde que você acha que a curvatura é maior? Use um CAS para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

**36.** Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada x = f(t), y = g(t), é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

37-38 🗆 Use a fórmula do Exercício 36 para calcular a curvatura.

37. 
$$x = e^t \cos t$$
,  $y = e^t \sin t$ 

**38.** 
$$x = 1 + t^3$$
,  $y = t + t^2$ 

39-49 □ Encontre os vetores T, N e B no ponto indicado.

**39.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$$

**40.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{cos} t \rangle$$
,  $(1, 0, 1)$ 

41-42 🗆 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

**41.** 
$$x = 2 \sin 3t$$
,  $y = t$ ,  $z = 2 \cos 3t$ ;  $(0, \pi, -2)$ 

**42.** 
$$x = t$$
,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ;  $(1, 1, 1)$ 

43. Determine as equações para o círculo osculador da elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  nos pontos (2, 0) e (0, 3). Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

**44.** Estabeleça as equações para o círculo osculador da parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$  nos pontos (0, 0) e  $(1, \frac{1}{2})$ . Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

- Em que ponto da curva  $x = t^3$ , y = 3t,  $z = t^4$  é a normal paralela ao plano 6x + 6y - 8z = 1?
- 46. Existe um ponto da curva do Exercício 45 onde o plano osculador é paralelo ao plano x + y + z = 1? (Nota: Você precisará de um CAS para diferenciar, simplificar e calcular um produto vetorial.)
  - Mostre que a curvatura  $\kappa$  está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

- **48.** Mostre que a curvatura de uma curva plana é  $\kappa = |d\phi/ds|$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre T e i, isto é,  $\phi$  é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)
- **49.** (a) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a **B**.
  - (b) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a  $\mathbf{T}$ .
  - (c) Deduza das partes (a) e (b) que  $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$  para algum número  $\tau(s)$  chamado torção da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
  - (d) Mostre que para uma curva plana a torção é  $\tau(s) = 0$ .
- 50. As fórmulas seguintes, chamadas fórmulas de Frenet-Serret, são de fundamental importância em geometria diferencial:
  - 1.  $d\mathbf{T}/ds = \kappa \mathbf{N}$
  - $2. \ d\mathbf{N}/ds = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$
  - 3.  $d\mathbf{B}/ds = -\tau \mathbf{N}$

(A Fórmula 1 vem do Exercício 47, e a Fórmula 3, do Exercício 49.) Use o fato de que  $N = B \times T$  para deduzir a Fórmula 2 das Fórmulas 1 e 3.

51. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para provar cada um dos seguintes itens. (Aqui as linhas indicam as derivadas com relação a t. Comece como na prova do Teorema 10.)

- (a)  $\mathbf{r}'' = s''T + \kappa(s')^2 N$
- (b)  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3 \mathbf{B}$
- (c)  $\mathbf{r}''' = [s''' \kappa^2(s')^3] \mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2] \mathbf{N} + \kappa \tau(s')^3 \mathbf{B}$ (d)  $\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

(d) 
$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$$

- **52.** Mostre que a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t, bt \rangle$  onde a e b são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 51(d).]
- 53. Utilize a fórmula do Exercício 51(d) para calcular a torção da curva  $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3).$
- **54.** Determine a curvatura e a torção da curva x = senh t,  $y = \cosh t$ , z = t no ponto (0, 1, 0).
- 55. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares (veja a Figura 3 na Seção 13.1). O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 angströms (1 angström =  $10^{-8}$  cm). Cada hélice, em um giro completo, sobe 34 angströms, e existem cerca de  $2.9 \times 10^8$  giros completos em uma molécula. Estime o comprimento de cada hélice circular.
- 56. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea onde precisamos fazer com as seções de trilhos retos sejam ligadas por meio de uma curva suave. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo x precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta y = 1 para  $x \ge 1$ .
  - (a) Determine um polinômio P = P(x) de grau 5 tal que a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.

(b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de F.

 $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ 

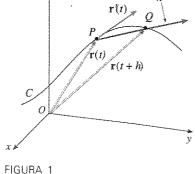
# Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Nesta seção mostraremos como as idéias dos vetores tangente e normal, assim como os de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para derivar a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante t seja  $\mathbf{r}(t)$ . Note da Figura 1 que, para pequenos valores de h, o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva  $\mathbf{r}(t)$ . Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor (1) fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento h e seu limite é o vetor veloci**dade**  $\mathbf{v}(t)$  no instante t:



2

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A rapidez da partícula no instante t é o módulo do vetor velocidade, ou seja,  $|\mathbf{v}(t)|$ . Isso é apropriado, pois, de (2) e da Equação 13.3.7, temos

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{taxa de variação da distância com relação ao tempo}$$

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

**EXEMPLO 1**  $\Box$  O vetor de posição de um objeto se movendo em um plano é dado por  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ . Determine a velocidade, a rapidez e a aceleração do objeto no instante t = 1 e ilustre geometricamente.

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração no instante t são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t \,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

e a rapidez é

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Quando t = 1, temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$
  $\mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$   $|\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$ 

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2.

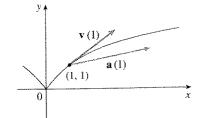


FIGURA 2

EXEMPLO 2  $\Box$  Determine a velocidade, a aceleração e a rapidez de uma partícula com vetor de posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$ .

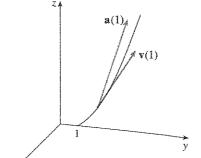
**SOLUÇÃO** 

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e', (1+t)e' \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e', (2+t)e' \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$$

100



 $\square$  A Figura 3 mostra a trajetória da partícula do Exemplo 2 com vetores velocidade e aceleração quando t=1.

271

A integração de vetores introduzida na Seção 13.2 pode ser usada para achar o vetor posição quando os vetores de velocidade ou aceleração são conhecidos, como no seguinte exemplo.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Uma partícula se move de uma posição inicial  $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$  com velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Sua aceleração é dada por  $\mathbf{a}(t) = 4t \, \mathbf{i} + 6t \, \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Determine sua velocidade e posição no instante t.

SOLUÇÃO Como  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ , temos

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \int (4t \,\mathbf{i} + 6t \,\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$$
$$= 2t^2 \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t \,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar o valor do vetor constante C, usaremos o fato de que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . A equação anterior nos dá  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$ , assim  $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  e

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$= (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$$

Como  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ , temos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt$$

$$= \int \left[ (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k} \right] dt$$

$$= \left( \frac{2}{3}t^3 + t \right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left( \frac{1}{2}t^2 + t \right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$$

Tomando t = 0, achamos que  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ . Então,

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + \left(t^3 - t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$

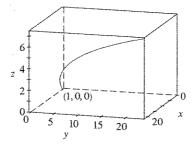


FIGURA 4

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(u) \ du$$
  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(u) \ du$ 

 $\square$  A expressão para  $\mathbf{r}(t)$  que obtivemos no Exemplo 3 foi usada para traçar a trajetória da partícula na Figura 4 para  $0 \le t \le 3$ .

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo t, uma força  $\mathbf{F}(t)$  age sobre um objeto de m produzindo uma aceleração  $\mathbf{a}(t)$ , então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Um objeto de massa m que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante  $\omega$  tem vetor de posição dado por  $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \, \mathbf{i} + a \sin \omega t \, \mathbf{j}$ . Determine a força que age sobre o objeto e mostre que sua direção e sentido são dados pela reta que passa pela origem, apontando para esta.

SOLUÇÃO 
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega \operatorname{sen} \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{i}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, temos a força

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\sin\omega t\,\mathbf{j})$$

Note que  $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2 \mathbf{r}(t)$ . Isso mostra que a força age na direção oposta ao vetor radial  $\mathbf{r}(t)$  e, portanto, aponta para a origem (veja a Figura 5). Essa força é chamada *força centrípeta*.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Um projétil é disparado com ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  (veja a Figura 6). Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição  $\mathbf{r}(t)$  do projétil. Para qual valor de  $\alpha$  obtemos maior alcance (distância horizontal percorrida)?

SOLUÇÃO Fixamos os eixos coordenados de forma que a origem coincida com o ponto inicial da trajetória do projétil. Como a força devida à gravidade age para baixo, temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$$

onde 
$$q = |\mathbf{a}| \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$
. Então

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

Como  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ , temos

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

onde 
$$C = v(0) = v_0$$
. Portanto

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando novamente, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Mas  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ , e então o vetor de posição do projétil é dado por

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

Se escrevermos  $|\mathbf{v}_0| = v_0$  (a velocidade inicial do projétil), então

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \cos \alpha \mathbf{i} + \mathbf{v}_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

e a Equação 3 se torna

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \,\mathbf{i} + \left[ (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}$$

As equações paramétricas da trajetória são

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

 $\Box$  A velocidade angular do objeto movendo com posição  $P \in \omega = d\theta/dt$ , onde  $\theta \in \partial$  ângulo mostrado na Figura 5.

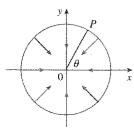


FIGURA 5

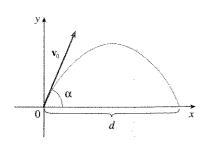


FIGURA 6

Se você eliminar r na Equação 4, verá que y é uma função quadrática de x. Logo a trajetória da partícula é uma parábola.

873

A distância horizontal d é dada pelo valor de x quando y = 0. Impondo y = 0, obtemos t = 0 ou  $t = (2v_0 \operatorname{sen} \alpha)/g$ . O último valor de t fornece

$$d = x = (v_0 \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Claramente, d tem valor máximo quando sen  $2\alpha = 1$ , ou seja, quando,  $\alpha = \pi/4$ .

**EXEMPLO 6** Um projétil é lançado com velocidade, da boca do canhão, de 150 m/s e ângulo de elevação de 45º de um ponto 10 m acima do nível do chão. Onde o projétil vai atingir o chão e com que rapidez?

SOLUÇÃO Se tomarmos a origem no nível do chão, então a posição inicial do projétil é (0, 10) e, portanto, precisamos adequar a Equação 4 adicionando 10 na expressão para y. Como  $v_0 = 150 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 45^{\circ}$ , e  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , temos

$$x = 150\cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}t$$
  

$$y = 10 + 150\sin(\pi/4)t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}t - 4.9t^2$$

O impacto ocorrerá quando y = 0, isto é, quando  $4.9t^2 - 75\sqrt{2}t - 10 = 0$ . Resolvendo essa equação quadrática (e usando somente valores positivos para t), temos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11,250 + 196}}{9,8} \approx 21,74$$

Então  $x \approx 75\sqrt{2}(21,74) \approx 2306$ , assim o projétil atinge o solo a uma distância em torno de 2.306 m.

A velocidade do projétil é 
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2} \mathbf{i} + (75\sqrt{2} - 9.8t) \mathbf{j}$$

Portanto, sua rapidez no impacto é

$$|\mathbf{v}(21,74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$

# Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é freqüentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos  $v = |\mathbf{v}|$  para a rapidez da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e assim

Se diferenciarmos ambos os lados em relação a t, obteremos

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Se usarmos a expressão da curvatura dada pela Equação 13.3.9, temos

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \quad \text{e então} \quad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

O vetor normal foi definido na seção anterior como N = T'/|T'|, portanto de (6) vem

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'| \mathbf{N} = \kappa v \mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}$$

Escrevendo  $a_T$  e  $a_N$  para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

onde

$$q_T = v'$$

$$e a_N = \kappa v^2$$

Essa resolução está ilustrada na Figura 7.

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a notar é que o vetor binormal **B** não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de **T** e **N** (o plano osculador). (Lembre-se de que **T** fornece a direção e sentido do movimento e **N** aponta a direção em que a curva está entortando.) Em seguida, notamos que a componente tangencial da aceleração é v', a taxa de variação da rapidez, e a componente normal da aceleração é  $\kappa v^2$ , a curvatura vezes o quadrado da rapidez. Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro — uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura  $\kappa$ , de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito: de fato, se dobrarmos nossa rapidez,  $a_N$  será aumentado por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter as expressões que dependam somente de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  e  $\mathbf{r}''$ . Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de  $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$  com  $\mathbf{a}$ , como dado na Equação 7:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N})$$

$$= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}$$

$$= vv' \qquad (como \ \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \ e \ \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0)$$

Portanto

$$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando a fórmula da curvatura dada pelo Teorema 13.3.10, temos

$$\boxed{10} \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{\left| \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \right|}{\left| \mathbf{r}'(t) \right|^3} \left| \mathbf{r}'(t) \right|^2 = \frac{\left| \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \right|}{\left| \mathbf{r}'(t) \right|}$$

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Uma partícula se move com função de posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$ . Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

SOLUÇÃO 
$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

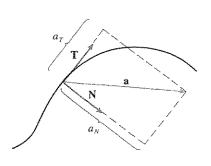


FIGURA 7

Como

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t^2 \mathbf{j}$$

da Equação 10 obtemos o componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

# Leis de Kepler sobre o Movimento Planetário

Descreveremos agora um dos principais feitos do cálculo mostrando como o material deste capítulo pode ser usado para provar as leis de Kepler sobre o movimento planetário. Depois de 20 anos estudando as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou as seguintes três leis:

#### Lois de Kepler

- 1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
- 2. A reta que liga o Sol a um planeta percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
- 3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do maior eixo de sua órbita.

Em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, sir Isaac Newton mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como conseqüência de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. No que se segue, provaremos a Primeira Lei de Kepler. As demais ficam como exercício (com sugestões).

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros astros, podemos ignorar todos os outros corpos do universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  o vetor de posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendose ao redor de uma estrela.) O vetor velocidade é  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$  e o vetor aceleração é  $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$ . Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 

Lei da Gravitação: 
$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional,  $r = |\mathbf{r}|$ , e  $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$  é o vetor  $\mathbf{r}$ .

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para F nas duas leis de Newton, chegamos a

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

e, portanto,  $\mathbf{a}$  é paralelo a  $\mathbf{r}$ . Segue-se que  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Usando a Fórmula 5 do Teorema 13.2.3, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}'$$
$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{b}$$

Assim

onde  $\mathbf{h}$  é um vetor constante. (Podemos presumir que  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ; ou seja,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  não são paralelos.) Isso significa que o vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  é perpendicular a  $\mathbf{h}$  para todos os valores de t, portanto o planeta está sempre em um plano que passa pela origem e é perpendicular a  $\mathbf{h}$ . Dessa forma, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para provar a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor h como se segue:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})'$$

$$= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u})$$

$$= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

Então

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2} \mathbf{u} \times (r^2 \mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$
$$= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \quad \text{(pelo Teorema 12.4.8, Propriedade 6)}$$

Mas  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$  e, como  $|\mathbf{u}(t)| = 1$ , segue do Exemplo 5 da Seção 13.2 que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ . Portanto

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

e então

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde c é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base padrão  $\mathbf{k}$  aponte na direção do vetor  $\mathbf{h}$ . O planeta se move assim no plano xy. Como  $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$  e  $\mathbf{u}$  são perpendiculares a  $\mathbf{h}$ , a Equação 11 mostra que  $\mathbf{c}$  pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que  $\mathbf{i}$  esteja na direção de  $\mathbf{c}$ , como mostrado na Figura  $\mathbf{8}$ .

Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{r}$ , então  $(r,\theta)$  são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM \mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$
  
=  $GMr \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}| |\mathbf{c}| \cos \theta = GMr + rc \cos \theta$ 

onde  $c = |\mathbf{c}|$ . Então

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e \cos \theta}$$

onde e = c/(GM). Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde  $h = |\mathbf{h}|$ . Desse modo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

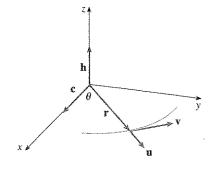


FIGURA 8

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade e. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse.

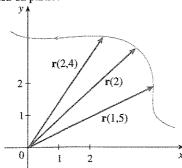
Isso completa a derivação da Primeira Lei de Kepler. Guiaremos você na derivação da Segunda e da Terceira Lei no Projeto Aplicado na página 877. As provas dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta potente na descrição de leis da natureza.

#### Exercícios

- 1. A tabela fornece coordenadas de partículas movendo-se no espaço ao longo de uma curva lisa.
  - (a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo [0; 1], [0,5; 1], [1; 2] e [1; 1,5].
  - (b) Estime a velocidade e a rapidez da partícula no instante t = 1.

| -                                       | t   | Х   | у   | Z   |
|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| *************************************** | 0   | 2,7 | 9,8 | 3,7 |
| -                                       | 0,5 | 3,5 | 7,2 | 3,3 |
|                                         | 1,0 | 4,5 | 6,0 | 3,0 |
|                                         | 1,5 | 5,9 | 6,4 | 2,8 |
| i                                       | 2,0 | 7,3 | 7,8 | 2,7 |

- 2. A figura mostra o caminho de uma partícula que se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante t.
  - (a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $2 \le t \le 2.4$ .
  - Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $1.5 \le t \le 2$ .
  - (c) Escreva uma expressão para o vetor velocidade v(2).
  - (d) Desenhe uma aproximação do vetor v(2) e estime a rapidez da partícula em t=2.



3-8 🗆 Determine a velocidade, a aceleração e a rapidez da partícula cuja função posição é dada. Esquematize o caminho da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

3. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle, \quad t = 1$$

4. 
$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 - t, 4\sqrt{t} \rangle$$
,  $t = 1$ 

5. 
$$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}, t = 0$$

**6.** 
$$\mathbf{r}(t) = \sin t \, \mathbf{i} + 2 \cos t \, \mathbf{j}, \quad t = \pi/6$$

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}, \quad t = 0$$

**8.** 
$$\mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{i} + t^2 \, \mathbf{j} + t^3 \, \mathbf{k}, \quad t = 1$$

9-14 □ Determine os vetores velocidade e aceleração e a rapidez de uma partícula cuja função posição é dada.

**9.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$$
 **10.**  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \sin t \rangle$ 

**10.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t | 3t | 2 \sin t \rangle$$

**11.** 
$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$$
 **12.**  $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ 

**12.** 
$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

13. 
$$\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k})$$

14. 
$$\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t \mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

15-16 □ Determine os vetores velocidade e de posição de uma partícula dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

**15.** 
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$$

**16.** 
$$\mathbf{a}(t) = -10 \,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

#### 17-18

(a) Determine o vetor posição de uma partícula dada a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

17. 
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ 

**18.** 
$$\mathbf{a}(t) = t \, \mathbf{i} + t^2 \, \mathbf{j} + \cos 2t \, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$$

- 19. A função posição de uma partícula é dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$ . Quando sua rapidez é mínima?
- 20. Qual força é requerida de forma que uma partícula de massa mtenha a função posição  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ?
- 21. Uma força com grandeza 20 N age diretamente no sentido ascendente a partir do plano xy em um objeto com massa 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$  Determine sua função posição e sua rapidez no instante t.

- Mostre que, se uma partícula se move com rapidez constante, então os vetores velocidade e de aceleração são ortogonais.
- 23. Um projétil é disparado com uma rapidez inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de 30°. Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a rapidez do impacto.
- **24.** Repita o Exercício 23 considerando agora o projétil disparado de uma posição 200 m acima do solo.
- 25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45° em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a rapidez inicial da bola?
- 26. Um canhão é disparado com ângulo de elevação de 30°. Com que velocidade a bala sai pela boca do canhão se o máximo de altura que ele atinge é de 500 m?
- 27. A rapidez com que uma bala sai pela boca de um canhão é de 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância dele.
- 28. No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está a 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma rapidez de 115 pés e com ângulo de 50° acima da horizontal. Foi home run? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca)?
- 29. A água, descendo por um trecho reto de um rio, flui mais rápida no meio e a rapidez diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio dirigindo-se para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a rapidez máxima da água é de 3 m/s, podemos usar uma função quadrática como modelo básico para a taxa de fluxo da água x unidades de distância da margem oeste:  $f(x) = \frac{3}{40} x(40 x).$ 
  - (a) Um barco vai com uma rapidez constante de 5 m/s a partir de um ponto de A na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância, rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a praia? Faça um gráfico da trajetória do barco.
  - (b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco a fim de atracar em um ponto B, diretamente oposto ao A, na margem leste. Se mantivermos a rapidez constante de 5 m/s e um direcionamento constante, determine o ângulo no qual o barco deve ser conduzido. Depois faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?
- 30. Outro modelo razoável para a rapidez da água do rio no Exercício 26 é a função senoidal:  $f(x) = 3 \sin(\pi x/40)$ . Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de A até B com direcionamento constante e rapidez constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

31-35  $\ \, \Box$  Determine os componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

**31.** 
$$\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

**32.** 
$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + (t^2-2t)\mathbf{j}$$

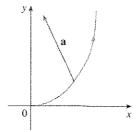
33. 
$$\mathbf{r}(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}$$

**34.** 
$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

**35.** 
$$\mathbf{r}(t) = e^{t}\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$

**36.** 
$$\mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{i} + \cos^2 t \, \mathbf{j} + \sin^2 t \, \mathbf{k}$$

**37.** A grandeza do vetor aceleração  $a \in 10 \text{ cm/s}^2$ . Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de a.



- 38. Se uma partícula com massa m se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ , então seu momento angular é definido como  $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$  e seu torque é estabelecido como  $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$ . Mostre que  $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$ . Deduza que, se  $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$  para todo t, então  $\mathbf{L}(t)$  é constante. (Esta é a lei de conservação do momento angular.)
- 39. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3+t)\mathbf{i} + (2+\ln t)\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2+1}\right)\mathbf{k}$$

- e as coordenadas de uma estação espacial são (6, 4, 9). O capitão quer que a nave encoste em uma estação espacial. Quando as máquinas da nave devem ser desligadas?
- 46. Um foguete que queima o combustível carregado dentro de si enquanto se move no espaço tem, no instante t, velocidade v(t) e massa m(t). Se os gases provenientes da combustão escapam a uma velocidade de v<sub>e</sub> relativamente ao foguete, deduz-se da Segunda Lei de Newton do movimento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

- (a) Mostre que  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) \ln \frac{m(0)}{m(t)} \mathbf{v}_e$ .
- (b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da rapidez de saída de seus gases de combustão, que fração da massa inicial será queimada?

## Leis de Kepler

Johannes Kepler estabeleceu três leis sobre o movimento planetário baseadas em quantidades de dados referentes à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

Leis de Kepler

- 1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
- 2. A reta que liga o Sol a um planeta percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
- 3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do maior eixo de sua órbita.

Kepler formulou essas leis porque elas serviam para os dados das observações de que ele dispunha. Ele não foi capaz de provar por que elas valiam nem como elas se relacionavam umas com as outras. Mas sir Isaac Newton, em seu Principia Mathematica, de 1687, mostrou como deduzir as três leis de Kepler de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. Na Seção 13.4 provamos a Primeira Lei de Kepler usando o cálculo de funções vetoriais. Neste projeto guiamos você através da prova da Segunda e da Terceira Leis de Kepler e exploramos suas consequências.

1. Utilize os seguintes passos para provar a Segunda Lei de Kepler. A notação será a mesma que foi empregada na prova da Primeira Lei da Seção 13.4. Em particular, use as coordenadas polares de modo que  $\mathbf{r} = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j}$ 

(a) Mostre que 
$$\mathbf{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k}$$
.

(b) Deduza que 
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$
.

(c) Se A = A(t) é a área percorrida pelo vetor radial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  no intervalo de tempo  $[t_0, t]$ como mostrado na figura, mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h = \text{constante}$$

Essa equação diz que a razão pela qual A é percorrida é constante e prova a Segunda Lei de

2. Seja T o período de um planeta em torno do Sol; ou seja, T é o tempo requerido para o planeta dar uma volta completa em torno do Sol, através de sua órbita elíptica. Suponha que os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse sejam 2a e 2b.

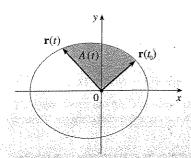
(a) Use a parte (d) do Problema I para mostrar que 
$$T=2\pi ab/h$$
.  
(b) Mostre que  $\frac{h^2}{GM}=ed=\frac{b^2}{a}$ .

(b) Mostre que 
$$\frac{h^2}{GM} = ed = \frac{b^2}{a}$$

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que 
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$
.

Asso prova a Terceira Lei de Kepler. [Note que a constante de proporcionalidade  $4\pi^2/(GM)$ independe do planeta.]

- 3. O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 días. Utilize esse tato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o maior eixo da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol,  $M = 1.99 \times 10^{30}$  kg, e da constante gravitacional,  $G = 6.67 \times 10^{-11} \,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
- 4. É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra é  $5.98 \times 10^{34} \mathrm{Kg}$ , seu raio é  $6.37 \times 10^6 \mathrm{m}$ . (Essa órbita é chamada Órbita Geossincrona de Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a idéia, em 1948. O primeiro satélite com essas características, Syncom II, foi lançado em julho de 1963.)



## VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?
- 2. Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?
- 3. (a) O que é uma curva lisa?
  - (b) Como achar o vetor tangente de uma curva lisa em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o versor tangente?
- 4. Se u e v são funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f é uma função real, escreva as regras para diferenciar as seguintes funções vetoriais:
  - (a)  $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$
- (b)  $c\mathbf{u}(t)$
- (c)  $f(t)\mathbf{u}(t)$

- (d)  $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$
- (e)  $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$
- (f)  $\mathbf{u}(f(t))$
- 5. Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial r(t)?

- 6. (a) Qual a definição de curvatura?
  - (b) Escreva a fórmula para curvatura em função de  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{T}'(t)$ .
  - (c) Escreva a fórmula para cur vatura em função de  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$ .
  - (d) Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação y = f(x).
- 7. (a) Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva lisa espacial  $\mathbf{r}(t)$ .
  - (b) O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?
- 8. (a) Como determinar a velocidade, a rapidez e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
  - (b) Escreva a aceleração em termos de seus componentes tangencial e normal.
- 9. Quais são as leis de Kepler?

#### TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Se verdadeira, explique por quê. Se falsa, explique por que ou forneça um contra-exemplo.

- 1. A curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$  é uma
- 2. A curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^3, t^5 \rangle$  é lisa.
- 3. A curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, t^2, t^4 \rangle$  é lisa.
- A derivada da função vetorial é obtida diferenciando-se cada componente da função.
- 5. Se  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  são funções vetoriais diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

6. Se  $\mathbf{r}(t)$  é uma função vetorial diferenciável, então

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

- 7. Se  $\mathbf{T}(t)$  é o versor tangente de uma curva lisa, então a curvatura é  $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$ .
- **8.** O vetor binormal é dado por  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$ .
- **9.** O círculo osculador de uma curva *C* em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que *C* naquele ponto.
- As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.

#### **EXERCÍCIOS**

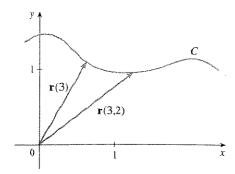
1. (a) Esboce o desenho da curva com função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos \pi t\mathbf{j} + \sin \pi t\mathbf{k}$$
  $t \ge 0$ 

- (b) Determine  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$ .
- **2.** Seja  $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2-t}, (e^t 1)/t, \ln(t+1)).$ 
  - (a) Determine o domínio de r.
  - (b) Determine  $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$ .
  - (c) Determine  $\mathbf{r}'(t)$ .
- 3. Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  com o plano x + z = 5.
- **4.** Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva  $x = t^2$ ,  $y = t^4$ ,  $z = t^3$  no ponto (1, 1, 1). Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.

- 5. Se  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \cos \pi t \mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k}$ , calcule  $\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt$ .
- 6. Seja C a curva com equações  $x = 2 t^3$ , y = 2t 1,  $z = \ln t$ . Determine (a) o ponto de interseção de C com o plano xz, (b) as equações paramétricas da reta tangente em (1, 1, 0) e (c) uma equação para o plano normal a C em (1, 1, 0).
- 7. Utilize a fórmula de Simpson com n=4 para estimar o comprimento do arco de curva com equação  $x=\sqrt{t}$ , y=4/t,  $z=t^2+1$  de (1,4,2) até (2,1,17).
- 8. Determine o comprimento da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \sin 2t \rangle$ ,  $0 \le t \le 1$ .
- 9. A hélice  $\mathbf{r}_1(t) = \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}$  intercepta a curva  $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$  no ponto (1,0,0). Determine o ângulo de interseção dessas curvas.

- 10. Reparametrize a curva  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \cos t \mathbf{k}$  com respeito ao comprimento do arco de curva medido do ponto (1, 0, 1) na direção de aumento do valor de t.
- 11. Para a curva dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t \rangle$ , determine (a) o versor tangente, (b) o versor normal e (c) a curvatura.
- 12. Determine a curvatura da elipse  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t \cos t$ pontos (3, 0) e (0, 4).
- 13. Estabeleça a curvatura da curva  $y = x^4$  no ponto (1, 1).
- 14. Determine uma equação do círculo osculador da curva  $y = x^4 - x^2$  na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.
  - 15. Determine uma equação do plano osculador da curva  $x = \sin 2t$ . y = t,  $z = \cos 2t$  no ponto  $(0, \pi, 1)$ .
  - 16. A figura mostra a curva C traçada por uma partícula com vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante t.
    - (a) Desenhe o vetor que representa a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $3 \le t \le 3.2$ .
    - (b) Escreva a expressão para a velocidade v(3).
    - (c) Escreva uma expressão para o versor T(3) e desenhe-o.



- 17. Uma partícula se move de acordo com a função posição  $\mathbf{r}(t) = t \ln t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ . Determine a velocidade, a rapidez e a aceleração da partícula.
- 18. Uma partícula começa sua trajetória na origem com velocidade inicial i - j + 3k. Sua aceleração é  $\mathbf{a}(t) = 6t \mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j} - 6t \mathbf{k}$ . Determine sua função de posição.
- 19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de 45° em relação à horizontal com rapidez inicial de 43 pés/s. Sua mão fica 7 pés acima do chão.
  - (a) Onde está o disco 2 segundos depois?
  - (b) Qual a altura máxima que o disco atinge?
  - (c) Onde o disco atinge o chão?
- 20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor de posição

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

21. Um disco de raio 1 está girando no sentido anti-horário a uma rapidez angular constante ω. Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante  $t, t \ge 0$ , é dada por  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$ , onde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t \,\mathbf{i} + \sin \omega t \,\mathbf{j}$$

(a) Mostre que a velocidade v da partícula é

$$\mathbf{v} = \cos \omega t \, \mathbf{i} + \sin \omega t \, \mathbf{j} + t \mathbf{v}_d$$

onde  $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$  é a velocidade do ponto na borda do disco.

(b) Mostre que a aceleração a da partícula é

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\mathbf{a}_d$$

onde  $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$  é a aceleração na borda do disco. O termo extra  $2\,v_{\text{d}}$  é chamado aceleração de Coriolis; ele é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

(c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

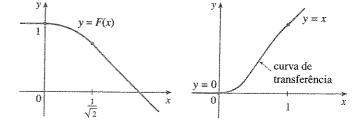
$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t \, \mathbf{i} + e^{-t} \sin \omega t \, \mathbf{j}$$

- No projeto das curvas de transferência, usadas para ligar trechos retos dos trilhos de uma linha férrea, é importante entender que a aceleração do trem deve ser contínua de modo que a força reativa exercida pelo trem no trilho seja também contínua. Por causa das fórmulas obtidas na Seção 13.4 para as componentes da aceleração, este só será o caso se a curvatura variar de modo contínuo.
  - (a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por y = 1 para  $x \le 0$  e  $y = \sqrt{2} - x$  para  $x \ge 1/\sqrt{2}$  precisa ser uma função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $0 < x < 1/\sqrt{2}$ , cujo gráfico é um arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Mostre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0\\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2}\\ \sqrt{2} - x & \text{se } x \ge 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim, f não é apropriada para a curva de transferência.

(b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta: y = 0 para  $x \le 0$  e y = x para  $x \ge 1$ . Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esquematizar o gráfico da função "conexão" e verifique se ele se assemelha ao da figura.



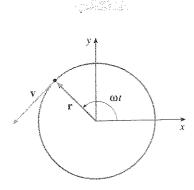


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

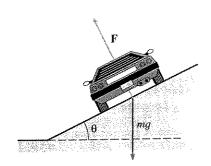


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

#### Problemas Quentes

- Uma partícula P se move com rapidez angular constante ω em torno de um círculo com centro na origem e raio R. A partícula é dita estar em movimento circular uniforme. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula está no ponto (R, 0) quando t = 0. O vetor posição no instante t ≥ 0 é r(t) = R cos ωt i + R sen ωt j.
  - (a) Determine o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e mostre que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ . Conclua que  $\mathbf{v}$  é a tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.
  - (b) Mostre que a rapidez  $|\mathbf{v}|$  da partícula é constante  $\omega R$ . O período T da partícula é o tempo necessário para que a partícula complete uma volta. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- (c) Estabeleça o vetor aceleração a. Mostre que ele é proporcional a  $\mathbf{r}$  e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é  $|\mathbf{a}| = R\omega^2$ .
- (d) Suponha que a partícula tenha massa m. Mostre que a grandeza da força F que é necessária para produzir esse movimento, denominada força centrípeta, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

2. Uma curva circular de raio R em uma auto-estrada é inclinada em um ângulo de θ de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A rapidez nominal v<sub>R</sub> associada a uma curva é a rapidez máxima que o carro pode atingir na mesma sem derrapar. Suponha que um carro de massa m esteja transpondo a curva com rapidez nominal v<sub>R</sub>. Duas forças estarão agindo sobre o carro: a força vertical, mg, em razão do peso do carro e uma força F exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

O componente vertical de  ${\bf F}$  contrapõe-se ao peso do carro, de forma que  $|{\bf F}|$  cos  $\theta=mg$ . O componente horizontal de  ${\bf F}$  produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e parte (d) do Problema 1,

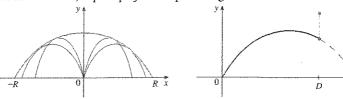
$$|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta = \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Mostre que  $v_R^2 = Rg \operatorname{tg} \theta$ .

essa altura?

- (b) Determine a rapidez nominal associada a uma curva circular de raio 400 pés que é inclinada em um ângulo de 12°.
- (c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em 12°, mas desejem aumentar a rapidez nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?
- 3. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação  $\alpha$  e rapidez inicial  $v_0$ . Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade, g, foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor de posição do projétil é
  - $\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \,\mathbf{i} + \left[ (v_0 \sin \alpha)t \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}$ . Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando  $\alpha = 45^\circ$  e, nesse caso, o alcance é  $R = v_0^2/g$ .

    (a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é
  - (b) É dada a rapidez inicial  $v_0$  e a parábola  $x^2 + 2Ry R^2 = 0$ , cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e o eixo x, e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.



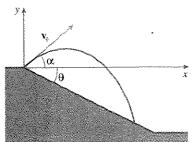
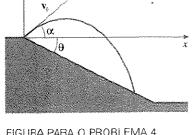


FIGURA PARA O PROBLEMA 4



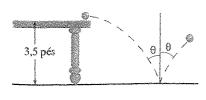


FIGURA PARA O PROBLEMA 7

- (c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de elevação  $\alpha$  quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura h diretamente acima de um ponto D unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade vo, desde que o projétil não atinja o chão "antes" de D.
- 4. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em um plano inclinado para baixo em um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O ângulo de elevação do 1ançador e a rapidez inicial do projétil são respectivamente  $\alpha$  e  $v_0$ . Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo t. (Despreze a resistência do ar.)
- (b) Mostre que o ângulo α de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.
- Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é  $\theta$ . Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.
- (d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e movimento de projéteis e os aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância R em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil seja proporcional ao quadrado da velocidade inicial, assim, minimizar a energia é equivalente a minimizar a velocidade inicial.)
- Um projétil de massa m é disparado a partir da origem com um ângulo de elevação  $\alpha$ . Além da gravidade, considere que a resistência do ar gera uma força que é proporcional à velocidade e que se opõe ao movimento. Então, pela Segunda Lei de Newton, a força total atuante no projétil satisfaz a equação

$$m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -mg\,\mathbf{j} - k\,\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

onde **R** é o vetor posição e k > 0 é a constante de proporcionalidade.

(a) Mostre que a Equação 1 pode ser integrada resultando na equação

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{k}{m}\mathbf{R} = \mathbf{v}_0 - gt\,\mathbf{j}$$

onde 
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}(0)$$
.

- (b) Multiplique ambos os lados da equação da parte (a) por  $e^{(k/m)t}$  e mostre que o lado esquerdo da equação resultante é a derivada do produto  $e^{(k/m)t}\mathbf{R}(t)$ . Integre então para obter a expressão do vetor posição  $\mathbf{R}(t)$ .
- 6. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \sin(\frac{1}{2}\pi\theta^2) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos(\frac{1}{2}\pi\theta^2) d\theta$$

- 7. Uma bola cai de uma mesa com uma rapidez de 2 pés/s. A mesa tem 3,5 pés de altura.
  - (a) Determine o ponto no qual a bola atinge o chão e encontre sua rapidez no instante do impacto.
  - Encontre o ângulo  $\theta$  entre a trajetória da bola e a linha vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).
  - Suponha que a bola repique do chão no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua rapidez devido à energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?
- 8. Um cabo tem raio r e comprimento L e está enrolado, sem sobreposição, em um carretel de raio R. Qual é o menor comprimento ao longo do carretel que é coberto pelo cabo?

# 14

## **Derivadas Parciais**

Um modo efetivo de visualizar uma função de duas variáveis é plotar as curvas de nível (também chamadas linhas de contorno). Essas curvas indicam pontos onde a função tem um mesmo valor.

Até aqui, tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas freqüentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções com diversas variáveis e estenderemos nossas idéias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

## 14.1 Funções de Várias Variáveis

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

verbalmente (pela descrição em palavras)

• numericamente (por uma tabela de valores)

■ algebricamente (por uma fórmula explícita)

visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

#### Funções de Duas Variáveis

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em um dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo T = f(x, y).

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que  $V = \pi r^2 h$ . Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos  $V(r,h) = \pi r^2 h$ .

Definição Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa, a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D, um único valor real denotado por f(x, y). O conjunto D é o domínio de f, e sua imagem, o conjunto de valores possíveis de f, ou seja,  $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ .

Frequentemente escrevemos z = f(x, y) para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes**, e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação y = f(x) para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é aquela cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), onde o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy.

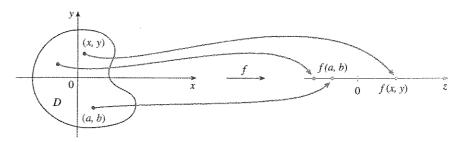


FIGURA 1

Se a função f é dada por sua fórmula e seu domínio não é especificado, fica entendido como domínio de f o conjunto de todos os pares de valores (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem-definido.

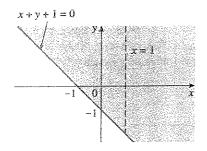


FIGURA 2
Domínio de  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ 

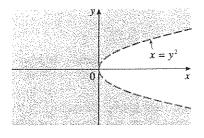


FIGURA 3 Domínio de  $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$ 

O NOVO ÍNDICE SENSAÇÃO TÉRMICA Um novo índice denominado sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quão rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e rapidez do vento em um túnel de vento refrigerado.

EXEMPLO 1  $\square$  Determine os domínios das seguintes funções e calcule f(3, 2).

(a) 
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

(b) 
$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

SOLUÇÃO

(a) 
$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para f está bem-definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não-negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) | x + y + 1 \ge 0, x \ne 1\}$$

A desigualdade  $x + y + 1 \ge 0$ , ou  $y \ge -x - 1$ , descreve os pontos que estão sobre ou acima da reta y = -x - 1, ao passo que  $x \ne 1$  significa que os pontos sobre a reta x = 1 precisam ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

(b) 
$$f(3,2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Como  $\ln(y^2 - x)$  é definido somente quando  $y^2 - x > 0$ , ou seja,  $x < y^2$ , o domínio de  $f \in D = \{(x, y) | x < y^2\}$ . Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola  $x = y^2$ . (Veja a Figura 3.)

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimadores numéricos de seus valores.

EXEMPLO 2  $\Box$  Em regiões com inverno severo, o índice sensação térmica é freqüentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da rapidez do vento v. Assim W é uma função de T e de v, e podemos escrever W = f(T, v). A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e Serviço Metereológico do Canadá.

TABELA 1 Índice sensação térmica como função da temperatura do ar e rapidez do vento

|    | $T^{v}$ | 5   | 10  | 15  | 20  | 25   | 30   | 40  | 50  | 60  | 70  | 80  |
|----|---------|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|    | 5       | 4   | 3   | 2   | 100 | ge X | 0    | 1   | -1  | 2   | -2  | 3   |
| 3  | 0       | -2  | -3  | -4  | 5   | -6   | -6   | -7  | -8  | -9  | -9  | -10 |
|    | -5      | -7  | -9  | -11 | -12 | -12  | ~ i3 | 14  | -15 | -16 | -16 | -17 |
|    | -10     | -13 | 15  | -17 | -18 | -19  | -20  | -21 | -22 | 23  | 23  | -24 |
|    | -15     | 19  | 21  | -23 | -24 | -25  | -26  | 27  | 29  | -30 | -30 | 31  |
| H. | -20     | -24 | -27 | -29 | -30 | -32  | -33  | 34  | 35  | -36 | -37 | -38 |
|    | -25     | -30 | -33 | -35 | -37 | -38  | -39  | -41 | -42 | -43 | -44 | -45 |
|    | -30     | -36 | 39  | 41  | -43 | -44  | -46  | 48  | -49 | -50 | -51 | 52  |
|    | -35     | -41 | -45 | 48  | 49  | -51  | -52  | -54 | -56 | -57 | -58 | -60 |
|    | -40     | 47  | 51  | -54 | -56 | -57  | 59   | -61 | 63  | -64 | -65 | -67 |
| ι  |         |     |     |     |     |      |      | -   |     |     |     |     |

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura  $é-5^{\circ}C$  e a rapidez do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de  $-15^{\circ}C$  sem vento. Portanto

$$f(-5,50) = -15$$

ENCIMPLO S — Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período 1899-1922. Eles consideraram uma visão simplificada onde a produção é determinada pela quantidade de trabalho e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo provou-se impressionantemente razoável. A função utilizada para modelar a produção era da forma

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

onde P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano); L, a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e K, a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, vamos mostrar como obter a Equação 1 com algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base, e P, L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens do valor de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

$$P(L, K) = 1,01L^{0.75}K^{0.25}$$

(Veja o Exercício 71 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1,01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161,9$$

$$P(194, 407) = 1,01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção (1) foi usada posteriormente em muitos ajustes, de firmas individuais até para questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função** de produção de Cobb-Douglas. Seu domínio é  $\{(L, K) | L \ge 0, K \ge 0\}$ , pois, como L e K representam trabalho e capital, não podem ser negativos.

EXEMPLO 4 

Determine o domínio e a imagem de

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

SOLUÇÃO O domínio de q é

$$D = \{(x, y) | 9 - x^2 - y^2 \ge 0\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 9\}$$

que é o disco com centro (0, 0) e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de q é

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

TABELA 2

| IABELA 2 |       |     |      |  |  |  |  |  |  |
|----------|-------|-----|------|--|--|--|--|--|--|
| Anc      | P     | L . | 407  |  |  |  |  |  |  |
| 1899     | 100   | 189 | 190  |  |  |  |  |  |  |
| 1900     | 101   | 105 | 107  |  |  |  |  |  |  |
| 1901     | 112   | 110 | 114  |  |  |  |  |  |  |
| 1902     | 122   | 117 | 122  |  |  |  |  |  |  |
| 1903     | 124   | 122 | 131  |  |  |  |  |  |  |
| 1904     | 122   | 121 | 138  |  |  |  |  |  |  |
| 1905     | 143   | 125 | 165  |  |  |  |  |  |  |
| 1906     | 152   | 134 | 1.53 |  |  |  |  |  |  |
| 1907     | 151   | 140 | 176  |  |  |  |  |  |  |
| 1908     | 126   | 123 | 185  |  |  |  |  |  |  |
| 1909     | 155   | 143 | 198  |  |  |  |  |  |  |
| 1910     | 159   | 147 | 208  |  |  |  |  |  |  |
| 1911     | 153   | 148 | 216  |  |  |  |  |  |  |
| 1912     | 177   | 135 | 226  |  |  |  |  |  |  |
| 1913     | 184   | 156 | 235  |  |  |  |  |  |  |
| 1914     | 169   | 152 | 244  |  |  |  |  |  |  |
| 1915     | 189   | 156 | 265  |  |  |  |  |  |  |
| 1916     | 225   | 183 | 298  |  |  |  |  |  |  |
| 1917     | 227   | 198 | 335  |  |  |  |  |  |  |
| 1918     | 223   | 201 | 366  |  |  |  |  |  |  |
| 1919     | 218   | 195 | 387  |  |  |  |  |  |  |
| 1920     | 231   | 194 | 407  |  |  |  |  |  |  |
| 1921     | 179.  | 146 | 417  |  |  |  |  |  |  |
| 1922     | 240 - | (6) | 433  |  |  |  |  |  |  |

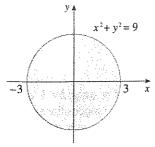


FIGURA 4 Domínio de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 

Como z é a raiz quadrada positiva,  $z \ge 0$ . Temos também

$$9 - x^2 - y^2 \le 9 \implies \sqrt{9 - x^2 - y^2} \le 3$$

Assim a imagem é

$$\{z \mid 0 \le z \le 3\} = [0, 3]$$

### Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em  $\mathbb{R}^3$  tal que z = f(x, y) e (x, y) pertençam a D.

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação y = f(x), o gráfico de uma função com duas variáveis é uma superfície S com equação z = f(x, y). Podemos enxergar a superfície S de f como estando diretamente em cima ou abaixo de seu domínio D que está no plano xy (veja a Figura 5).

EXEMPLO 5  $\Box$  Esboce o gráfico da função f(x, y) = 6 - 3x - 2y.

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação z = 6 - 3x - 2y, ou 3x + 2y + z = 6, que representa um plano. Para desenhar o plano, primeiro achamos os interceptos. Fazendo y = z = 0 na equação obtemos x = 2 como o interceptor. Analogamente, o intercepto y = 3 e o intercepto z = 6. Isso nos ajuda a esboçar a parte do gráfico que se encontra no primeiro octante (Figura 6).

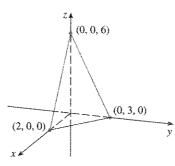


FIGURA 6

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

25

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma função tem a equação z = ax + by + c, ou ax + by - z + c = 0, e portanto é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

ERE VPLO & The Desenhe o gráfico de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

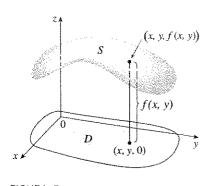


FIGURA 5

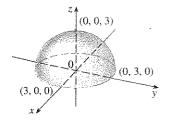


FIGURA 7
Gráfico de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos  $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ , ou  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas como  $z \ge 0$ , o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

residencia Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas  $P(L,K)=1,01L^{0.75}K^{0.25}$ .

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de P para os valores de trabalho L e capital K que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os traços verticais para desenhar a superfície. Vemos desses traços que o valor da produção P aumenta com o crescimento de L ou de K, como esperado.

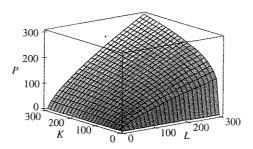


FIGURA 8

Example 5 de Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ .

SOLUÇÃO Note que h(x, y) é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y), e seu domínio é  $\mathbb{R}^2$ , o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto  $[0, \infty)$  de todos os reais não-negativos. [Note que  $x^2 \ge 0$  e  $y^2 \ge 0$ , portanto  $h(x, y) \ge 0$  para todo x e y.]

O gráfico de h é dado pela equação  $z = 4x^2 + y^2$ , que é um parabolóide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 da Seção 12.6. Os traços horizontais são elipses e os verticais, parábolas (veja a Figura 9).

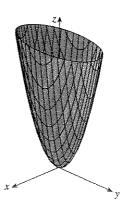
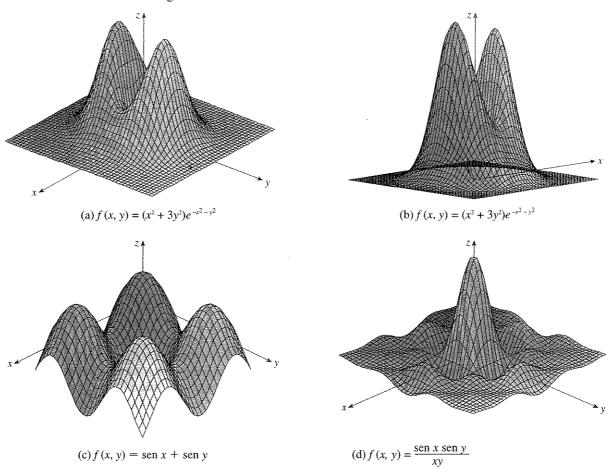


FIGURA 9 Gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ 

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os traços nos planos verticais x = k e y = k para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

FIGURA 10

A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Note que obtemos uma melhor visão da função quando a rodamos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico da f é achatado e próximo do plano xy exceto perto da origem; isso se dá porque  $e^{-x^2-y^2}$  é muito pequeno quando x ou y é muito grande.



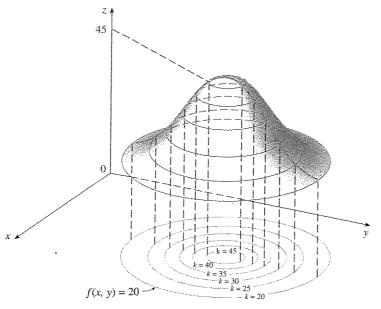
#### Curvas de Nível

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: o diagrama de setas e os gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contornos, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar curvas de contorno ou curvas de nível.

**Definição** As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação f(x, y) = k, onde k é uma constante (na imagem de f).

Uma curva de nível f(x, y) = k é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os traços horizontais. As curvas de nível f(x, y) = k são apenas traços do gráfico de f no plano horizontal z = k projetado sobre o plano xy. Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizálas elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função



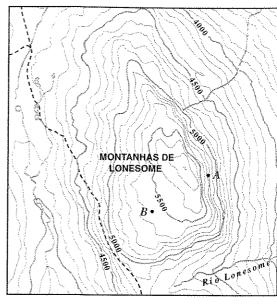


FIGURA 11 FIGURA 12

colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela é mais ou menos plana onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura introduzida no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa-múndi indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas.

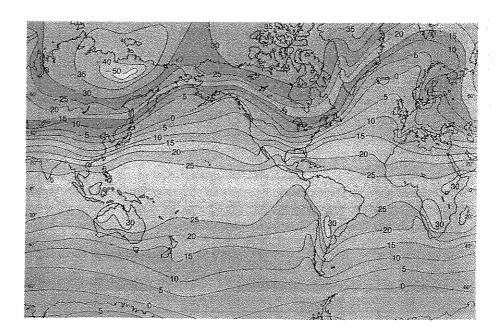


FIGURA 13 Temperaturas médias ao nível do mar no mês de janeiro, em graus Celsius

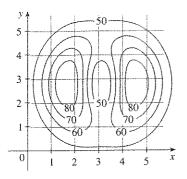


FIGURA 14

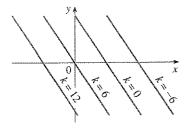


FIGURA 15 Mapa de contorno de f(x, y) = 6 - 3x - 2y

**EXEMPLO 9**  $\Box$  A Figura 14 mostra um mapa de contorno para uma função f. Utilize-o para estimar os valores de f(1, 3) e f(4, 5).

SOLUÇÃO O ponto (1,3) está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1,3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que

$$f(4,5)\approx 56$$

**EXEMPLO 10**  $\square$  Esboce o gráfico das curvas de nível da função f(x, y) = 6 - 3x - 2y para os valores k = -6, 0, 6, 12.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k$$
 ou  $3x + 2y + (k - 6) = 0$ 

ou seja, uma família de retas com inclinação  $-\frac{3}{2}$ . As quatro curvas de nível particulares pedidas com k=-6, 0, 6 e 12 são 3x+2y-12=0, 3x+2y-6=0, 3x+2y=0 e 3x+2y+6=0. Elas estão apresentadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de f é um plano (veja a Figura 6).

EXEMPLO 11 D Esboce o gráfico das curvas de nível das funções

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$
 para  $k = 0, 1, 2, 3$ 

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$\sqrt{9-x^2-y^2}=k$$
 ou  $x^2+y^2=9-k^2$ 

que corresponde a uma família de circunferências concêntricas com centro em (0,0) e raio  $\sqrt{9-k^2}$ . Os casos k=0,1,2,3 estão mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas da superfície e compare com o gráfico de g (um hemisfério) da Figura 7.

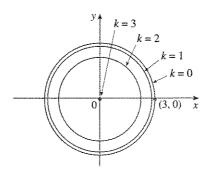


FIGURA 16 Mapa de contorno de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 

**EXEMPLO 12**  $\square$  Esboce algumas curvas de nível da função  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ .

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 = k$$
 ou  $\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 

que, para k > 0, descrevem uma família de elipses com semi-eixos  $\sqrt{k}/2$  e  $\sqrt{k}$ . A Figura 17(a) mostra o diagrama de contornos de h desenhado por computador com curvas de nível correspondendo a  $k = 0,25; 0,5; 0,75, \ldots, 4$ . A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para termos o gráfico de h (um parabolóide elíptico) que coincide com os traços horizontais. Vemos da Figura 17 como o gráfico de h é montado de suas curvas de nível.

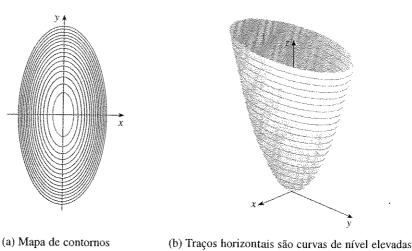


FIGURA 17 O gráfico de  $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ é formado levantando-se as curvas de nível.

**EXEMPLO 13** □ Trace as curvas de nível para a função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Na Figura 18 usamos o computador para desenhar os contornos da função produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1,01P^{0.75}K^{0.25}$$

$$\begin{array}{c} K \\ 300 \\ \hline \\ 100 \\ \hline \\ 100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 220 \\ 140 \\ \hline \\ \end{array}$$

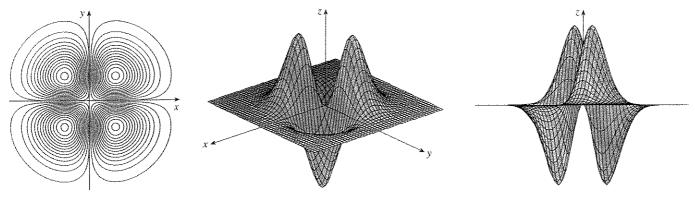
$$\begin{array}{c} 100 \\ 200 \\ 300 \\ \end{array}$$

FIGURA 18

As curvas de nível estão indicadas com os valores da produção P correspondentes. Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores de quantidade de trabalho L e de capital investido K que resultam na produção P=140. Vemos que, para um valor fixo de P, quando L aumenta K diminui, e vice-versa.

Para alguns propósitos, o mapa de contornos (ou diagrama de contornos) é mais útil que um gráfico. Certamente isso é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é verdadeiro quando queremos fazer uma estimativa de valores, como no Exemplo 9.

A Figura 19 mostra algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Note que as curvas de nível apresentadas na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde, no gráfico mostrado na parte (d), a uma mudança de inclinação muito acentuada nessa região.



(a) Curvas de nível de  $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ 

(b) Duas vistas de  $f(x, y) = -xye^{-x^{1-y^2}}$ 

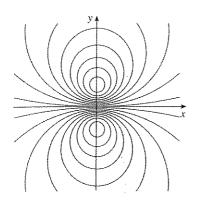
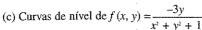
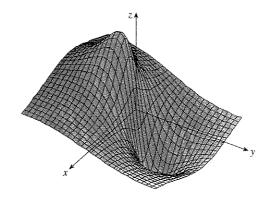


FIGURA 19





(d) 
$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

#### Funções com Três ou Mais Variáveis

Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$  um único número real denotado por f(x, y, z). Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude y e da longitude x do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever T = f(x, y, t).

EXEMPLO 14 Determine o domínio de

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUÇÃO A expressão para f(x, y, z) é definida desde que z - y > 0, de modo que o domínio de f seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > y\}$$

Isso é o semi-espaço constituído por todos os pontos que estão acima do plano z = y.

20

É muito difícil visualizar uma função f de três variáveis por seu gráfico, uma vez que estaríamos em um espaço de quatro dimensões. Entretanto ganhamos algum conhecimento de f desenhando suas **superfícies de nível**, que são as superfícies com equação f(x, y, z) = k, onde k é uma constante. Se um ponto (x, y, z) se move ao longo de uma superfície de nível, o valor de f(x, y, z) permanece fixo.

EXEMPLO 15 🗆 Determine as curvas de superfície da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUÇÃO As superfícies de nível são  $x^2 + y^2 + z^2 = k$ , onde  $k \ge 0$ . Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio  $\sqrt{k}$ . (Veja a Figura 20.) Então, quando (x, y, z) varia sobre uma das esferas com centro O, o valor de f(x, y, z) permanece fixo.

As funções com qualquer número de variáveis também podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número real  $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  à n-upla  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  de números reais. Denotamos por  $\mathbb{R}^n$  o conjunto de todas as n-uplas. Por exemplo, se uma fábrica de alimentos usa n ingredientes diferentes para manufaturar um determinado alimento, sendo  $c_i$  seu custo por unidade do i-ésimo ingrediente, e se são necessárias  $x_i$  unidades do i-ésimo ingrediente, então o custo total C dos ingredientes é uma função de n variáveis  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ :

A função f é uma função real cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Algumas vezes utilizaremos a notação vetorial para escrever essas funções de forma mais compacta: se  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ , frequentemente escreveremos  $f(\mathbf{x})$  no lugar de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Com essa notação podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde  $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$  e  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$  denota o produto escalar dos vetores  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{x}$  em  $V_n$ .

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  e os vetores de posição  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$  em  $V_n$ , podemos olhar de três formas diferentes para a função f definida em um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ :

- 1. Como uma função de n variáveis reais  $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- **2.** Como uma função de um único ponto variável  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- 3. Como uma função de um vetor variável  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista têm sua utilidade.

## 14.1 Exercícios

- No Exemplo 2 consideramos a função W = f(T, v), onde W era o índice sensação térmica ocasionado pelo vento; T a temperatura real; e v, a rapidez do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
  - (a) Qual o valor de f(-15, 40)? Qual seu significado?

 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 

FIGURA 20

- (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para que valores de  $v \in f(-20, v) = -30$ ?". Em seguida, responda à questão.
- (c) Descreva o significado da questão "Para que valores de T vale f(T, 20) = -49?" Em seguida, responda à questão.
- (d) Qual o significado da função W = f(-5, v)? Descreva o comportamento dessa função.
- (e) Qual o significado da função W = f(T, 50)? Descreva o comportamento dessa função.

2. O índice I de temperatura-umidade (ou simplesmente Umidex) em função da umidade I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que possamos escrever I = f(T, h). A tabela seguinte com os valores de I foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Oceanos e Atmosfera dos Estados Unidos.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

|                       | Umidade relativa (%) |    |     |     |     |     |     |  |  |  |
|-----------------------|----------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|--|--|
|                       | T                    | 20 | 30  | 40  | 50  | 60  | 70  |  |  |  |
| (°F)                  | 80                   | 77 | 78  | 79  | 81  | 82  | 83  |  |  |  |
| Temperatura real (°F) | 85                   | 82 | 84  | 86  | 88  | 90  | 93  |  |  |  |
| atura                 | 90                   | 87 | 90  | 93  | 96  | 100 | 106 |  |  |  |
| mper                  | 95                   | 93 | 96  | 101 | 107 | 114 | 124 |  |  |  |
| Te                    | 100                  | 99 | 104 | 110 | 120 | 132 | 144 |  |  |  |

- (a) Qual é o valor de f(95, 70)? Qual seu significado?
- (b) Para que valor de h temos f(90, h) = 100?
- (c) Para que valor de T temos f(T, 50) = 88?
- (d) Qual o significado de I = f(80, h) e I = f(100, h)? Compare o comportamento dessas duas funções de h.
- 3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L,K) = 1,01L^{0.75}K^{0.25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se a quantidade de trabalho e a de capital investido forem dobradas. É verdade também para uma função de produção genérica  $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ ?

4. O índice sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte equação:

$$W(T, v) = 13,12 + 0.6215T - 11,37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

- A altura das ondas h em um mar aberto depende da rapidez do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma intensidade. Os valores da função h = f(v, t) dados em pés, são apresentados na tabela que se segue.
  - (a) Qual é o valor de f(40, 15)? Qual seu significado?
  - (b) Qual o significado da função h = f(30, t)? Descreva seu comportamento.
  - (c) Qual o significado da função h = f(v, 30)? Descreva seu comportamento.

#### Duração (horas)

|                     | v $t$ | 5  | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---------------------|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| (nós)               | 10    | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  |
| nto (m              | 15    | 4  | 4  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  |
| o ver               | 20    | 5  | 7  | 8  | 8  | 9  | 9  | 9  |
| ade d               | 30    | 9  | 13 | 16 | 17 | 18 | 19 | 19 |
| Velocidade do vento | 40    | 14 | 21 | 25 | 28 | 31 | 33 | 33 |
| Ve                  | 50    | 19 | 29 | 36 | 40 | 45 | 48 | 50 |
|                     | 60    | 24 | 37 | 47 | 54 | 62 | 67 | 69 |
|                     |       |    |    |    |    |    |    |    |

- **6.** Seja  $f(x, y) = \ln(x + y 1)$ .
  - (a) Estime f(1, 1).
  - (b) Estime f(e, 1).
  - (c) Determine o domínio de f.
  - (d) Estabeleça a imagem de f.
- 7. Seja  $f(x, y) = x^2 e^{3xy}$ .
  - (a) Calcule f(2, 0).
  - (b) Determine o domínio de f.
  - (c) Estipule a imagem de f.
- 8. Determine e esboce o domínio da função  $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$ . Qual é a imagem da f?
- **9.** Seja  $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$ .
  - (a) Calcule f(2, -1, 6).
  - (b) Estabeleça o domínio de f.
  - (c) Determine a imagem f.
- **10.** Seja  $g(x, y, z) = \ln(25 x^2 y^2 z^2)$ .
  - (a) Calcule q(2, -2, 4).
  - (b) Determine o domínio de q.
  - (c) Estipule a imagem de g.

11-20 Determine e faça o esboço do domínio da função.

- **11.**  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
- **12.**  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- **13.**  $f(x, y) = \ln(9 x^2 9y^2)$  **14.**  $f(x, y) = \frac{x 3y}{x + 3y}$
- **15.**  $f(x, y) = \frac{3x + 5y}{x^2 + y^2 4}$
- **16.**  $f(x, y) = \sqrt{y x} \ln(y + x)$
- $f(x, y) = \frac{\sqrt{y x^2}}{1 x^2}$
- **18.**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 1} + \ln(4 x^2 y^2)$
- **19.**  $f(x, y, z) = \sqrt{1 x^2 y^2 z^2}$
- **20.**  $f(x, y, z) = \ln(16 4x^2 4y^2 z^2)$

**21.** 
$$f(x, y) = 3$$

**22.** 
$$f(x, y) = y$$

**23.** 
$$f(x, y) = 1 - x - y$$

**24.** 
$$f(x, y) = \cos x$$

**25.** 
$$f(x, y) = 1 - x^2$$

**24.** 
$$f(x, y) = \cos x$$
  
**26.**  $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ 

**27.** 
$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$$

**28.** 
$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$$

**29.** 
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

30. Case a função com o gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

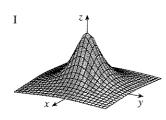
(a) 
$$f(x, y) = |x| + |y|$$

$$f(x,y) = |xy|$$

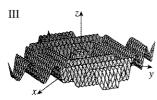
(d) 
$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$$

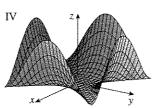
(e) 
$$f(x, y) = (x - y)^2$$

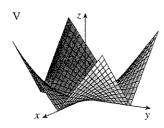
$$f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$$

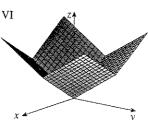




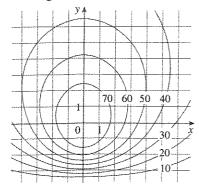




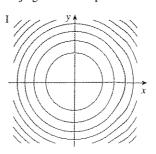


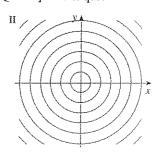


31. É mostrado o mapa de contorno para a função f. Use-o para estimar o valor de f(-3, 3) e f(3, -2). O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?



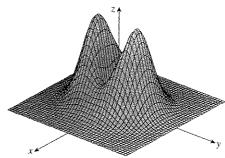
32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é da função f cujo gráfico é um cone. O outro é para uma função gcujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?



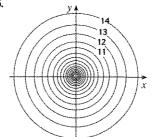


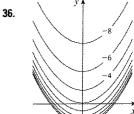
33. Localize os pontos A e B no mapa das Montanhas de Lonesome (Figura 12). Qual a descrição do terreno perto de A?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.



35-36 □ Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.





37-44 🗆 Faça o mapa de contornos da função mostrando várias curvas de nível.

**37.** 
$$f(x, y) = xy$$

**38.** 
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

**39.** 
$$f(x, y) = y - \ln x$$

**40.** 
$$f(x, y) = e^{y/x}$$

**41.** 
$$f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$42. \ f(x,y) = y \sec x$$

**43.** 
$$f(x, y) = x - y^2$$

**44.** 
$$f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$$

45-46 □ Faça o esboço do diagrama de contornos e do gráfico da função e compare-os.

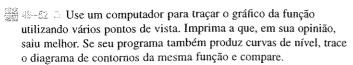
$$A5 \quad f(x, y) = x^2 + 0y^2$$

**45.** 
$$f(x, y) = x^2 + 9y^2$$
  
**46.**  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ 

47. Uma camada fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura T(x, y) no ponto (x, y). As curvas de nível de Tsão chamadas isotérmicas porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

**48.** Se V(x, y) é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas curvas equipotenciais, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de  $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , onde c é uma constante positiva.



**49.** 
$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

**50.** 
$$f(x, y) = \sin(ye^{-x})$$

**51.** 
$$f(x, y) = xy^2 - x^3$$
 (sela do macaco)

**52.** 
$$f(x, y) = xy^3 - yx^3$$
 (sela do cachorro)

53-58 Tase a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na página 899) e (b) com seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

**53.** 
$$z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

**54.** 
$$z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$$

$$55 \ z = \frac{1}{x^2 + 4y^2}$$

**56.** 
$$z = x^3 - 3xy^2$$

**58.** 
$$z = \sin^2 x + \frac{1}{4}y^2$$

58-62 □ Descreva as superfícies de nível da função.

**59** 
$$f(x, y, z) = x + 3y + 5z$$

**60.** 
$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$$

**61.** 
$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

**62.** 
$$f(x, y, z) = x^2 - y^2$$

3-4 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

**63** (a) 
$$g(x, y) = f(x, y) + 2$$

(b) 
$$g(x, y) = 2f(x, y)$$

(c) 
$$g(x, y) = -f(x, y)$$

(d) 
$$g(x, y) = 2 - f(x, y)$$

**64.** (a) 
$$g(x, y) = f(x - 2, y)$$
  
(c)  $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$ 

(b) 
$$g(x, y) = f(x, y + 2)$$

🌋 🏗 - 🕏 🗀 Paça uso do computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tarnanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E os "mínimos locais"?

**65.** 
$$f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$$

**66.** 
$$f(x, y) = xye^{-x^2-y}$$

87-88 🗆 Utilize o computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

**67.** 
$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

**68.** 
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- 69. Utilize o computador para estudar o comportamento da família de funções  $f(x, y) = e^{cx^2 + y^2}$ . Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?
- **70.** Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$e \qquad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
Em geral, se  $g$  é uma função de uma variável, como obter o

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gráfico de  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  a partir do gráfico de g?

71. (a) Mostre que, tomando logaritmos, uma função generalizada de Cobb-Douglas  $P=bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$  pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

- (b) Se tomarmos  $x = \ln(L/K)$  e  $y = \ln(P/K)$ , a equação da parte (a) se tornará uma equação linear  $y = \alpha x + \ln b$ . Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de ln(L/K) e ln(P/K) para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão através dos pontos  $(\ln(L/K))$  e  $\ln(P/K)$ .
- (c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é  $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}.$

#### 142 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
quando  $x$  e  $y$  se aproximam de 0 [e portanto o ponto  $(x,y)$  se aproxima da origem].

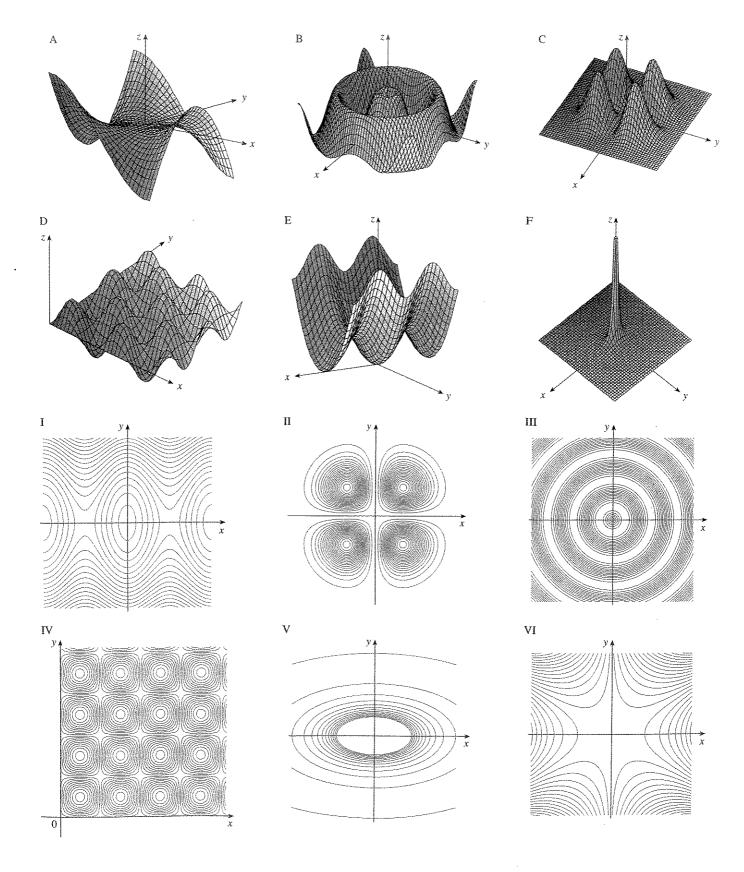


TABELA 1 Valores de f(x, y)

| x    | -1,0  | -0,5  | -0,2  | 0     | 0,2   | 0,5   | 1.0   |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -1,0 | 0,455 | 0,759 | 0,829 | 0,841 | 0,829 | 0,759 | 0,455 |
| -0,5 | 0,759 | 0,959 | 0.986 | 0,990 | 0,986 | 0,959 | 0,759 |
| -0,2 | 0,829 | 0,986 | 0,999 | 1,000 | 0,999 | 0,986 | 0,829 |
| 0    | 0,841 | 0,990 | 1,000 |       | 1,000 | 0,990 | 0,841 |
| 0,2  | 0,829 | 0,986 | 0,999 | 1,000 | 0.999 | 0,986 | 0,829 |
| 0,5  | 0,759 | 0,959 | 0,986 | 0,990 | 0,986 | 0,959 | 0,759 |
| 1,0  | 0,455 | 0.759 | 0,829 | 0,841 | 0,829 | 0,759 | 0,455 |

TABELA 2 Valores de g(x, y)

| x y  | -1,0   | -0,5   | -0,2   | 0     | 0,2    | 0,5    | 1,0    |
|------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| -1,0 | 0,000  | 0,600  | 0,923  | 1,000 | 0,923  | 0,600  | 0,000  |
| -0,5 | -0,600 | 0,000  | 0,724  | 1,000 | 0,724  | 0,000  | -0,600 |
| -0,2 | -0,923 | -0,724 | 0.000  | 1,000 | 0,000  | -0,724 | -0,923 |
| 0    | 1,000  | -1,000 | -1,000 |       | -1,000 | -1,000 | 1,000  |
| 0,2  | -0,923 | -0,724 | 0,000  | 1,000 | 0,000  | -0,724 | -0,923 |
| 0,5  | -0,600 | 0,000  | 0,724  | 1,000 | 0,724  | 0,000  | -0,600 |
| 1,0  | 0,000  | 0,600  | 0,923  | 1,000 | 0,923  | 0,600  | 0,000  |

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de f(x, y) e g(x, y), com precisão até três decimais, para os pontos (x, y) próximos da origem. (Note que a função não está definida na origem.) Parece que, quando (x, y) se aproxima de (0, 0), os valores de f(x, y) se aproximam de 1, ao passo que os valores de g(x, y) não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1\qquad \text{e}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad \text{n\~{a}o existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

para indicar que os valores de f(x, y) se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f. Em outras palavras, podemos tomar os valores de f(x, y) tão próximos de L quanto o desejado escolhendo pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto (a, b), mas não iguais a (a, b). Uma definição mais precisa é a seguinte:

1 Definição\* Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o limite de f(x, y) quando (x, y)tende a (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$
 sempre que  $(x, y) \in D$  e  $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ 

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad f(x, y) \to L \text{ quando } (x, y) \to (a, b)$$

Note que |f(x, y) - L| corresponde à distância entre os números f(x, y) e L, e  $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$  é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b). Assim, a Definição 1 diz que a distância entre f(x, y) e L pode ser arbitrariamente pequena se

<sup>\*</sup>NT: Na definição 1 acima, ao conjunto  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$ , onde o número real  $\delta$  é major que zero, damos o nome de bola aberta de cen $tro\ em\ (a,b)\ e\ raio\ \delta$ . "No plano, a bola aberta de centro em (a,b) e raio  $\delta$  é o conjunto de todos os pontos "interiores" ao círculo do centro em (a,b) e raio  $\delta$ ".

tornarmos a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se nos é dado um pequeno intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  em torno de L, então podemos determinar uma bola aberta  $D_{\delta}$  com centro em (a, b) e raio  $\delta > 0$  tal que f leve todos os pontos de  $D_{\delta}$  [exceto possivelmente (a, b)] no intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

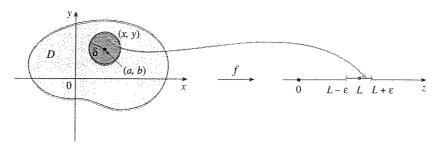


FIGURA 1

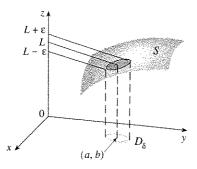


FIGURA 2

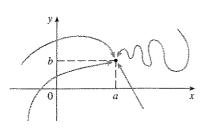


FIGURA 3

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície S representa o gráfico de f. Se  $\varepsilon > 0$  é dado, podemos achar  $\delta > 0$  tal que, se (x, y) pertence à bola aberta  $D_{\delta}$  e  $(x, y) \neq (a, b)$ , sua imagem em S estará entre os planos horizontais  $z = L - \varepsilon$  e  $z = L + \varepsilon$ .

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x se aproximar de a, só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos do Capítulo 2 (Volume I) que, se  $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ , então  $\lim_{x\to a} f(x)$  não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f.

A Definição 1 diz que a distância entre f(x, y) e L pode se tornar arbitrariamente pequena fazendo a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição se refere somente à *distância* entre (x, y) e (a, b); não se refere à direção de aproximação. Portanto, se o limite existe, f(x, y) deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b). Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais f(x, y) tem limites diferentes, segue então que  $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$  não existe.

Se  $f(x, y) \to L_1$  quando  $(x, y) \to (a, b)$  ao longo do caminho  $C_1$  e  $f(x, y) \to L_2$  quando  $(x, y) \to (a, b)$  ao longo do caminho  $C_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ , então  $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$  não existe.

**EXEMPLO 1** 
$$\square$$
 Mostre que  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$  não existe.

SOLUÇÃO Seja  $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ . Vamos primeiro aproximar (0, 0) ao longo do eixo x. Tomando y = 0, temos  $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$  para todo  $x \neq 0$ , logo

$$f(x, y) \rightarrow 1$$
 quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo  $x$ 

Agora, vamos nos aproximar ao longo do eixo y colocando x = 0. Assim

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \text{ para todo } y \neq 0, \text{ logo}$$

$$f(x, y) \rightarrow -1$$
 quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo y

(Veja a Figura 4.) Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.)

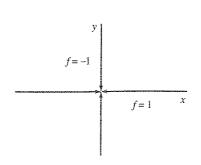


FIGURA 4

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Se  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ , será que  $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$  existe?

SOLUÇÃO Se y = 0, temos  $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$ . Portanto

$$f(x, y) \rightarrow 0$$
 quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo x

Se x = 0, então  $f(0, y) = 0/y^2 = 0$ . Assim

$$f(x, y) \rightarrow 0$$
 quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo y

Apesar de termos encontrado valores idênticos caminhando sobre os eixos, não podemos afirmar que esse limite exista, dado por 0. Vamos agora aproximar de (0, 0) ao longo de outra reta; por exemplo, y = x. Para todo  $x \neq 0$ ,

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Logo,  $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de y = x

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.

A Figura 6 nos dá uma idéia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta y = x corresponde ao fato de que  $f(x, y) = \frac{1}{2}$  para todos os pontos (x, y)dessa reta, exceto na origem.

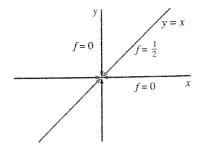
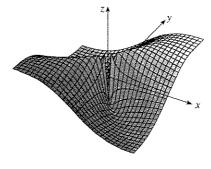


FIGURA 5

$$f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + y^2}$$



**EXEMPLO 3** 
$$\Box$$
 Se  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ , será que  $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$  existe?

SOLUÇÃO Considerando a solução do Exemplo 2, vamos tentar economizar tempo fazendo  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de uma reta não-vertical que passa pela origem. Tomemos y = mx, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto 
$$f(x, y) \to 0$$
 quando  $(x, y) \to (0, 0)$  ao longo de  $y = mx$ 

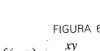
Logo, f tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não-vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante a existência do limite com valor 0, pois, se tomarmos agora  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo da parábola  $x = y^2$ , teremos

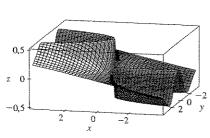
$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

2000

E assim 
$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$$
 quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de  $x = y^2$ 

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.





□ A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Note a cumeeira

sobre a parábola  $x = y^2$ 

FIGURA 7

200

Vamos agora olhar o caso onde o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Leis do Limite listadas na Seção 2.3 do Volume I podem ser estendidas para as funções de duas variáveis. O limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

**EXEMPLO 4** 
$$\Box$$
 Determine, se existir,  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ .

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não prova a existência do limite igual a 0, mas ao longo das parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$  também obtemos o limite 0, o que nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a 0.

Seja  $\varepsilon > 0$ . Oueremos achar  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

ou seja, 
$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon$$
 sempre que  $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 

Mas  $x^2 \le x^2 + y^2$  uma vez que  $y^2 \ge 0$ , logo  $x^2/(x^2 + y^2) \le 1$  e portanto

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Então, se escolhermos  $\delta = \varepsilon/3$  e seja  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , temos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \le 3\sqrt{x^2 + y^2} \le 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

□ Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de pela Definição 1. De (2) segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$$

e portanto a primeira desigualdade em (3) mostra que o limite dado é 0.

#### Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limite de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua,  $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ . Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

[4] Definição Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de f(x, y) variará de uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou ruptura.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma função polinomial de duas variáveis (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma  $cx^my^n$ , onde c é uma constante e m e n são números inteiros não-negativos. Uma função racional é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em (2) mostram que as funções f(x, y) = x, g(x, y) = y e h(x, y) = c são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f, g e h por multiplicação e adição, segue que todos os polinômios são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

**EXEMPLO 5** 
$$\square$$
 Calcule  $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$ .

SOLUÇÃO Como  $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$  é um polinômio, ela continua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

300

C

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Onde a função  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  é contínua?

SOLUÇÃO A função f é descontínua em (0, 0), pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto  $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ .

EXEMPLO 7 

Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui g está definida em (0, 0), mas ainda assim g é descontínua em 0, porque  $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y)$  não existe (veja o Exemplo 1).

EXEMPLO 8 

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

905

☐ A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

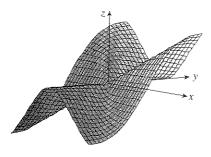


FIGURA 8

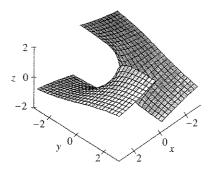


FIGURA 9 A função  $h(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$  é descontínua onde x = 0.

Sabemos que f é contínua para  $(x, y) \neq (0, 0)$  uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4 temos que

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em (0, 0), e, consequentemente, contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f, a função composta  $h = g \circ f$  definida por h(x, y) = g(f(x, y)) é também contínua.

**EXEMPLO 9**  $\square$  Onde a função  $h(x, y) = \arctan(y/x)$  é contínua?

SOLUÇÃO A função f(x, y) = y/x é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta x = 0. A função  $g(t) = \arctan t$  é contínua em qualquer lugar. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = arctg(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde x = 0. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y.

#### Funções com Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de f(x, y, z) se aproximam do número L quando o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de um caminho qualquer no domínio de f. Como a distância entre os dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em  $\mathbb{R}^3$  é dada por  $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ , podemos escrever em uma forma precisa a definição como se segue: para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$
 sempre que  $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$ 

e (x, y, z) pertence ao domínio de f.

A função f é contínua em (a, b, c) se

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de  $\mathbb{R}^3$ , exceto onde  $x^2+y^2+z^2=1$ . Ou seja, é descontínua na esfera de centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no final da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como se segue.

Se f é definida em um subconjunto D de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\lim_{x\to a} f(x) = L$  significa que para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$
 sempre que  $\mathbf{x} \in D$  e  $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ 

Note que se n = 1, então  $\mathbf{x} = x$  e  $\mathbf{a} = a$ , e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável simples. Para o caso n = 2, temos  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$  e  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ , de modo que (5) se torna a Definição 1. Se n = 3, então  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$ , e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})$$

## Exercícios

- 1. Suponha que  $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$ . O que podemos dizer do valor de f(3, 1)? E se a função f for contínua?
- 2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
  - (a) A temperatura externa como função da latitude, longitude e tempo.
  - (b) Elevação (altura acima do nível do mar) como função da longitude, latitude e tempo.
  - (c) Custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e tempo gasto.

3-4  $\square$  Utilize a tabela de valores numéricos de f(x, y) para (x, y)perto da origem para conjecturar sobre o limite de f(x, y) quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Em seguida explique por que sua afirmação está

**3.** 
$$f(x, y) = \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$$
 **4.**  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$ 

**4.** 
$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$$

5-20 □ Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. 
$$\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$$
 6.  $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy \cos(x-2y)$   
 $x^2$   $x^2 + \sin^2 y$ 

**6.** 
$$\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy \cos(x-2y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

8. 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$$

3. 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$$

**9.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$$
 **10.**  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4+y^4}$ 

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

12. 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

13. 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

**13.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$
 **14.**  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+2y^2}$ 

**15.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

**16.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

17. 
$$\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy} \sin(\pi z/2)$$

17. 
$$\lim_{(x, y, z) \to (3, 0, 0)} e^{-xy} \operatorname{sen}(\pi z/2)$$
18. 
$$\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

**20.** 
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

🚰 21-22 🗆 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

**21.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$$

**22.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

23-24  $\Box$  Determine h(x, y) = g(f(x, y)) e o conjunto no qual  $h \in$ 

**23.** 
$$g(t) = t^2 + \sqrt{t}$$
,  $f(x, y) = 2x + 3y - 6$ 

**24.** 
$$g(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}, \quad f(x,y) = x^2 - y$$

🎏 25-25 🗆 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida utilize fórmulas para explicar o que você observou.

**25.** 
$$f(x, y) = e^{1/(x-y)}$$

**26.** 
$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

27-36 🗆 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

**27.** 
$$F(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{e^x - y^2}$$

**28.** 
$$F(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

**29.** 
$$F(x, y) = arctg(x + \sqrt{y})$$

**30.** 
$$F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$$

31. 
$$G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

**32.** 
$$G(x, y) = -\sin^{-1}(x^2 + y^2)$$

**33.** 
$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$$
 **34.**  $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$ 

**34.** 
$$f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$$

35. 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

36. 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

37-38 🗆 Utilize as coorden adas polares para determinar o limite. [Se  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares, o ponto (x, y) com  $r \ge 0$ , note que  $r \to 0^+$  quando  $(x, y) \to (0, 0)$ .]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

**38.** 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

39. Utilize as coordenadas esféricas para achar

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

40. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\sec(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e adivinhamos que  $f(x, y) \rightarrow 1$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  com base em evidências numéricas. Utilize as coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

- **41.** Mostre que a função f dada por  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ . [Dica: Considere  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ .]
- **42.** Se  $\mathbf{c} \in V_n$ , mostre que a função f dada por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$  é contínua em R".

### **Derivadas Parciais**

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a que o termômetro indica. O Serviço Nacional de Meteorologia norte-americano criou um índice de calor (também chamado índice de temperatura-umidade, ou Umidex, em alguns países) para descrever os efeitos combinados de temperatura e umidade. O índice de calor I é a temperatura que corresponde à sensação de calor quando a temperatura real é T e a umidade relativa do ar, H. Assim I é uma função de T e de H, e podemos escrever I = f(T, H). A tabela de valores de I a seguir é extraída de uma tabela compilada pelo Serviço Nacional de Meteorologia.

TABELA 1 Índice de calor I como função da temperatura e umidade Umidada ralativa (01)

|            |     |     |     | Un  | mdade r | elativa ( | %)  |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|---------|-----------|-----|-----|-----|-----|
|            | T   | 50  | 55  | 60  | 65      | 70        | 75  | 80  | 85  | 90  |
|            | 90  | 96  | 98  | 100 | 103     | 106       | 109 | 112 | 115 | 119 |
| emperatura | 92  | 100 | 103 | 105 | 108     | 112       | 115 | 119 | 123 | 128 |
| real       | 94  | 104 | 107 | 111 | 114     | 118       | 122 | 127 | 132 | 137 |
| (°F)       | 96  | 109 | 113 | 116 | 121     | 125       | 130 | 135 | 141 | 146 |
|            | 98  | 114 | 118 | 123 | 127     | 133       | 138 | 144 | 150 | 157 |
| 7          | 100 | 119 | 124 | 129 | 135     | 141       | 147 | 154 | 161 | 168 |

Te

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de H=70%, consideraremos o índice de calor como função da única variável T para um valor fixo de H. Vamos escrever g(T)=f(T,70). Assim g(T) descreve como o índice I de calor aumenta com a elevação da temperatura T para uma umidade relativa de 70%. A derivada de g quando  $T=96\,^{\circ}\mathrm{F}$  é a taxa de variação de I com relação a T quando  $T=96\,^{\circ}\mathrm{F}$ :

$$g'(96) = \lim_{h \to 0} \frac{g(96+h) - g(96)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96+h,70) - f(96,70)}{h}$$

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 tomando h=2 e -2:

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3,5$$

Tomando a média desses valores, podemos dizer que a derivada g'(96) é aproximadamente 3,75. Isso significa que, quando a temperatura real é de 96 °F e a umidade relativa é de 70%, o índice de calor aumenta a sensação de temperatura de 3,75 °F para cada grau que a temperatura real aumenta!

Olhemos agora para a linha assinalada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de  $T=96\,^{\circ}$ F. Os números da linha correspondem aos valores da função G(H)=f(96,H), que descrevem como o índice de calor sobe com o aumento de umidade relativa H quando a temperatura real é de  $T=96\,^{\circ}$ F. A derivada dessa função quando H=70% é a taxa de variação de I com relação a H quando H=70%:

$$G'(70) = \lim_{h \to 0} \frac{G(70+h) - G(70)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96, 70+h) - f(96, 70)}{h}$$

Tomando h = 5 e - 5, aproximamos o valor de G'(70) usando os valores tabelados:

$$G'(70) \approx \frac{G(75) - G(70)}{5} = \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65) - G(70)}{-5} = \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{-5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0.8$$

Tomando a média desses valores obtemos uma estimativa para  $G'(70) \approx 0.9$ . Isso nos diz que, quando a temperatura é de 96 °F e a umidade relativa é de 70%, o índice de calor aumenta em cerca de 0.9 °F para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y; por exemplo, fazendo y = b, onde b é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber, g(x) = f(x, b). Se g tem derivada em a, nós a chamaremos **derivada parcial de** f **em relação a** x **em** (a, b) e a denotaremos por  $f_x(a, b)$ . Assim,

$$f_x(a,b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x,b)$$

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 fica

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y em (a, b)**, denotada por  $f_y(a, b)$ , é obtida mantendo-se x fixo (x = a) e determinando-se a derivada ordinária em b da função G(y) = f(a, y):

$$f_{y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as razões de variação do índice de calor I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando T = 96 °F e H = 70% como se segue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75$$
  $f_H(96, 70) \approx 0.9$ 

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3,  $f_x$  e  $f_y$  se tornam funções de duas variáveis.

Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções  $f_x$  e  $f_y$  definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de  $f_x$ , podemos escrever  $f_1$  ou  $D_1f$  (para indicar a diferenciação em relação à *primeira* variável) ou  $\partial f/\partial x$ . Mas  $\partial f/\partial x$  não pode ser interpretada como a razão dos diferenciais.

Notação para as Derivadas Parciais Se z = f(x, y), escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é nos lembrarmos de que da Equação 1 a derivada parcial com relação a x é a derivada ordinária da função g de uma única variável obtida, mantendo-se fixo o valor de y. Então, temos a seguinte regra.

Regra para Determinar a Derivada Parcial de z = f(x, y)

- 1. Para achar  $f_x$ , olhe y como uma constante e diferencie f(x, y) com relação a x.
- **2.** Para achar  $f_y$ , olhe x como uma constante e diferencie f(x, y) com relação a y.

**EXEMPLO 1** G Se  $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ , determine  $f_x(2, 1)$  e  $f_y(2, 1)$ .

SOLUÇÃO Mantendo y constante e diferenciando em relação a x, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$
  
 $f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$ 

e assim

Mantendo x constante e diferenciando em relação a y, obternos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$
  
$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

#### Interpretação das Derivadas Parciais

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação z = f(x, y) representa a superfície S (o gráfico de f). Se f(a, b) = c, então o ponto P(a, b, c) pertence a S. Fixando y = b, restringimos nossa atenção à curva  $C_1$  na qual o plano vertical y = b intercepta S. (Ou seja,  $C_1$  é o traço de S no plano y = b.) Da mesma forma, o plano vertical x = a intercepta S na curva  $C_2$ . As curvas  $C_1$  e  $C_2$  passam pelo ponto P (veja a Figura 1).

Note que a curva  $C_1$  é o gráfico da função g(x) = f(x, b), de modo que a inclinação da tangente  $T_1$  em P é  $g'(a) = f_x(a, b)$ . A curva  $C_2$  é o gráfico da função G(y) = f(a, y), de modo que a inclinação da tangente  $T_2$  em P é  $G'(b) = f_y(a, b)$ .

Então, as derivadas parciais  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em P(a, b, c) aos traços  $C_1$  e  $C_2$  de S nos planos y = b e x = a.

Como vimos no caso da função índice de calor, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação. Se z = f(x, y), então  $\partial z/\partial x$  representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma,  $\partial z/\partial y$  representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Se  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , ache  $f_x(1, 1)$  e  $f_y(1, 1)$  e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO Temos

$$f_x(x, y) = -2x$$
  $f_y(x, y) = -4y$   
 $f_x(1, 1) = -2$   $f_y(1, 1) = -4$ 

O gráfico de f é o parabolóide  $z=4-x^2-2y^2$ , e o plano vertical y=1 intercepta-o na parábola  $z=2-x^2$ , y=1. (Como na discussão precedente, indicamos por  $C_1$  na Figura 2.) A inclinação da reta tangente à parábola no ponto (1, 1, 1) é  $f_x(1, 1)=-2$ .

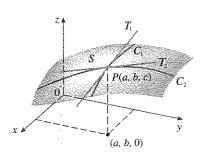
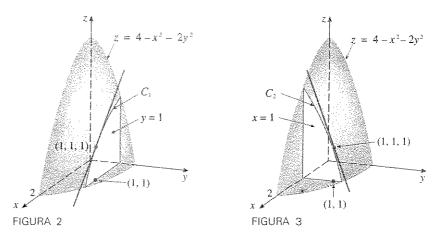


FIGURA 1 As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes  $C_1 \in C_2$ 

Da mesma forma, a curva  $C_2$  na qual o plano x = 1 intercepta o parabolóide é a parábola  $z = 3 - 2y^2$ , x = 1, e a inclinação da reta tangente em (1, 1, 1) é  $f_y(1, 1) = -4$ . (Veja a Figura 3.)



A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. A Parte (a) exibe o plano y=1 interceptando a superfície para formar a curva  $C_1$ , e a Parte (b) mostra  $C_1$  e  $T_1$ . [Usamos a equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$  para  $C_1$  e  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$  para  $T_1$ .] Do mesmo modo, a Figura 5 corresponde à Figura 3.

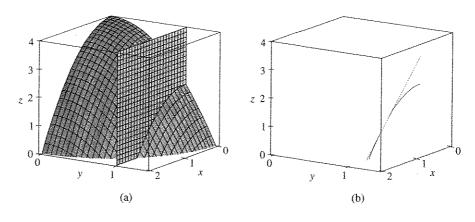


FIGURA 4

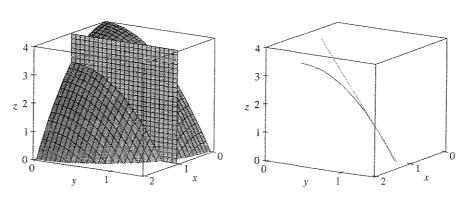


FIGURA 5

EXEMPLO 3 
$$\Box$$
 Se  $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$ , calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

SOLUÇÃO Usando a Regra da Cadeia para a função de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$

EXEMPLS 4  $\Box$  Determine  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$  se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUÇÃO Para achar  $\partial z/\partial x$ , derivamos implicitamente em relação a x, tomando o cuidado de tratar y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolvendo essa equação em relação a  $\partial z/\partial x$ , obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a y temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

#### Função de Mais do Que Duas Variáveis

Derivadas parciais podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x, y e z, então sua derivada parcial em relação a x é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e pode ser encontrada, olhando-se y e z como constantes e diferenciando-se f(x, y, z) com relação a x. Se w = f(x, y, z), então  $f_x = \partial w/\partial x$  pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretar geometricamente, porque o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se u é uma função de n variáveis,  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sua derivada parcial em relação à i-ésima variável xi é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Alguns sistemas algébricos computacionais podem plotar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis. A Figura 6 mostra o desenho da superfície definida implicitamente, dada no Exemplo 4.

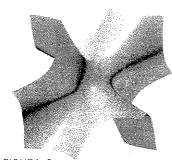


FIGURA 6

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EXEMPLO 5  $\Box$  Determine  $f_x$ ,  $f_y$ , e  $f_z$  se  $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$ .

SOLUÇÃO Mantendo constantes y e z e diferenciando em relação a x, temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma,

$$f_y = xe^{xy} \ln z$$
 e  $f_z = \frac{e^{xy}}{z}$ 

#### Derivadas de Major Ordem

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais  $(f_x)_x$ ,  $(f_x)_y$ ,  $(f_y)_x$  e  $(f_y)_y$ , chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f. Se z = f(x, y), usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto a notação  $f_{xy}$  (ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial x}$ ) significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y, ao passo que no cálculo de  $f_{yx}$  a ordem é invertida.

EXEMPLO 6 

Determine as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

SOLUÇÃO No Exemplo 1 achamos que

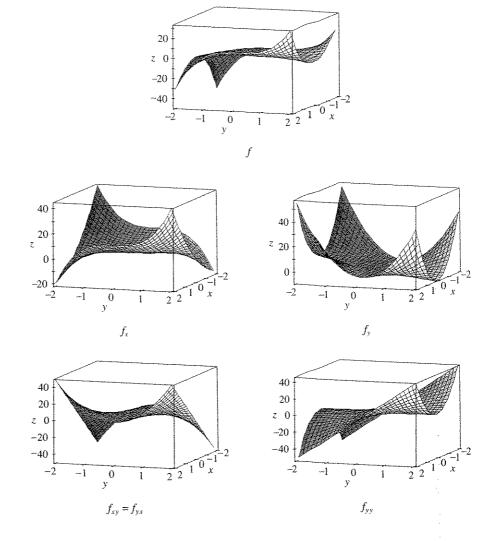
$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$
  $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$ 

Logo,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

□ A Figura 7 mostra o gráfico da função f do Exemplo 6 e os gráficos de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens para  $-2 \le x \le 2$ ,  $-2 \le y \le 2$ . Note que esses gráficos são consistentes com nossa interpretação de  $f_x$  e  $f_y$  como inclinação da reta tangente aos traços do gráfico de f. Por exemplo: o gráfico de f decresce se iniciamos em (0, -2) e nos movemos no sentido de f positivo. Isso é refletido nos valores negativos de  $f_y$ . Devemos comparar os gráficos de  $f_y$  e  $f_y$ , com  $f_y$  para ver as relações.



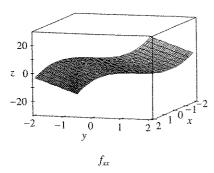


FIGURA 7

Note que  $f_{xy} = f_{yx}$  no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que  $f_{xy} = f_{yx}$ . A prova é feita no Apêndice F.

**Teorema de Clairaut** Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

As derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

☐ Alexis Clairaut foi uma criança prodígio na matemática: aos 10 anos leu o texto de cálculo de L'Hôspital, e aos 13 apresentou um artigo sobre geometria na Academia Francesa de Ciências. Aos 18 anos Clairaut publicou Recherches sur les courbes à double courbure, o primeiro tratado sistemático em geometria analítica tridimensional, em que incluiu o cálculo de curvas espaciais.

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que  $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$  se essas funções forem contínuas.

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Calcule  $f_{xxyz}$  se f(x, y, z) = sen(3x + yz).

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

3.2

ũ

## Equações Diferenciais Parciais

As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem algumas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

**EXEMPLO 8**  $\Box$  Mostre que a função  $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$  é solução da equação de Laplace.

SOLUÇÃO

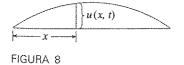
$$u_x = e^x \operatorname{sen} y$$
  $u_y = e^x \operatorname{cos} y$   
 $u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y$   $u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$   
 $u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$ 

Portanto, u satisfaz a equação de Laplace.

#### A equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante. Por exemplo, se u(x, t) representa o deslocamento da corda vibrante de violino no instante t e a distância x de um dos términos da corda (como na Figura 8), então u(x, t) satisfaz a equação da onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.



**EXEMPLO 9**  $\Box$  Verifique que a função u(x,t) = sen(x-at) satisfaz a equação da onda. SOLUÇÃO

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_{xx} = -\sin(x - at)$$

$$u_t = -a\cos(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\sin(x - at) = a^2u_{xt}$$

Então u satisfaz a equação da onda.

#### A Função de Produção de Cobb-Douglas

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas para modelar a produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho L e do capital investido K. Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular de modelo que eles tomaram segue de certas hipóteses que eles fizeram sobre economia.

Se a função de produção é denotada por P=P(L,K), a derivada parcial  $\partial P/\partial L$  é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou produtividade marginal do trabalho. Da mesma forma, a derivada parcial  $\partial P/\partial K$  é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada produtividade marginal do capital. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser estabelecidas da seguinte forma:

- (i) Se ou o trabalho ou o capital desaparecem, o mesmo acontece com a produção.
- (ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.
- (iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Como a produção por unidade de trabalho é P/L, a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante  $\alpha$ . Se mantivermos K constante ( $K = K_0$ ), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3 (veja também o Exercício 75), obteremos

$$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Note que escrevemos a constante  $C_1$  como função de  $K_0$  porque ela pode depender do valor de  $K_0$ .

Igualmente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

Comparando as Equações 6 e 7, temos

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

onde b é uma constante independente de L e de K. A hipótese (i) mostra que  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Note da Equação 8 que, se o trabalho e o capital-são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se  $\alpha+\beta=1$ , então P(mL,mK)=mP(L,K), o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que  $\alpha+\beta=1$  e portanto

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção discutida na Seção 14.1.

## 14.3

#### Exercícios

- 1. A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever T = f(x, y, t). Vamos medir o tempo em horas do princípio de janeiro.
  - (a) Qual é o significado das derivadas parciais ∂T/∂x, ∂T/∂y e ∂T/∂t?
  - (b) Honolulu tem longitude de 158 °W e latitude de 21 °N. Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando do noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja frio. Você esperaria f<sub>x</sub>(158, 21, 9), f<sub>y</sub>(158, 21, 9) e f<sub>i</sub>(158, 21, 9) serem positivos ou negativos? Explique.
- 2. No começo desta seção discutimos a função I = f(T, H), onde I era o índice de calor; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar  $f_T(92, 60)$  e  $f_H(92, 60)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?
- 3. O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v, portanto podemos escrever W = f(T, v). A Tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

| ڻ           | T $v$ | 20   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   |
|-------------|-------|------|------|------|------|------|------|
| real C      | - 10  | - 18 | - 20 | - 21 | - 22 | - 23 | - 23 |
|             | 15    | - 24 | - 26 | - 27 | - 29 | - 30 | - 30 |
| Temperatura | -20   | - 30 | - 33 | - 34 | - 35 | - 36 | - 37 |
| Lem         | 25    | - 37 | - 39 | - 41 | - 42 | - 43 | - 44 |

(a) Estime os valores de  $f_r(-15, 30)$  e  $f_v(-15, 30)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?

- (b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de  $\partial W/\partial T$  e  $\partial W/\partial v$ ?
- (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\partial W}{\partial v}$$

**4.** A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função h = f(v, t) são apresentados em pés na tabela.

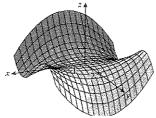
Duração (horas)

| v $t$      | 5                                | 10                                             | 15                                                                                                                                                | 20                                                                                                                                                                                              | 30                                                                                                                                                                                                                                            | 40                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 50                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------|----------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10         | 2                                | 2                                              | 2                                                                                                                                                 | 2                                                                                                                                                                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                             | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 15         | 4                                | 4                                              | 5                                                                                                                                                 | 5                                                                                                                                                                                               | 5                                                                                                                                                                                                                                             | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 20         | 5                                | 7                                              | 8                                                                                                                                                 | 8                                                                                                                                                                                               | 9                                                                                                                                                                                                                                             | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 30         | 9                                | 13                                             | 16                                                                                                                                                | 17                                                                                                                                                                                              | 18                                                                                                                                                                                                                                            | 19                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 19                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 40         | 14                               | 21                                             | 25                                                                                                                                                | 28                                                                                                                                                                                              | 31                                                                                                                                                                                                                                            | 33                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 33                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>5</b> 0 | 19                               | 29                                             | 36                                                                                                                                                | 40                                                                                                                                                                                              | 45                                                                                                                                                                                                                                            | 48                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 50                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 60         | 24                               | 37                                             | 47                                                                                                                                                | 54                                                                                                                                                                                              | 62                                                                                                                                                                                                                                            | 67                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 69                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|            | 10<br>15<br>20<br>30<br>40<br>50 | 10 2<br>15 4<br>20 5<br>30 9<br>40 14<br>50 19 | v     3     10       10     2     2       15     4     4       20     5     7       30     9     13       40     14     21       50     19     29 | v     3     10     13       10     2     2     2       15     4     4     5       20     5     7     8       30     9     13     16       40     14     21     25       50     19     29     36 | v     3     10     13     20       10     2     2     2     2       15     4     4     5     5       20     5     7     8     8       30     9     13     16     17       40     14     21     25     28       50     19     29     36     40 | v     3     10     13     20     30       10     2     2     2     2     2       15     4     4     5     5     5       20     5     7     8     8     9       30     9     13     16     17     18       40     14     21     25     28     31       50     19     29     36     40     45 | v     3     10     13     20     30     40       10     2     2     2     2     2     2       15     4     4     5     5     5     5       20     5     7     8     8     9     9       30     9     13     16     17     18     19       40     14     21     25     28     31     33       50     19     29     36     40     45     48 |

- (a) Qual o significado das derivadas parciais ∂h/∂v
   e ∂h/∂t?
- (b) Estime os valores de  $f_v(40, 15)$  e  $f_t(40, 15)$ . Quais são as interpretações práticas desses valores?
- (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial h}{\partial t}$$

5-6 □ Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



**5.** (a)  $f_x(1, 2)$ 

(b)  $f_{y}(1, 2)$ 

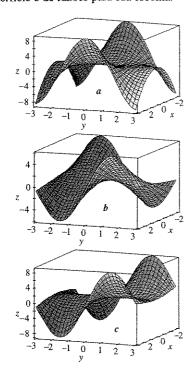
**6.** (a)  $f_x(-1, 2)$ 

(b)  $f_y(-1, 2)$ 

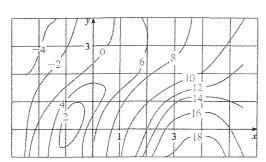
(c)  $f_{xx}(-1, 2)$ 

(d)  $f_{yy}(-1, 2)$ 

As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$ . Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



8. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar  $f_x(2, 1)$  e  $f_y(2, 1)$ .



**9.** Se  $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ , determine  $f_x(1, 2)$  e  $f_y(1, 2)$  e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

**10.** Se  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ , determine  $f_x(1, 0)$  e  $f_y(1, 0)$  e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

11-12  $\square$  Determine  $f_x$  e  $f_y$  e faça o gráfico de  $f_x$ ,  $f_x$  e  $f_y$  com domínios e pontos de vista que permitam ver a relação entre eles.

**11.**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$  **12.**  $f(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}$ 

13-34 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

**13.**  $f(x, y) = 3x - 2y^4$ 

**14.**  $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$ 

15.  $z = xe^{3y}$ 

**16.**  $z = y \ln x$ 

 $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ 

**18.**  $f(x, y) = x^y$ 

19.  $w = \sin \alpha \cos \beta$ 

**20.**  $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$ 

**21.**  $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ 

**22.**  $f(x,t) = arctg(x\sqrt{t})$ 

**23.**  $u = te^{w/t}$ 

**24.**  $f(x, y) = \int_{0}^{x} \cos(t^2) dt$ 

**25.**  $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$ 

**26.**  $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$ 

**28.**  $w = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$ 

**29.**  $u = xe^{-t} \operatorname{sen} \theta$ 

31.  $f(x, y, z, t) = xyz^2 \operatorname{tg}(yt)$ 

**32.**  $f(x, y, z, t) = \frac{xy^2}{t + 2z}$ 

**33.**  $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 

**34.**  $u = \text{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$ 

35-38 Determine as derivadas parciais indicadas.

**35.**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $f_x(3, 4)$ 

**36.**  $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ ;  $f_y(-6, 4)$ 

**37.** f(x, y, z) = x/(y + z);  $f_z(3, 2, 1)$ 

**38.**  $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv); f_v(2, 0, 3)$ 

39-40 □ Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para achar  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$ .

**39.**  $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ 

**40.**  $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$ 

41-44  $\Box$  Use a diferenciação implícita para determinar  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

**41.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 

**42.**  $yz = \ln(x + z)$ 

**43.**  $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$ 

sen(xyz) = x + 2y + 3z

**45–46**  $\square$  Determine  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

**45.** (a) z = f(x) + g(y)

(b) z = f(x + y)

**46** (a) z = f(x)g(y)

(b) z = f(xy)

(c) z = f(x/y)

**47.** 
$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$$

**48.** 
$$f(x, y) = \ln(3x + 5y)$$

**49.** 
$$z = x/(x + y)$$

**50.** 
$$z = y tg 2x$$

$$51. \ u = e^{-s} \operatorname{sen} t$$

**52.** 
$$v = \sqrt{x + y^2}$$

53-56 
$$\Box$$
 Verifique se as conclusões do Teorema de Clairaut são verdadeiras, isto é, se  $u_{xy} = u_{yx}$ .

**53.** 
$$u = x \sin(x + 2y)$$

$$54 \ u = x^4 y^2 - 2xy^5$$

**55.** 
$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$56 \ u = xye^y$$

57-64 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

**57.** 
$$f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$$
;  $f_{xxy}$ ,  $f_{yyy}$ 

**58.** 
$$f(x,t) = x^2 e^{-ct}$$
;  $f_{ttt}$ ,  $f_{txx}$ 

**59.** 
$$f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$$
;  $f_{xyz}$ ,  $f_{yzz}$ 

**60.** 
$$f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$$
;  $f_{rss}$ ,  $f_{rss}$ 

**61.** 
$$u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$$
;  $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$ 

**62.** 
$$z = u\sqrt{v - w}$$
;  $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$ 

**63.** 
$$w = \frac{x}{y + 2z}$$
;  $\frac{\partial^3 w}{\partial z \, \partial y \, \partial x}$ ,  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \, \partial y}$ 

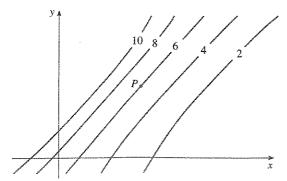
**64.** 
$$u = x^a y^b z^c$$
;  $\frac{\partial^b u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$ 

Use a tabela de valores de f(x, y) para estimar os valores de  $f_x(3, 2), f_x(3, 2.2) e f_{xy}(3, 2).$ 

| x   | 1,8  | 2,0  | 2,2  |
|-----|------|------|------|
| 2,5 | 12,5 | 10,2 | 9,3  |
| 3,0 | 18,1 | 17,5 | 15,9 |
| 3,5 | 20,0 | 22,4 | 26,1 |

- 66. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.
  - (a)  $f_x$
- (c)  $f_{xx}$

- (d)  $f_{xy}$
- (b) f<sub>y</sub>(e) f<sub>yy</sub>



- 67. Verifique se a função  $u = e^{-\alpha^2 k^2 i} \operatorname{sen} kx$  é solução da equação de condução do calor  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ .
- 68. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .
  - (a)  $u = x^2 + y^2$
  - (b)  $u = x^2 y^2$
  - (c)  $u = x^3 + 3xy^2$
  - (d)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
  - (e)  $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
  - (f)  $u = e^{-x} \cos y e^{-y} \cos x$
- **69.** Verifique se a função  $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a solução da equação de Laplace tridimensional  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ .
- 70. Mostre que cada uma das seguintes funções é a solução da equação da onda  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ .
  - (a)  $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$
  - (b)  $u = t/(a^2t^2 x^2)$
  - (c)  $u = (x at)^6 + (x + at)^6$
  - (d)  $u = \operatorname{sen}(x at) + \ln(x + at)$
- 71. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 70.

**72.** Se  $u = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$ , onde  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

73. Mostre que a função  $z = xe^y + ye^x$  é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

74. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas  $P = bL^{\alpha}K^{\beta}$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

75. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz  $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$  resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dI} = \alpha \frac{P}{I}$$

(Veja a Equação 5.)

- 76. A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa plana de metal é dada por  $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$ , onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura com relação à distância no ponto (2, 1) em (a) a direção do eixo x e (b) a direção do eixo y.
- A resistência total R produzida por três condutores com resistência R1, R2 e R3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine  $\partial R/\partial R_1$ .

78. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é PV = mRT, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

79. Para o gás ideal do Exercício 78, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

80. O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

onde T é a temperatura (°C) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando T = -15°C e v = 30 km/h quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1°C? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

**81.** A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

- 82. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine  $\partial A/\partial a$ ,  $\partial A/\partial b$  e  $\partial A/\partial c$  pela diferenciação implícita da Lei dos Cossenos.
- Foi dito que existe uma função f cujas derivadas parciais são  $f_x(x, y) = x + 4y$  e  $f_y(x, y) = 3x y$  e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?
- 84. O parabolóide  $z = 6 x x^2 2y^2$  intercepta o plano x = 1 em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto (1, 2, -4). Use um computador para fazer o gráfico do parabolóide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.
  - **85.** O elipsóide  $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$  intercepta o plano y = 2 em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto (1, 2, 2).
  - **86.** No estudo de penetração do congelamento achou-se que a temperatura *T* no instante *t* (medido em dias) a uma

profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde  $\omega = 2\pi/365$  e  $\lambda$  é uma constante positiva.

- (a) Determine  $\partial T/\partial x$ . Qual seu significado físico?
- (b) Determine  $\partial T/\partial t$ . Qual seu significado físico?
- (c) Mostre que T satisfaz a equação do calor  $T_t = kT_{xx}$  para uma certa constante k.
- (d) Se  $\lambda = 0.2$ ,  $T_0 = 0$  e  $T_1 = 10$ , use um computador para traçar o gráfico de T(x, t).
- (e) Qual é o significado físico do termo  $-\lambda x$  na expressão  $sen(\omega t \lambda x)$ ?
- **87.** Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se a derivada parcial de terceira ordem de f é contínua, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

- **88.** (a) Quantas derivadas de *n*-ésima ordem tem uma função de duas variáveis?
  - (b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas distintas existirão?
  - (c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.
- **89.** Se  $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\sec(x^2y)}$ , determine  $f_x(1, 0)$ . [*Dica*: Em vez de achar  $f_x(x, y)$  primeiro, note que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]
- **90.** Se  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ , determine  $f_x(0, 0)$ .
- **91**. Seia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Use um computador para traçar o gráfico de f.
- (b) Determine  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$  quando  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- (c) Determine  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(0, 0)$  usando as Equações 2 e 3.
- (d) Mostre que  $f_{xy}(0,0) = -1$  e  $f_{yx}(0,0) = 1$ .
- (e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  para ilustrar sua resposta.

# 14.4

# Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das idéias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que ampliamos o gráfico de uma função diferenciável perto de um ponto, vendo cada vez uma região menor do todo, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.11 do Volume I). Desenvolveremos idéias semelhantes em três dimensões. À medida que damos um *zoom* em um ponto pertencente à uma superfície, que é o gráfico de uma função

23

diferenciável de duas variáveis, a superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a idéia de diferenciais para as funções de duas ou mais variáveis.

### **Planos Tangentes**

Suponha que a superfície S tenha equação z = f(x, y), onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja  $P(x_0, y_0, z_0)$  um ponto em S. Como na seção anterior, sejam  $C_1$  e  $C_2$  curvas obtidas pela interseção de S com os planos verticais  $y = y_0$  e  $x = x_0$ . O ponto P pertence à interseção de  $C_1$  com  $C_2$ . Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as retas tangentes às curvas  $C_1$  e  $C_2$  no ponto P. Então, o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as duas retas tangentes  $T_1$  e  $T_2$ . (Veja a Figura 1.)

Veremos na Seção 14.6 que, se C é outra curva qualquer que esteja contida na superficie S e que passe pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que mais se aproxima da superfície S perto do ponto P.

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por C e tomando a = -A/C e b = -B/C, podemos escrevê-la como

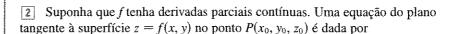
$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P, sua interseção com o plano  $y = y_0$  precisa ser a reta  $T_1$ . Impondo  $y = y_0$  na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \qquad y = y_0$$

que reconhecemos como a equação da reta (na forma de ponto, inclinação) com inclinação a. Mas da Seção 14.3 sabemos que a inclinação de  $T_1$  é  $f_x(x_0, y_0)$ . Assim,  $a = f_x(x_0, y_0)$ .

Da mesma forma, tomando  $x = x_0$  na Equação 1, obtemos  $z - z_0 = b(y - y_0)$ , que precisa representar a reta tangente  $T_2$ , e portanto  $b = f_y(x_0, y_0)$ .



$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico  $z = 2x^2 + y^2$  no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO Seja  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ . Então

ou

$$f_x(x, y) = 4x$$
  $f_y(x, y) = 2y$   
 $f_x(1, 1) = 4$   $f_y(1, 1) = 2$ 

Portanto, por (2), temos a equação do plano tangente em (1, 1, 3)

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$
$$z = 4x + 2y - 3$$

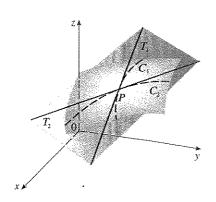


FIGURA 1 O plano tangente contém as retas tangentes  $T_1$  e  $T_2$ 

☐ Note a semelhança entre a equação do plano tangente e a equação da retaitangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

A Figura 2(a) mostra o parabolóide elíptico e seu plano tangente em (1, 1, 3) que encontramos no Exemplo 1. Na parte (b) e (c) fazemos uma ampliação da região em torno do ponto (1, 1, 3) diminuindo a janela de inspeção da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ . Note que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície se confundindo com o plano tangente.

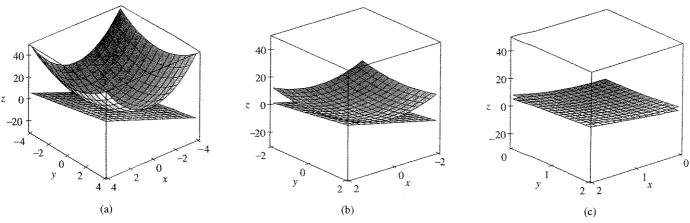
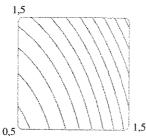
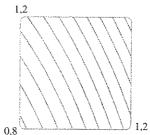


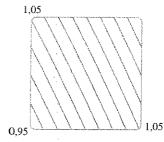
FIGURA 2 O parabolóide elíptico  $z = 2x^2 + y^2$  parece coincidir com o plano tangente quando ampliamos a região próxima de (1, 1, 3).

Na Figura 3 reforçamos essa impressão fazendo uma ampliação das curvas de contorno da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  próximas ao ponto (1, 1). Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.

FIGURA 3 Ampliando perto do ponto (1, 1) no diagrama de contorno de  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ 







# Aproximação Linear

No Exemplo 1 achamos que a equação do plano tangente ao gráfico da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  no ponto (1, 1, 3) é z = 4x + 2y - 3. Portanto, em vista da evidência visual nas Figuras 2 e 3, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação de f(x, y) quando (x, y) está próximo de (1, 1). A função L é chamada linearização de f em (1, 1), e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de f em (1, 1). Por exemplo, no ponto (1,1; 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1,1;0,95) \approx 4(1,1) + 2(0,95) - 3 = 3.3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de  $f(1,1,0.95) = 2(1,1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$ . Se entretanto tomarmos um ponto longe de (1,1), como (2,3), não teremos mais uma boa aproximação. De fato, L(2,3) = 11 ao passo que f(2,3) = 17.

Em geral sabemos de (2) que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função que tem derivadas parciais contínuas f de duas variáveis em um ponto (a, b, f(a, b)) é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominada linearização de f em (a, b), e a aproximação

4 
$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de f em (a, b).

Temos definido o plano tangente para as superfícies z = f(x, y), onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos verificar (veja o Exercício 42) que suas derivadas parciais existem na origem e são  $f_x(0,0) = 0$  e  $f_y(0,0) = 0$ , mas  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas. A aproximação linear seria  $f(x,y) \approx 0$ , porém  $f(x,y) = \frac{1}{2}$  para todos os pontos da reta y = x. Portanto uma função de duas variáveis pode se comportar muito mal, mesmo se suas derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a idéia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, y = f(x), se x varia de a para  $a + \Delta x$ , definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

No Capítulo 3 do Volume I mostramos que, se f é diferenciável em a, então

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$
 onde  $\varepsilon \to 0$  quando  $\Delta x \to 0$ 

Considere agora uma função de duas variáveis, z = f(x, y), e suponha que x varie de a para  $a + \Delta x$  e y varie de b para  $b + \Delta y$ . Então o **incremento** correspondente de z é

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Portanto o incremento  $\Delta z$  representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ . Por analogia a (5) definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como se segue.

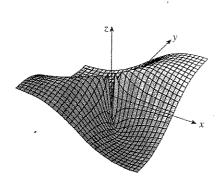


FIGURA 4

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
 se  
 $(x, y) \neq (0, 0),$   
 $f(0, 0) = 0$ 

□ Esta é a Equação 3.5.7.

7 Definição Se z = f(x, y), então f é diferenciável em (a, b) se  $\Delta z$  pode ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b) \, \Delta x + f_y(a, b) \, \Delta y + \varepsilon_1 \, \Delta x + \varepsilon_2 \, \Delta y$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ .

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear (4) é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b). Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para checar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficiente de forma conveniente para verificar a diferenciabilidade.

□ O Teorema 8 será provado no Apêndice F. **8** Teorema Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem perto do ponto (a, b) e são contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Mostre que  $f(x, y) = xe^{xy}$  é diferenciável em (1, 0) e determine sua linearização ali. Em seguida use a linearização para aproximar f(1, 1, -0, 1).

SOLUÇÃO As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$
  $f_y(x, y) = x^2e^{xy}$   
 $f_x(1, 0) = 1$   $f_y(1, 0) = 1$ 

Ambas  $f_x$  e  $f_y$  são funções contínuas. Portanto, pelo Teorema 8, f é diferenciável. A linearização é dada por

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
  
= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y

A aproximação linear correspondente é

$$xe^{xy} \approx x + y$$

portanto

$$f(1,1,-0,1) \approx 1,1-0,1=1$$

Compare esse valor com o valor real de  $f(1,1,-0,1) = 1,1e^{-0.11} \approx 0.98542$ .

Exemplo 2.

☐ A Figura 5 mostra o gráfico da função f e sua linearização L no

FIGURA 5

**EXEMPLO 3**  $\square$  No início da Seção 14.3 discutimos o índice de calor (sensação de calor) I como uma função da temperatura real T e da umidade relativa H e fornecemos a seguinte tabela de valores do Serviço Nacional de Previsão do Tempo norte-americano.

Umidade relativa (%)

50

|             | T   | 50  | 55  | 60      | 65  | 70  | 75  | 80  | 85  | 90  |
|-------------|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Temperatura | 90  | 96  | 98  | 100     | 103 | 106 | 109 | 112 | 115 | 119 |
|             | 92  | 100 | 103 | 105     | 108 | 112 | 115 | 119 | 123 | 128 |
| real        | 94  | 104 | 107 | 11 T 11 | 114 | 118 | 122 | 127 | 132 | 137 |
| (°F)        | 96  | 109 | 113 | 116     | 121 | 125 | 130 | 135 | 141 | 146 |
|             | 98  | 114 | 118 | 123     | 127 | 133 | 138 | 144 | 150 | 157 |
|             | 100 | 119 | 124 | 129     | 135 | 141 | 147 | 154 | 161 | 168 |

Determine a aproximação linear para o índice de calor I = f(T, H) quando T está próximo de 96 °F e H está próximo de 70%. Use essa estimativa do índice de calor quando a temperatura estiver a 97 °F e a umidade relativa for 72%.

SOLUÇÃO Lemos na tabela que f(96,70)=125. Na Seção 14.3 usamos os valores tabelados para estimar  $f_T(96,70)\approx 3,75$  e  $f_H(96,70)\approx 0,9$  (veja páginas 907-908) Assim a aproximação linear é

$$f(T,H) \approx f(96,70) + f_T(96,70)(T - 96) + f_H(96,70)(H - 70)$$
  
 
$$\approx 125 + 3.75(T - 96) + 0.9(H - 70)$$

Em particular,

$$f(97,72) \approx 125 + 3,75(1) + 0,9(2) = 130,55$$

Portanto, quando T = 97 °F e H = 72%, o índice de calor é

## Diferenciais

Para uma função de uma única variável, y = f(x), definimos o diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. O diferencial de y é definido como

(Veja a Seção 3.11 no Volume I.) A Figura 6 mostra as relações entre o incremento  $\Delta y$  e o diferencial dy:  $\Delta y$  representa a variação de altura da curva y = f(x) e dy representa a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade  $dx = \Delta x$ .

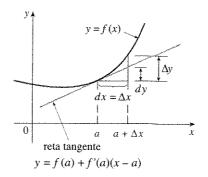


FIGURA 6

Para uma função de duas variáveis, z = f(x, y), definimos os **diferenciais** dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então o **diferencial** dz, também chamado **diferencial total**, é definido por

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(Compare com a Equação 9.) Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz. Se tomamos  $dx = \Delta x = x - a$  e  $dy = \Delta y = y - b$  no Equação 10, então a diferencia

Se tomamos  $dx = \Delta x = x - a$  e  $dy = \Delta y = y - b$  na Equação 10, então a diferencial de z é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear (4) pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

A Figura 7 é a versão tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica do diferencial. dz e do incremento  $\Delta z$ : dz representa a variação na altura do plano tangente, ao passo que  $\Delta z$  representa a variação da altura da superfície z = f(x, y) quando (x, y) varia de (a, b) para  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ .

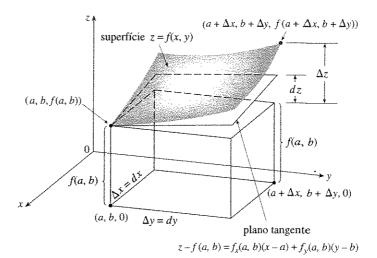


FIGURA 7

### EXEMPLO 4

- (a) Se  $z = f(x, y) = x^2 + 3xy y^2$ , determine o differencial dz.
- (b) Se x varia de 2 a 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de  $\Delta z$  e dz.

### **SOLUÇÃO**

(a) Da Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy$$

(b) Tomando x = 2,  $dx = \Delta x = 0.05$ , y = 3 e  $dy = \Delta y = -0.04$ , obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0,05 + [3(2) - 2(3)](-0,04)$$
  
= 0,65

O incremento de z é

$$\Delta z = f(2,05, 2,96) - f(2,3)$$
= [(2,05)<sup>2</sup> + 3(2,05)(2,96) - (2,96)<sup>2</sup>] - [2<sup>2</sup> + 3(2)(3) - 3<sup>2</sup>]  
= 0,6449

 $\Delta z$  porque o plano tangente é uma boa aproximação da superfície  $z=x^2+3xy-y^2$  perto do ponto (2, 3, 13) (veja a Figura 8).

□ No Exemplo 4, dz está próximo de

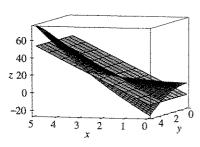


FIGURA 8

Note que  $\Delta z \approx dz$  mas dz é mais simples de calcular.

**EXEMPLO 5** □ Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize o diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

G

SOLUÇÃO O volume V do cone com raio da base r e altura h é  $V=\pi r^2h/3$ . Logo o diferencial de V é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Como cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos  $|\Delta r| \le 0,1$ ,  $|\Delta h| \le 0,1$ . Para achar o erro máximo no volume, tomamos o maior erro nas medidas de r e de h. Portanto tomamos dr = 0,1 e dh = 0,1 para r = 10, h = 25. Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0.1) + \frac{100\pi}{3} (0.1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de  $20\pi$  cm<sup>3</sup>  $\approx 63$  cm<sup>3</sup>.

# Funções de Três ou Mais Variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidos de uma maneira análoga para as funções de mais do que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela da Definição 7. Para essas funções a aproximação linear é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização L(x, y, z) é o lado direito dessa expressão.

Se w = f(x, y, z), então o incremento de w é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

O diferencial dw é definido em termos dos diferenciais dx, dy e dz das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

**EXEMPLO 6** 

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida feita com precisão de até 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior valor possível do erro quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

SOLUÇÃO Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é V = xyz e

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$$

Foi-nos dado que  $|\Delta x| \le 0.2$ ,  $|\Delta y| \le 0.2$  e  $|\Delta z| \le 0.2$ . Para determinar o maior erro no volume, usamos dx = 0.2, dy = 0.2 e dz = 0.2 e x = 75, y = 60 e z = 40:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0,2) + (75)(40)(0,2) + (75)(60)(0,2)$$
  
= 1980

Portanto, o erro de só 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm³ no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas de fato é um erro de 1% do volume da caixa.

### Exercícios

1-6 🗆 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. 
$$z = 4x^2 - y^2 + 2y$$
,  $(-1, 2, 4)$ 

**2.** 
$$z = 9x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5$$
, (1, 2, 18)

3. 
$$z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$$
,  $(1, -1, 1)$ 

4. 
$$z = y \ln x$$
, (1, 4, 0)

**5.** 
$$z = y \cos(x - y)$$
, (2, 2, 2)

**6.** 
$$z = e^{x^2 - y^2}$$
,  $(1, -1, 1)$ 

7-8 🗆 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o tamanho da janela de inspeção e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida amplie até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. 
$$z = x^2 + xy + 3y^2$$
, (1, 1, 5)

**8.** 
$$z = \arctan(xy^2)$$
,  $(1, 1, \pi/4)$ 

9\_10 □ Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema algébrico computacional tanto para computar as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida faça uma ampliação até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

**9.** 
$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/15}(\sin^2 x + \cos^2 y)$$
,  $(2, 3, f(2, 3))$ 

**10.** 
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}{1 + x^4 + y^4}$$
, (1, 1, 1)

11-16 🗆 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. Faça então a linearização L(x, y) da função no ponto.

12. 
$$f(x, y) = x\sqrt{y}$$
, (1, 4) 12.  $f(x, y) = x/y$ , (6, 3)

**12.** 
$$f(x, y) = x/y$$
, (6, 3)

**13.** 
$$f(x, y) = e^x \cos xy$$
,  $(0, 0)$ 

**14.** 
$$f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$$
, (3, 0)

**15.** 
$$f(x, y) = tg^{-1}(x + 2y)$$
, (1, 0)

**16.** 
$$f(x, y) = \sin(2x + 3y)$$
,  $(-3, 2)$ 

17. Determine a aproximação linear da função  $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$  em (2, 1) e use-a para aproximar

f(1,95,1,08). 18. Determine a aproximação linear da função

 $f(x, y) = \ln(x - 3y)$  em (7, 2) e use-a para aproximar f(6,9,2,06). Ilustre traçando o gráfico da função e do plano

19 Determine a aproximação linear da função  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ em } (3, 2, 6) \text{ e use-a para aproximar } \sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}.$  **20.** A altura h de ondas em mar aberto depende da rapidez do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função h = f(v, t) são apresentados na seguinte tabela.

### Duração (horas)

| (sou)                     | V  | 5  | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50  |
|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Velocidade do vento (nós) | 20 | 5  | 7  | 8  | 8  | 9  | 9  | 9   |
| e dò v                    | 30 | 9  | 13 | 16 | 17 | 18 | 19 | 19  |
| cidad                     | 40 | 14 | 21 | 25 | 28 | 31 | 33 | 33  |
| Velo                      | 50 | 19 | 29 | 36 | 40 | 45 | 48 | 50  |
| :                         | 60 | 24 | 37 | 47 | 54 | 62 | 67 | 69. |

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 40 nós e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 43 nós.

- 21. Utilize a tabela do Exemplo 3 e determine a aproximação linear do índice de calor quando a temperatura se aproxima de 94 °F e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 80%. Estime também o índice quando a temperatura é de 95 °F e a umidade relativa, 78%.
- 22. O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v; portanto podemos escrever W = f(T, v). A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

| (၃)         | $T^{v}$ | 20  | 30  | 40  | 50  | 60  | 70  |
|-------------|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| real        | -10     | -18 | -20 | -21 | -22 | -23 | -23 |
|             | 15      | -24 | -26 | 27  | -29 | -30 | -30 |
| Femperatura | 20      | -30 | -33 | -34 | -35 | -36 | ~37 |
| Tem         | -25     | -37 | -39 | -41 | -42 | -43 | 44  |

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função sensação térmica quando T estiver a  $-15^{\circ}$ C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime também quando a temperatura estiver a −17°C e a rapidez do vento for de 55 km/h.

**23.** 
$$z = x^3 \ln(y^2)$$

24. 
$$v = y \cos xy$$

**25.** 
$$u = e^t \operatorname{sen} \theta$$

**26.** 
$$u = r/(s + 2t)$$

**27.** 
$$w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
 **28.**  $w = xye^{xz}$ 

$$28. \ w = xye^x$$

**29.** Se  $z = 5x^2 + y^2 e(x, y)$  varia de (1, 2) a (1,05; 2,1), compare os valores de  $\Delta z$  e dz.

**30.** Se  $z = x^2 - xy + 3y^2$  e (x, y) varia de (3, -1) a (2.96, -0.95), compare os valores de  $\Delta z$  e dz.

31. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

32. As dimensões de uma caixa fechada retangular foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro no cálculo da área da superfície da caixa.

33. Utilize os diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

34. Use o diferencial para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

35. Uma faixa de 3 polegadas de largura é pintada ao redor de um retângulo de dimensões 100 pés por 200 pés. Utilize os diferenciais para aproximar a área em pés quadrados pintada na faixa.

36. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação PV = 8.31T, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize os diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão

se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

37. Se R é a resistência equivalente de três resistências conectadas em paralelo, com valores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms  $R_1 = 25 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$  e  $R_3 = 50 \Omega$ , com precisão de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no cálculo da resistência equivalente de R.

Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

39-40 □ Mostre que a função é diferenciável achando valores  $\varepsilon_1$  e ε<sub>2</sub> que satisfaçam a Definição 7.

$$39. \ f(x,y) = x^2 + y^2$$

**40.** 
$$f(x, y) = xy - 5y^2$$

929

Prove que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). Dica: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \, \Delta y) \to (0, \, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

42. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da figura 4.

Mostre que  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(0, 0)$  existem, mas f não é diferenciável em (0, 0). [Dica: Utilize o resultado do Exercício 41.]

(b) Explique por que  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas em (0, 0).

### 145 Regra da Cadeia

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para diferenciar uma função composta: se y = f(x) e x = g(t), onde  $f \in g$  são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Para as funções de mais do que uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) diz respeito ao caso onde z = f(x, y) e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, função de uma variável t. Isso significa que z é indiretamente uma função de t, z = f(g(t), h(t)), e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar zem função de t. Estamos admitindo que f seja diferenciável (Definição 14.4.7). Lembremonos de que este é o caso quando  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas (Teorema 14.4.8).

**2** Regra da Cadeia (Caso 1) Suponha que z = f(x, y) seja uma função diferenciável de x e y, onde x = g(t) e y = h(t) são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

**Prova** Uma variação de  $\Delta t$  em t produz uma variação de  $\Delta x$  em x e  $\Delta y$  em y. Isso, por sua vez, produz uma variação de  $\Delta z$  em z, e da Definição 14.4.7 temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde  $\varepsilon_1 \to 0$  e  $\varepsilon_2 \to 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ . [Se as funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  não forem definidas em (0, 0), poderemos defini-las como 0 lá.] Dividindo ambos os lados da equação por  $\Delta t$ , temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se fizermos  $\Delta t \to 0$ , então  $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$  porque g é diferenciável e portanto contínua. Da mesma forma,  $\Delta y \to 0$ . Por outro lado, isso implica que  $\varepsilon_1 \to 0$  e  $\varepsilon_2 \to 0$ , de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Como frequentemente escrevemos  $\partial z/\partial x$  no lugar de  $\partial f/\partial x$ , podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

100

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

**EXEMPLO 1**  $\square$  Se  $z = x^2y + 3xy^4$ , onde x = sen 2t e  $y = \cos t$ , determine dz/dt quando t = 0.

SOLUÇÃO A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$
$$= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

Não é necessário substituir as expressões de x e de y em função de t. Simplesmente

□ Note a semelhança com a definição do diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

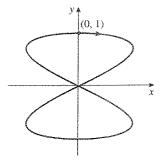


FIGURA 1 A curva  $x = \text{sen } 2t, y = \cos t$ 

observe que, quando t = 0, temos  $x = \sin 0 = 0$  e  $y = \cos 0 = 1$ . Logo,

$$\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-\sin 0) = 6$$

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$ . (Veja a Figura 1.) Em particular, quando t = 0, o ponto (x, y) é (0, 1), e dz/dt = 6 é sua taxa de crescimento quando nos movemos ao longo da curva C passando por (0, 1). Se, por exemplo,  $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$  representa a temperatura no ponto (x, y), então a função composta  $z = T(\sin 2t, \cos t)$  representa a temperatura dos pontos da curva C e sua derivada dz/dt corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva C.

**EXEMPLO 2**  $\square$  A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula PV = 8,31T. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é de 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

SOLUÇÃO Se t representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos T = 300, dT/dt = 0.1, V = 100, dV/dt = 0.2. Como

$$P = 8,31 \frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8,31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$
$$= \frac{8,31}{100}(0,1) - \frac{8,31(300)}{100^2}(0,2) = -0.04155$$

A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s.

Vamos considerar agora a situação onde z = f(x, y), mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: x = g(s, t), y = h(s, t). Então z é uma função indireta de s e t e desejamos determinar  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$ . Lembremo-nos de que para calcular  $\partial z/\partial t$  mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t. Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Argumento análogo serve para  $\partial z/\partial s$  e provamos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

**3** Regra da Cadeia (Case 2) Suponha que z = f(x, y) seja uma função diferenciável de x e y, onde x = g(s, t) e y = h(s, t) são funções diferenciáveis de s e de t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Se  $z = e^x \operatorname{sen} y$ , onde  $x = st^2 \operatorname{e} y = s^2 t$ , determine  $\partial z/\partial s \operatorname{e} \partial z/\partial t$ . SOLUÇÃO Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \operatorname{cos} y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + 2st e^{st^2} \operatorname{cos}(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \operatorname{cos} y)(s^2)$$

$$= 2st e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \operatorname{cos}(s^2 t)$$

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: s e t, que são variáveis **independentes**; x e y, chamadas variáveis **intermediárias**; e z, que é a variável **dependente**. Note que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia de uma dimensão da Equação 1.

Para lembrar da Regra da Cadeia é útil desenhar o **grafo da árvore** da Figura 2. Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente z para as variáveis intermediárias x e y a fim de indicar que z é uma função de x e y. Então desenhamos os ramos saindo de x e y para as variáveis independentes s e t. Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para achar  $\partial z/\partial s$  determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Da mesma forma, para determinar  $\partial z/\partial t$  usamos os caminhos de z a t.

Consideremos agora uma situação mais geral na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias  $x_1, \ldots, x_n$ , cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes  $t_1, \ldots, t_m$ . Note que existem n termos, um para cada variável intermediária. A prova é semelhante à do Caso 1.

**Regra da Cadeia (Versão Geral)** Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ , onde cada  $x_j$  é uma função diferenciável de m variáveis  $t_1, t_2, \ldots, t_m$ . Então u é uma função de  $t_1, t_2, \ldots, t_m$  e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada  $i = 1, 2, \ldots, m$ .

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde w = f(x, y, z, t) e x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) e t = t(u, v).

SOLUÇÃO Aplicamos o Teorema 4 com n=4 e m=2. A Figura 3 mostra o grafo correspondente. Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que

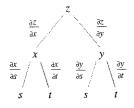


FIGURA 2

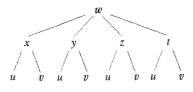


FIGURA 3

em um ramo que liga as folhas y a u a derivada parcial omitida é  $\partial y/\partial u$ . Com a ajuda do grafo da árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Se  $u = x^4y + y^2z^3$ , onde  $x = rse^t$ ,  $y = rs^2e^{-t}$  e  $z = r^2s$  sen t, determine o valor de  $\partial u/\partial s$  quando r = 2, s = 1, t = 0.

SOLUÇÃO Com o auxílio do grafo da árvore da Figura 4, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Quando r = 2, s = 1 e t = 0, temos x = 2, y = 2 e z = 0. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Se  $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$  e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUÇÃO Seja  $x = s^2 - t^2$  e  $y = t^2 - s^2$ . Então g(s, t) = f(x, y) e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t)$$

Portanto

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

**EXEMPLO 7**  $\Box$  Se z = f(x, y) tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e  $x = r^2 + s^2$  e y = 2rs, determine (a)  $\partial z/\partial r$  e (b)  $\partial^2 z/\partial r^2$ .

**SOLUÇÃO** 

(a) A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s)$$

(b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( 2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$
$$= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2s \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

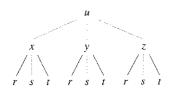
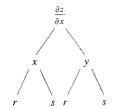


FIGURA 4

FIGURA 5

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente, temos



$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (2s)$$

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem, obtemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \left( 2r \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + 2s \left( 2r \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$= 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

# Derivação Implícita

A Regra da Cadeia pode ser usada para uma descrição do processo de diferenciação implícita introduzida nas Seções 3.6 (Volume I) e 14.3. Suponhamos que a equação da forma F(x, y) = 0 defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, ou seja, y = f(x), onde F(x, f(x)) = 0 para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra de Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação F(x, y) = 0 com relação a x. Como x e y são ambas funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto, dx/dx = 1; então, se  $\partial F/\partial y \neq 0$ , resolvemos para dy/dx e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Para derivar essa equação assumimos que F(x, y) = 0 define y implicitamente em função de x. O **Teorema da Função Implícita**, provado em cálculo avançado, fornece condições segundo as quais essa hipótese é válida. Podemos estabelecer que se F é definida em uma bola aberta contendo (a, b), onde F(a, b) = 0,  $F_y(a, b) \neq 0$  e  $F_x$  e  $F_y$  são funções contínuas nessa bola, então a equação F(x, y) = 0 define y como uma função de x perto do ponto (a, b), e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

**EXEMPLO 8**  $\square$  Determine y' se  $x^3 + y^3 = 6xy$ .

ورون گيرگ

SOLUÇÃO A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ 

☐ A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.6 do Volume I.

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função z = f(x, y) por uma equação da forma F(x, y, z) = 0. Isso é o mesmo que F(x, y, f(x, y)) = 0 para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para diferenciar a equação F(x, y, z) = 0 como se segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$
 e  $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$ 

portanto, essa equação se escreve

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se  $\partial F/\partial z \neq 0$ , resolvemos para  $\partial z/\partial x$  e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para  $\partial z/\partial y$  é obtida de modo semelhante.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida. Se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde F(a, b, c) = 0,  $F_z(a, b, c) \neq 0$ , e  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são contínuas dentro da esfera, então a equação F(x, y, z) = 0 define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b), e as derivadas parciais dessa função são dadas por (7).

**EXEMPLO 9**  $\Box$  Determine  $\frac{\partial z}{\partial x} e^{i} \frac{\partial z}{\partial y} se^{i} x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ .

SOLUÇÃO Seja  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$ . Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

□ A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

### Exercícios

1-6  $\square$  Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. 
$$z = x^2y + xy^2$$
,  $x = 2 + t^4$ ,  $y = 1 - t^3$ 

**2.** 
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
,  $x = e^{2t}$ ,  $y = e^{-2t}$ 

3. 
$$z = \sin x \cos y$$
,  $x = \pi t$ ,  $y = \sqrt{t}$ 

**4.** 
$$z = x \ln(x + 2y)$$
,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ 

**5.** 
$$w = xe^{y/z}$$
,  $x = t^2$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 1 + 2t$ 

**6.** 
$$w = xy + yz^2$$
,  $x = e^t$ ,  $y = e^t \operatorname{sen} t$ ,  $z = e^t \cos t$ 

7-12  $\Box$  Utilíze a Regra da Cadeia para determinar  $\partial z/\partial s$  e  $\partial z/\partial t$ .

7. 
$$z = x^2 + xy + y^2$$
,  $x = s + t$ ,  $y = st$ 

8. 
$$z = x/y$$
,  $x = se^t$ ,  $y = 1 + se^{-t}$ 

**9.** 
$$z = arctg(2x + y), x = s^2t, y = s \ln t$$

**10.** 
$$z = e^{xy} \operatorname{tg} y$$
,  $x = s + 2t$ ,  $y = s/t$ 

11. 
$$z = e^r \cos \theta$$
,  $r = st$ ,  $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$ 

12. 
$$z = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta$$
,  $\alpha = 3s + t$ ,  $\beta = s - t$ 

**13.** Se 
$$z = f(x, y)$$
, onde  $f$  é diferenciável  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $g(3) = 2$ ,  $g'(3) = 5$ ,  $h(3) = 7$ ,  $h'(3) = -4$ ,  $f_x(2, 7) = 6$ , e  $f_y(2, 7) = -8$ , determine  $dz/dt$  quando  $t = 3$ .

**14.** Seja 
$$W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$$
, onde  $F, u, ev$  são diferenciáveis,  $u(1, 0) = 2$ ,  $u_s(1, 0) = -2$ ,  $u_t(1, 0) = 6$ ,  $v(1, 0) = 3$ ,  $v_s(1, 0) = 5$ ,  $v_t(1, 0) = 4$ ,  $F_u(2, 3) = -1$  e  $F_v(2, 3) = 10$ . Determine  $W_s(1, 0)$  e  $W_t(1, 0)$ .

**15.** Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e  $g(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$ . Use a tabela de valores para calcular  $g_u(0, 0)$  e  $g_v(0, 0)$ .

|                 |        | f | g | f <sub>x</sub> | $f_{y}$ |
|-----------------|--------|---|---|----------------|---------|
|                 | (0, 0) | 3 | 6 | 4              | . 8     |
| Account Process | (1, 2) | 6 | 3 | 2              | 5       |

# **16.** Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$ . Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$ .

17-20 □ Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Assuma que todas as funções sejam diferenciáveis.

$$u = f(x, y)$$
, onde  $x = x(r, s, t)$ ,  $y = y(r, s, t)$ 

**18.** 
$$w = f(x, y, z)$$
, onde  $x = x(t, u)$ ,  $y = y(t, u)$ ,  $z = z(t, u)$ 

**19.** 
$$v = f(p, q, r)$$
, onde  $p = p(x, y, z)$ ,  $q = q(x, y, z)$ ,  $r = r(x, y, z)$ 

**20.** 
$$u = f(s, t)$$
, onde  $s = s(w, x, y, z)$ ,  $t = t(w, x, y, z)$ 

21-26 
Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

**21.** 
$$z = x^2 + xy^3$$
,  $x = uv^2 + w^3$ ,  $y = u + ve^w$ ;

$$\frac{\partial z}{\partial u}$$
,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial w}$  quando  $u = 2$ ,  $v = 1$ ,  $w = 0$ 

22. 
$$u = \sqrt{r^2 + s^2}$$
,  $r = y + x \cos t$ ,  $s = x + y \sin t$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  quando  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $t = 0$ 

23. 
$$R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$$
,  $u = x + 2y$ ,  $v = 2x - y$ ,  $w = 2xy$ ;  $\frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial y}$  quando  $x = y = 1$ 

**24.** 
$$M = xe^{y-z^2}$$
,  $x = 2uv$ ,  $y = u - v$ ,  $z = u + v$ ;  $\frac{\partial M}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial M}{\partial v}$  quando  $u = 3$ ,  $v = -1$ 

**25.** 
$$u = x^2 + yz$$
,  $x = pr\cos\theta$ ,  $y = pr\sin\theta$ ,  $z = p + r$ ;  $\frac{\partial u}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \theta}$  quando  $p = 2$ ,  $r = 3$ ,  $\theta = 0$ 

**26.** 
$$Y = w \operatorname{tg}^{-1}(uv)$$
,  $u = r + s$ ,  $v = s + t$ ,  $w = t + r$ ;  $\frac{\partial Y}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial t}$  quando  $r = 1$ ,  $s = 0$ ,  $t = 1$ 

27-30  $\Box$  Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

**27.** 
$$\sqrt{xy} = 1 + x^2y$$

**28.** 
$$y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^3}$$

$$29. \cos(x-y)=xe^y$$

30. 
$$\sin x + \cos y = \sin x \cos y$$

31-34  $\Box$  Utilize as Equações 7 para determinar  $\partial z/\partial x \in \partial z/\partial y$ .

**31.** 
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

$$xyz = \cos(x + y + z)$$

**33.** 
$$x - z = \arctan(yz)$$

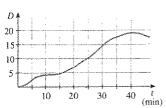
**34.** 
$$yz = \ln(x + z)$$

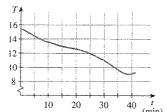
- A temperatura em um ponto (x, y) é T(x, y), medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por  $x = \sqrt{1 + t}$ ,  $y = 2 + \frac{1}{3}t$ , onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz  $T_x(2, 3) = 4$  e  $T_y(2, 3) = 3$ . Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?
- 36. A produção de trigo em um determinado ano W depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano, e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no corrente nível de produção, ∂W/∂T = -2 e ∂W/∂R = 8.
  - (a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
  - (b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.
- **37.** A rapidez da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo

do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são anotadas (veja o gráfico). Estime a taxa de variação (com relação ao tempo) da rapidez do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do mergulho. Quais são as unidades?





- 38. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 1,8 pol/s, ao passo que sua altura está decrescendo à taxa de 2,5 pol/s. A que taxa o volume do cone está mudando quando o raio vale 120 pol e a altura 140 pol?
- O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. A certo instante as dimensões da caixa são ℓ = 1 m e w = h = 2 m, e ℓ e w estão aumentando a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h está diminuindo à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.
  - (a) O volume
- (b) A área da superfície
- (c) O comprimento da diagonal
- **40.** A voltagem V em um circuito elétrico simples está decrescendo devagar à medida que a bateria se descarrega. A resistência R está aumentando devagar com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, V = IR, para achar como a corrente I está variando no momento em que  $R = 400 \ \Omega$ ,  $I = 0.08 \ A$ ,  $dV/dt = -0.01 \ V/s \ e \ dR/dt = 0.03 \ \Omega/s$ .
- 41. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s, e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.
- 42. Um carro A está viajando para norte na rodovia 16, e um carro B está viajando para oeste na rodovia 83. Os dois carros se aproximam da interseção dessas rodovias. Em um certo momento, o carro A está a 0,3 km da interseção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da interseção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?

43-46 🗆 Assuma que todas as funções dadas são diferenciáveis.

Se z = f(x, y), onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , (a) determine  $\partial z/\partial r$  e  $\partial z/\partial \theta$  e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

44. Se u = f(x, y), onde  $x = e^{x} \cos t e y = e^{x} \sin t$ , mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

**45.** Se 
$$z = f(x - y)$$
, mostre que  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

**46.** Se z = f(x, y), onde x = s + t e y = s - t, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$$

47-53 ☐ Assuma que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

47. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[Dica: Seja u = x + at, v = x - at.]

**48.** Se u = f(x, y), onde  $x = e^{s} \cos t e y = e^{s} \sin t$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

- **49.** Se z = f(x, y), onde  $x = r^2 + s^2$ , y = 2rs, determine  $\frac{\partial^2 z}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial s}$ . (Compare com o Exemplo 7.)
- **50.** Se z = f(x, y), onde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , determine (a)  $\partial z/\partial r$ , (b)  $\partial z/\partial \theta$  e (c)  $\partial^2 z/\partial r \partial \theta$ .
- **51.** Se z = f(x, y), onde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

- **52.** Suponha z = f(x, y), onde x = g(s, t) e y = h(s, t).
  - (a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- (b) Determine uma fórmula semelhante para  $\partial^2 z/\partial s \partial t$ .
- **53.** Uma função f é dita **homogênea de grau** n se satisfaz a equação  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  para todo valor de t, onde n é um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.
  - (a) Verifique que  $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$  é homogênea de grau 3.
  - (b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[Dica: Utilize a Regra da Cadeia para derivar f(tx, ty) com relação a t.]

54. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^{2} \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}} + 2xy \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y} + y^{2} \frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}} = n(n-1)f(x,y)$$

- 55. Se f é homogênea de grau n, mostre que  $f_x(tx, ty) = t^{n-1} f_x(x, y)$
- **56.** Suponha que a equação F(x, y, z) = 0 defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como função das outras duas:
- z = f(x, y), y = g(x, z), x = h(y, z). Se F for differenciável e  $F_s$ ,  $F_v$  e  $F_z$  forem todas não-nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

### Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

O mapa meteorológico dos estados da Califórnia e Nevada, apresentado na Figura 1, mostra os contornos da função temperatura T(x, y) às 15 horas de um dia de outubro. As curvas de nível ou isotérmicas ligam localidades que apresentam a mesma temperatura. A derivada parcial  $T_x$  em um ponto, como o Reno, dá a taxa de variação da temperatura em relação à distância se viajarmos de Reno para leste;  $T_y$  é a taxa de variação da temperatura se viajarmos para o norte. Mas o que acontece se desejarmos conhecer a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudeste (indo para Las Vegas) ou em outra direção qualquer? Nesta seção introduzimos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite determinar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

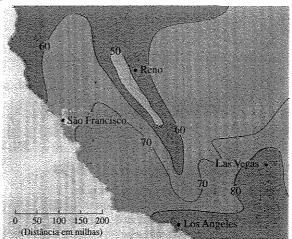


FIGURA 1

### Derivadas Direcionais

Lembremo-nos de que, se z = f(x, y), as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são definidas como

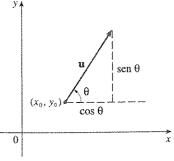


FIGURA 2 Um vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$ 

 $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ 1  $f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ 

e representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores i e j.

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z no ponto  $(x_0, y_0)$  na direção e sentido de um vetor unitário arbitrário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ . (Veja a Figura 2.) Para fazê-lo devemos considerar a superfície S com equação z = f(x, y) (gráfico de f) e tomar  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . O ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  pertence a S. O plano vertical que passa por P na direção de u intercepta S em uma curva C (veja a Figura 3). A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção e sentido de  $\mathbf{u}$ .

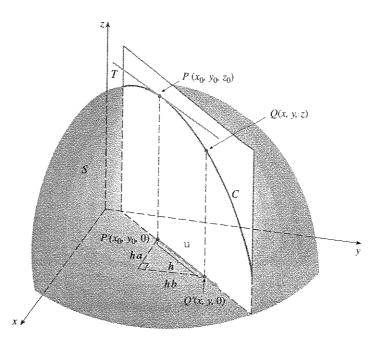


FIGURA 3

Se Q(x, y, z) é outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy, então o vetor P'Q' é paralelo a  $\mathbf{u}$ , e portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algum valor do escalar h. Dessa forma,  $x - x_0 = ha$ ,  $y - y_0 = hb$ , logo  $x = x_0 + ha$ ,  $y = y_0 + hb$ , e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se tomarmos o limite quando  $h \to 0$ , obteremos a taxa de variação de z (em relação à distância) na direção e sentido de  ${\bf u}$ , que é chamada derivada direcional de f na direção e sentido de  ${\bf u}$ .

**2 Definição** A **derivada direcional** de f em  $(x_0, y_0)$  na direção e sentido do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com (1), vemos que, se  $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ , então  $D_{\mathbf{i}} f = f_x$  e se  $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ , então  $D_{\mathbf{j}} f = f_y$ . Em outras palavras, as derivadas parciais de f com relação a x e y são casos particulares da derivada directional.

**EXEMPLO 1** □ Utilize o mapa meteorológico da Figura 1 para estimar o valor da derivada direcional da função temperatura em Reno na direção sudeste.

SOLUÇÃO O versor na direção sudeste é dado por  $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ , mas não necessitaremos dessa expressão. Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Reno na direção sudeste. (Veja a Figura 4.)

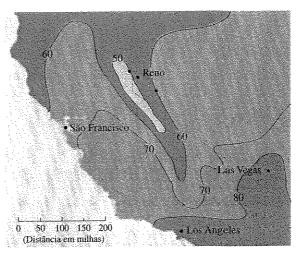


FIGURA 4

Aproximamos a derivada direcional  $D_{\rm u}T$  pela taxa média de variação de temperatura entre os pontos onde a reta traçada intercepta isotérmicas T=50 e T=60. A temperatura no ponto a sudeste de Reno é T=60 °F, e a temperatura no ponto a noroeste de Reno é T=50 °F. A distância aproximada desses pontos é de 75 milhas. Logo a taxa de variação da temperatura na direção sudeste é

$$D_{\rm u}T \approx \frac{60-50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13 \,{\rm ^{\circ}F/mi}$$

3.2

Quando computamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema.

**3** Teorema Se f é uma função diferenciável em x e y, então f tem derivada direcional na direção e sentido de qualquer versor  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_{x}(x, y)a + f_{y}(x, y)b$$

Prova Se definirmos uma função g de uma única variável h por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por outro lado, podemos escrever g(h) = f(x, y), onde  $x = x_0 + ha$ ,  $y = y_0 + hb$ , e pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se tomarmos h = 0, então  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , e

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Se o versor **u** faz um ângulo  $\theta$  com o eixo *x* positivo (como na Figura 2), então podemos escrever **u** =  $\langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$  e a fórmula do Teorema 3 fica

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Determine a derivada directional  $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$  se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e **u** é o versor dado pelo ângulo  $\theta = \pi/6$ . Qual será  $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ ?

SOLUÇÃO A Fórmula 6 nos dá

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]$$

Portanto

$$D_{\mathbf{u}}f(1,2) = \frac{1}{2} \left[ 3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2) \right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

200

 $\square$  A derivada direcional  $D_{\bf u} f(1,2)$  no Exemplo 2 representa a taxa de variação de  ${\bf z}$  na direção de  ${\bf u}$ . Isto é a inclinação da reta tangente à curva obtida pela interseção da superfície  $z=x^3-3xy+4y^2$  e o plano vertical que passa por (1,2,0) na direção de  ${\bf u}$  mostrado na Figura 5.

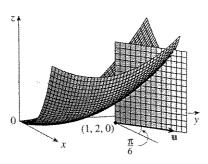


FIGURA 5

### Vetor Gradiente

Note no Teorema 3 que a derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_{x}(x,y)a + f_{y}(x,y)b$$

$$= \langle f_{x}(x,y), f_{y}(x,y) \rangle \cdot \langle a,b \rangle$$

$$= \langle f_{x}(x,y), f_{y}(x,y) \rangle \cdot \mathbf{u}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim daremos a ele um nome especial (o gradiente de f) e uma notação especial (grad f ou  $\nabla f$ , que lemos "del f").

**8** Definição Se f é uma função de duas variáveis x e y, o gradiente de f é a função vetorial  $\nabla f$  definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

**EXEMPLO 3**  $\square$  Se  $f(x, y) = \text{sen } x + e^{xy}$ , então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + y e^{xy}, x e^{xy} \rangle$$

e  $\nabla f(0,1) = \langle 2,0 \rangle$ 

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a expressão (7) para a derivada direcional como .

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

que expressa a derivada direcional na direção e sentido de  ${\bf u}$  como a projeção escalar do vetor gradiente sobre  ${\bf u}$ .

**EXEMPLO 4**  $\square$  Determine a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$  no ponto (2, -1) na direção do vetor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ .

SOLUÇÃO Primeiramente, vamos calcular o gradiente de f no ponto (2, -1):

$$\nabla f(x,y) = 2xy^3 \mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2,-1) = -4i + 8i$$

Note que v não é um vetor unitário, mas, como  $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$ , o vetor unitário na direção e sentido de v é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$D_{\mathbf{u}}f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

300

 $\Box$  O vetor gradiente  $\nabla f(2,-1)$  do Exemplo 4 é mostrado na Figura 6 com ponto inicial (2,-1). Também é mostrado o vetor  $\mathbf{v}$ , que dá a direção e sentido da derivada direcional. Ambos os vetores estão sobrepostos ao mapa de contornos do gráfico de f.

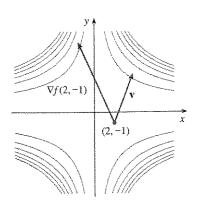


FIGURA 6

## Funções de Três Variáveis

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante. Novamente  $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$  pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção e sentido de um versor  $\mathbf{u}$ .

**10 Definição** A **derivada direcional** de uma função f em  $(x_0, y_0, z_0)$  na direção e sentido do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$  é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se o limite existir.

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

onde  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$  se n = 2 e  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  se n = 3. Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por  $\mathbf{x}_0$  na direção do vetor  $\mathbf{u}$  é dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$  (Equação 12.5.1), e portanto  $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$  representa o valor de f em um ponto dessa reta.

Se f(x, y, z) for diferenciável e  $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ , então o mesmo método usado na prova do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

$$D_{u} f(x, y, z) = f_{x}(x, y, z)a + f_{y}(x, y, z)b + f_{z}(x, y, z)c$$

Para uma função f de três variáveis, o vetor gradiente, denotado por  $\nabla f$  ou grad f, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, simplificando,

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$$

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Se  $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$ , (a) determine o gradiente de f e (b) estabeleça a derivada direcional de f no ponto (1, 3, 0) na direção e sentido de  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

### **SOLUÇÃO**

(a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$
$$= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle$$

(b) No ponto (1, 3, 0) temos  $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$ . O vetor unitário na direção e sentido de  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$D_{\mathbf{u}}f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0) \cdot \mathbf{u}$$

$$= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

# Maximizando a Derivada Direcional

Suponha uma função f de duas ou três variáveis e considere todas as possíveis derivadas direcionais de f em um ponto dado. Isso nos dará a taxa de variação da função em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções f varia mais rápido e qual a máxima taxa de variação? A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

Teorema Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional  $D_{\bf u} f({\bf x})$  é  $|\nabla f({\bf x})|$  e ocorre quando  ${\bf u}$  tem a mesma direção e sentido que o vetor gradiente  $\nabla f({\bf x})$ .

Prova Da Equação 9 ou 14, temos

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\nabla f$  e **u**. O valor máximo de  $\cos \theta$  é 1, e isso ocorre quando  $\theta = 0$ . Portanto o valor máximo de  $D_{\mathbf{u}} f$  é  $|\nabla f|$  e ocorre quando  $\theta = 0$ , ou seja, quando **u** tem a mesma direção e sentido que  $\nabla f$ .

### EXEMPLO 6 $\square$

- (a) Se  $f(x, y) = xe^y$ , determine a taxa de variação de f no ponto P(2, 0) na direção de P a  $O(\frac{1}{2}, 2)$ .
- (b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação? SOLUCÃO
- (a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, x e^y \rangle$$

$$\nabla f(2,0) = \langle 1,2 \rangle$$

O versor da direção  $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5; 2 \rangle$  é  $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ , logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}}f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$$
$$= 1(-\frac{3}{5}) + 2(\frac{4}{5}) = 1$$

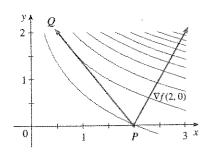


FIGURA 7

 $\square$  No ponto (2, 0) a função do Exemplo 6 aumenta mais rapidamente na direção e sentido do gradiente  $\nabla f(2,0) = \langle 1,2 \rangle$ . Na Figura 7 note que esse vetor parece ser perpendicular à curva de nível que passa por (2, 0). A Figura 8 mostra o gráfico de f e o vetor gradiente.

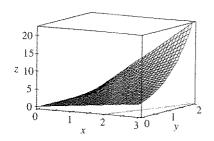


FIGURA 8

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção e sentido do gradiente  $\nabla f(2,0)=\langle 1,2\rangle$ . A máxima taxa de variação é

$$|\nabla f(2,0)| = |\langle 1,2 \rangle| = \sqrt{5}$$

23

**EXEMPLO** 7  $\Box$  Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por  $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ , onde T é medida em graus Celsius e x, y, z em metros. Em que direção no ponto (1, 1, -2) a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

SOLUÇÃO O gradiente de T é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \mathbf{i} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \mathbf{j} - \frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} (-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k})$$

No ponto (1, 1, -2), o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \frac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15 a temperatura aumenta mais rapidamente na direção e sentido do gradiente  $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$  ou, de modo equivalente, na direção e sentido de  $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  ou ainda de seu versor  $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$ . A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \frac{5}{8} |-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Portanto a taxa máxima de aumento da temperatura é  $5\sqrt{41}/8 \approx 4$  °C/m.

# Plano Tangente às Superfícies de Nível

Suponha que S seja uma superfície com equação F(x, y, z) = k, ou seja, uma superfície de nível da função F de três variáveis, e seja  $P(x_0, y_0, z_0)$  um ponto sobre S. Seja C uma curva qualquer contida na superfície S que passe pelo ponto P. Lembre-se de que, da Seção 13.1, a curva C é descrita por uma função vetorial contínua  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ . Seja  $t_0$  o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, ou seja,  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . Como C pertence a S, qualquer ponto (x(t), y(t), z(t)) precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

[16] 
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Se x, y e z são diferenciáveis como função de t e F também é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da Equação 16, como se segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Mas, como  $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$  e  $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$ , a Equação 17 pode ser escrita em termos do produto escalar como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

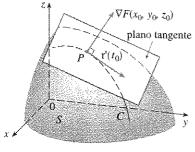


FIGURA 9

Em particular, quando  $t = t_0$ , temos  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , e assim

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

A Equação 18 nos diz que o vetor gradiente em P,  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ , é perpendicular ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t_0)$  a qualquer curva C em S que passe por P (veja a Figura 9). Se  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ , é natural definir o **plano tangente à superficie de nível** F(x, y, z) = k em  $P(x_0, y_0, z_0)$  como o plano que passa por P e tem vetor normal  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ . Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7) podemos escrever a equação do plano tangente como

A **reta normal** a S em P é a reta que passa por P e é perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  e, assim, pela Equação 12.5.3, suas equações na forma simétrica são

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma z = f(x, y) (ou seja, S é o gráfico da função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e entender S como uma superfície de nível (com k=0) de F. Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

logo a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2. Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

**EXEMPLO 8**  $\Box$  Determine as equações do plano tangente e reta normal no ponto (-2, 1, -3) ao elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO O elipsóide é a superfície de nível (com k=3) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

50

□ A Figura 10 mostra o elipsóide, plano tangente e reta normal do Exemplo 8.

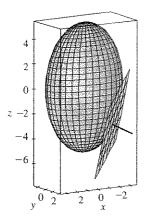


FIGURA 10

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2}$$
  $F_y(x, y, z) = 2y$   $F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$ 

$$F_x(-2, 1, -3) = -1$$
  $F_y(-2, 1, -3) = 2$   $F_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}$ 

Então, da Equação 19, temos a equação do plano tangente no ponto (-2, 1, -3), como

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0$$

que pode ser simplificada para 3x - 6y + 2z + 18 = 0.

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$

# Importância do Vetor Gradiente

Vamos resumir agora os lugares onde o vetor gradiente tem presença importante. Inicialmente consideraremos uma função f de três variáveis e um ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  indica a direção e sentido de maior crescimento da função f. Por outro, sabemos que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é ortogonal às superfícies de nível S de f em P (veja a Figura 9). Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos movemos de P em uma superfície de nível S, o valor da função f não se altera. Parece razoável que, se nos movemos em uma direção perpendicular, obtemos o maior aumento.

Da mesma maneira podemos considerar uma função de duas variáveis f e um ponto  $P(x_0, y_0)$  em seu domínio. Novamente o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  dá a direção e sentido de maior crescimento de f. Também, por considerações semelhantes à nossa discussão sobre o plano tangente, podemos mostrar que  $\nabla f(x_0, y_0)$  é perpendicular à curva de nível f(x, y) = k que passa por P. Mais uma vez, isso é plausível intuitivamente, visto que os valores de f se mantêm constantes quando nos movemos ao longo da curva de nível. (Veja a Figura 11.)

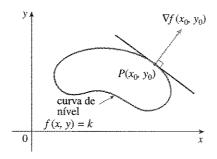


FIGURA 11

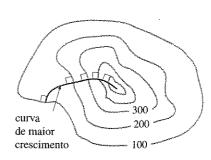


FIGURA 12

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se f(x, y) representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de maior crescimento pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser notado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de maior decrescimento.

Um sistema algébrico computacional tem comandos que plotam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente  $\nabla f(a,b)$  é plotado partindo-se de um ponto (a,b). A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função  $f(x,y) = x^2 - y^2$  sobreposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção e sentido de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

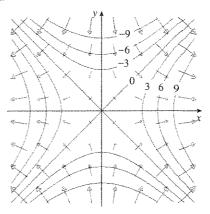
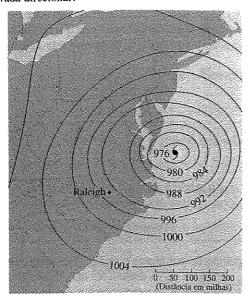


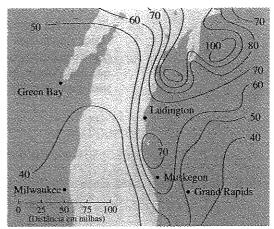
FIGURA 13

# 14.6 Exercícios

É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica (em milímetros) às 7:00 horas da manhã do dia 12 de setembro de 1960, quando o Furação Donna estava ativo. Estime o valor da função pressão em Raleigh, na Carolina do Norte, em direção ao olho do furação. Quais são as unidades da derivada direcional?



O mapa de contorno mostra a precipitação média de neve (em polegadas) perto do Lago Michigan. Estime o valor da derivada direcional da função da precipitação de neve em Múskegon, Michigan, na direção de Ludington. Quais são as unidades?



3. A tabela de valores do índice sensação térmica W = f(T, v) é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de  $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$ , onde  $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ .

4-6  $\Box$  Determine a derivada direcional de f no ponto dado e a direção e sentido indicada pelo ângulo  $\theta$ .

- **4.**  $f(x, y) = x^2y^3 y^4$ , (2, 1),  $\theta = \pi/4$
- **5.**  $f(x, y) = \sqrt{5x 4y}$ , (4, 1),  $\theta = -\pi/6$
- **6.**  $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy)$ , (2, 0),  $\theta = \pi/3$

- (a) Determine o gradiente de f.
- (b) Calcule o gradiente no ponto P.
- (c) Determine a taxa de variação de f em P na direção e sentido do vetor n

7. 
$$f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$$
,  $P(1, 2)$ ,  $\mathbf{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ 

**8.** 
$$f(x, y) = y \ln x$$
,  $P(1, -3)$ ,  $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$ 

**9.** 
$$f(x, y, z) = xe^{2yz}$$
,  $P(3, 0, 2)$ ,  $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 

**10.** 
$$f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$$
,  $P(1, 3, 1)$ ,  $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$ 

33-17  $\odot$  Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção e sentido do vetor  ${\bf v}$ .

**11.** 
$$f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$$
, (3, 4),  $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$ 

**12.** 
$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$
, (2, 1),  $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$ 

**13.** 
$$g(s, t) = s^2 e^t \sin^2(2, 0), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

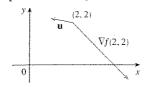
**14.** 
$$g(r, \theta) = e^{-r} \sin \theta$$
,  $(0, \pi/3)$ ,  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 

**15.** 
$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
,  $(1, 2, -2)$ ,  $\mathbf{v} = \langle -6, 6, -3 \rangle$ 

**16.** 
$$f(x, y, z) = x/(y + z)$$
, (4, 1, 1),  $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ 

**17.** 
$$g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$$
,  $(1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 

**18.** Use a figura para estimar  $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$ .



- Determine a derivada directional de  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  em P(2, 8) na direção de Q(5, 4).
- **20.** Estipule a derivada direcional de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  em P(2, 1, 3) em direção à origem.

21-25  $\Box$  Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção e sentido em que isso ocorre.

**21.** 
$$f(x, y) = y^2/x$$
, (2, 4)

**22.** 
$$f(p,q) = qe^{-p} + pe^{-q}$$
,  $(0,0)$ 

**23.** 
$$f(x, y) = \text{sen}(xy)$$
, (1, 0)

**24.** 
$$f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$$
, (1, 1, 1)

**25.** 
$$f(x, y, z) = \ln(xy^2z^3)$$
,  $(1, -2, -3)$ 

**26.** 
$$f(x, y, z) = \operatorname{tg}(x + 2y + 3z), (-5, 1, 1)$$

- (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais depressa em  $\mathbf{x}$  na direção e sentido oposto à do vetor gradiente, ou seja, na direção  $-\nabla f(\mathbf{x})$ .
  - (b) Utilize a parte (a) para determinar a direção e sentido onde  $f(x, y) = x^4y x^2y^3$  decresce mais rápido no ponto (2, -3).

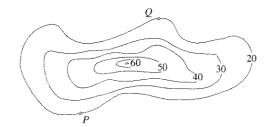
- **28.** Determine as direções e sentidos em que a derivada direcional de  $f(x, y) = x^2 + \text{sen } xy \text{ no ponto } (1, 0) \text{ tem valor } 1.$
- Determine todos os pontos nos quais a direção e sentido de maior variação da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 2x 4y \notin \mathbf{i} + \mathbf{j}$ .
- 30. Nas proximidades de uma bóia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é z = 200 + 0,02x² 0,001y³, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto (80, 60) em direção à bóia, que está localizada no ponto (0, 0). A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.
- 31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto (1, 2, 2) é de  $120^{\circ}$ .
  - (a) Determine a taxa de variação de T em (1, 2, 2) em direção ao ponto (2, 1, 3).
  - (b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.
- 32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

onde T é medido em °C e x, y, z em metros.

- (a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto P(2, -1, 2) em direção ao ponto (3, -3, 3).
- (b) Qual é a direção e sentido de maior crescimento da temperatura em P?
- (c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.
- Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por  $V(x, y, z) = 5x^2 3xy + xyz$ .
  - (a) Determine a taxa de variação do potencial em P(3, 4, 5) na direção do vetor v = i + j - k.
  - (b) Em que direção e sentido V varia mais rapidamente em P?
  - (c) Qual a taxa máxima de variação em P?
- 34. Suponha que você esteja escalando um morro cujo formato é dado pela equação z = 1000 0,01x² 0,02y² onde x, y, e z são medidos em metros, e você esteja em pé no ponto de coordenadas (50, 80, 847). O eixo positivo dos x aponta para o Leste e o eixo positivo dos y aponta para o Norte.
  - (a) Se você andar exatamente para o Sul, você começará a subir ou a descer? Com que taxa?
  - (b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, você começará a subir ou a descer? Com que taxa?
  - (c) Em que direção e sentido a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?
- 35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7) e D(6, 15). A derivada direcional em A na direção e sentido do vetor ÂB é 3, e a derivada direcional em A na direção e sentido AC é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção e sentido do vetor AD.

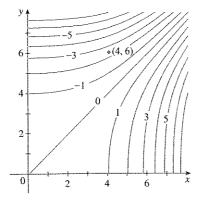
36. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q.



- 37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.
  - (a)  $\nabla (au + bv) = a \nabla u + b \nabla v$  (b)  $\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u$

(c) 
$$\nabla \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$$
 (d)  $\nabla u^n = nu^{n-1} \nabla u$ 

- **38.** Esboce o desenho do vetor gradiente  $\nabla f(4,6)$  para a função fcujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39-44 🗆 Determine equações de (a) plano tangente e (b) reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

**39.** 
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$
,  $(4, -1, 1)$ 

**40.** 
$$x = y^2 + z^2 - 2$$
,  $(-1, 1, 0)$ 

**41.** 
$$x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$$
,  $(2, 1, -1)$ 

**42.** 
$$x - z = 4 \arctan(yz)$$
,  $(1 + \pi, 1, 1)$ 

**43** 
$$z + 1 = xe^y \cos z$$
,  $(1, 0, 0)$ 

**44.** 
$$yz = \ln(x+z)$$
,  $(0,0,1)$ 

45-46 □ Utilize o computador para traçar o gráfico da superfície, plano tangente e reta normal na mesma tela. Escolha o tamanho da janela de inspeção com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

**45.** 
$$xy + yz + zx = 3$$
, (1, 1, 1)

**46.** 
$$xyz = 6$$
,  $(1, 2, 3)$ 

**46.** 
$$xyz = 6$$
,  $(1, 2, 3)$ 

- 47. Se  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ , determine o vetor gradiente  $\nabla f(2, 1)$  e use-o para determinar a reta tangente à curva de nível da função f(x, y) = 8 no ponto (2, 1). Esboce as curvas de nível, reta tangente e vetor gradiente.
- **48.** Se  $g(x, y) = x y^2$ , determine o vetor gradiente  $\nabla g(3, -1)$  e use-o para achar a reta tangente à curva de nível g(x, y) = 2 no ponto (3, -1). Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.
- 49. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  pode ser

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

- 50. Determine a equação do plano tangente ao hiperbolóide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$  em  $(x_0, y_0, z_0)$  e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 49.
- 51. Mostre que a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico  $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  pode ser

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

- **52.** Determine os pontos sobre o elipsóide  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano 3x - y + 3z = 1.
- **53.** Determine os pontos no hiperbolóide  $x^2 y^2 + 2z^2 = 1$  onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos (3, -1, 0) e
- **54.** Mostre que o elipsóide  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  e a esfera  $x^{2} + y^{2} + z^{2} - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$  se tangenciam no ponto (1, 1, 2). (Isso significa que eles têm uma tangente comum nesse ponto.)
- **55.** Mostre que todo plano que é tangente ao cone  $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.
- **56.** Mostre que a reta normal à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  passa pelo centro da esfera.
- Mostre que a soma das interseções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$  é uma constante.
- 58. Mostre que o produto das interseções com os eixos x,  $y \in z$ de qualquer plano tangente à superfície  $xyz = c^3$  é uma
- 59. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela interseção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  com o elipsóide  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  no ponto (-1, 1, 2).
- **60.** (a) O plano y + z = 3 intercepta o cilindro  $x^2 + y^2 = 5$  em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto (1, 2, 1).
- (b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.
  - 61. (a) Duas superfícies são ditas ortogonais em um ponto de interseção se suas normais são perpendiculares nesse

ponto. Mostre que superfícies com equação F(x, y, z) = 0e G(x, y, z) = 0 são ortogonais em um ponto P onde  $\nabla F \neq \mathbf{0} \in \nabla G \neq \mathbf{0}$  se e somente se, em P,  $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$ 

- (b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies  $z^2 = x^2 + y^2$  $e^{2} + y^{2} + z^{2} = r^{2}$  são ortogonais em todo ponto de interseção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?
- **62.** (a) Mostre que a função  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$  é contínua e suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem na origem mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.
- (b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).
- **63.** Suponha que as derivadas directionais de f(x, y) sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por seus versores u e v. É possível determinar  $\nabla f$  nesse ponto? Se sim, como fazê-lo?
- **64.** Mostre que, se z = f(x, y) for diferenciável em  $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$
[Dica: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

# 147

### Valores Máximo e Mínimo

Como vimos no Capítulo 4 do Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade fixa de cartolina para trabalhar.

 $\square$  Definição Uma função de duas variáveis tem um máximo local em (a, b) se  $f(x, y) \le f(a, b)$  quando (x, y) está próximo de (a, b). [Isso significa que  $f(x, y) \le f(a, b)$  para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, y)b).] O número f(a, b) é chamado valor máximo local. Se  $f(x, y) \ge f(a, b)$  quando (x, y) está próximo de (a, b), então f(a, b) é um valor mínimo local.

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um máximo absoluto (ou mínimo absoluto) em (a, b).

O gráfico da função com muitos máximos e mínimos locais é mostrado na Figura 1. Você pode pensar nos máximos locais como picos de montanhas e nos mínimos locais como o fundo dos vales.

[2] Teorema Se uma função f tem um máximo ou mínimo locais em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então  $f_x(a, b) = 0$ e  $f_{y}(a, b) = 0$ .

Prova Seja g(x) = f(x, b). Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então gtem um máximo (ou mínimo) local em a, de modo que g'(a) = 0 pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4 no Volume I). Mas  $g'(a) = f_x(a, b)$  (veja a Equação 14.3.1), e assim  $f_x(a, b) = 0$ . Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função G(y) = f(a, y), obtemos  $f_y(a, b) = 0$ .

Se impusermos  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$  na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos  $z = z_0$ . Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é que, se o gráfico de f tem um plano tangente em um ponto de máximo ou mínimo locais, esse plano precisa ser horizontal.

Um ponto (a, b) é dito ser um **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se  $f_x(a, b) = 0$ e  $f_v(a,b) = 0$ , ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema 2 diz que, se f tem um máximo ou mínimo locais em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f. Entretanto, como no cálculo de uma única variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

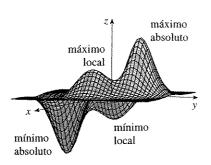


FIGURA 1

□ Note que a conclusão do Teorema 2 pode ser colocada em termos do gradiente como  $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ .

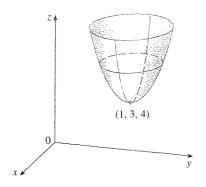


FIGURA 2  $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ 

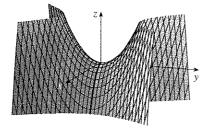


FIGURA 3  $z = y^2 - x^2$ 

EXEMPLO 1  $\Box$  Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ . Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2$$
  $f_y(x, y) = 2y - 6$ 

Essas derivadas parciais são nulas quando x = 1 e y = 3, portanto o único ponto crítico é (1, 3). Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Como  $(x-1)^2 \ge 0$  e  $(y-3)^2 \ge 0$ , temos  $f(x,y) \ge 4$  para todos os valores de x e y. Logo, f(1,3) = 4 é um mínimo local, e de fato é um mínimo absoluto de f. Isso pode ser confirmado geometricamente do gráfico de f, que é um parabolóide elíptico com vértice (1,3,4), mostrado na Figura 2.

EXEMPLO 2  $\supset$  Determine os valores extremos de  $f(x, y) = y^2 - x^2$ .

SOLUÇÃO Como  $f_x = -2x$  e  $f_y = 2y$ , o único ponto crítico é (0, 0). Note que, para os pontos sobre o eixo x, temos y = 0, de modo que  $f(x, y) = -x^2 < 0$  (se  $x \ne 0$ ). Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos x = 0, e então  $f(x, y) = y^2 > 0$  (se  $y \ne 0$ ). Logo, todo disco com centro (0, 0) contém pontos onde a função f tem valores positivos, assim como pontos onde f tem valores negativos. Por conseguinte, f(0, 0) = 0 não pode ser um valor extremo de f, e f não tem valor extremo.

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico. A Figura 3 mostra como isso é possível. O gráfico de f é o parabolóide hiperbólico  $z=y^2-x^2$ , que tem plano horizontal tangente (z=0) na origem. Você pode ver que f(0,0)=0 é um máximo na direção do eixo x, mas um mínimo na direção do eixo y. Perto da origem o gráfico tem o formato de uma sela, e por isso (0,0) é chamado ponto de sela de f.

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. O teste que se segue, que será provado no final desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

3 Teste da Segunda Derivada Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$  [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^{2}$$

- (a) Se D > 0 e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então f(a, b) é um mínimo local.
- (b) Se D > 0 e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então f(a, b) é um máximo local.
- (c) Se D < 0, então f(a, b) não é mínimo local nem máximo local.

NOTA 1  $\square$  No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f, e o gráfico de f atravessa seu plano tangente em (a, b).

NOTA 2  $\square$  Se D=0, o teste não fornece informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a,b), ou (a,b) pode ser um ponto de sela de f.

NOTA 3  $\,\Box$  Para lembrar a fórmula de D é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

929.3 25.4

EXEMPLO 3  $\Box$  Determine os valores de máximo e mínimo locais e os pontos de sela de  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

SOLUÇÃO Vamos inicialmente localizar os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y$$
  $f_y = 4y^3 - 4x$ 

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0$$
 e  $y^3 - x = 0$ 

Para resolvê-las, substituímos  $y = x^3$  da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: x = 0, 1, -1. Os três pontos críticos são (0, 0), (1, 1) e (-1, -1).

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e D(x, y):

$$f_{xx} = 12x^2$$
  $f_{xy} = -4$   $f_{yy} = 12y^2$ 

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como D(0,0)=-16<0, segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em (0,0). Como D(1,1)=128>0 e  $f_{xx}(1,1)=12>0$ , vemos do caso (a) do teste que f(1,1)=-1 é um mínimo local. Da mesma forma, temos D(-1,-1)=128>0 e  $f_{xx}(-1,-1)=12>0$ , e então f(-1,-1)=-1 é também um mínimo local.

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

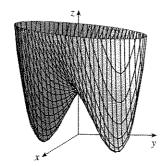


FIGURA 4  $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 

☐ Um mapa de contorno da função *f* do Exemplo 3 é mostrado na Figura 5. As curvas de nível perto de (1, 1) e (−1, −1) têm forma oval e indicam que, quando nos movemos para longe de (1, 1) ou (−1, −1) em qualquer direção, os valores de *f* crescem. As curvas de nível perto de (0, 0), por outro lado, parecem hipérboles. Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de *f* é 1), os valores de *f* decrescem em algumas

direções, mas crescem em outras. Portanto o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.

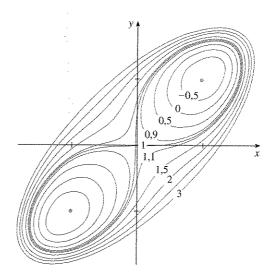


FIGURA 5

EXEMPLO 4 

Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

SOLUÇÃO As primeiras derivadas parciais são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3$$
  $f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$ 

 $2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$ 

Para achar os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Da Equação 4, vemos que

4

5

$$x = 0$$
 ou  $10y - 5 - 2x^2 = 0$ 

No primeiro caso (x = 0), a Equação 5 fica  $-4y(1 + y^2) = 0$ , assim y = 0 e temos um ponto crítico (0, 0).

No segundo caso  $(10y - 5 - 2x^2 = 0)$ , temos

$$x^2 = 5y - 2.5$$

e, substituindo na Equação 5, temos  $25y-12,5-4y-4y^3=0$ . Logo, temos de resolver a equação cúbica

$$\boxed{7} \qquad 4y^3 - 21y + 12.5 = 0$$

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12,5$$

como na Figura 6, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais. Dando um *zoom* podemos achar as raízes com quatro decimais:

$$v \approx -2,5452$$

$$y \approx 0.6468$$

$$y \approx 1,8984$$

(Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar as raízes para determiná-las.) Da Equação 6, os valores de x correspondentes são dados por

$$x = \pm \sqrt{5y - 2.5}$$

Se  $y \approx -2,5452$ , então x não tem valor real correspondente. Se  $y \approx 0,6468$ , logo,  $x \approx \pm 0,8567$ . Se  $y \approx 1,8984$ , então  $x \approx \pm 2,6442$ . Assim temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela que se segue. Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

| Ponto crítico | Valor de f | $f_{xy}$ | D        | Conclusões    |
|---------------|------------|----------|----------|---------------|
| (0, 0)        | 0,00       | -10,00   | 80,00    | máximo local  |
| (±2,64, 1,90) | 8,50       | -55,93   | 2.488,71 | máximo local  |
| (±0,86, 0,65) | -1,48      | -5,87    | -187,64  | ponto de sela |

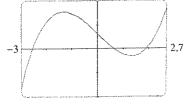


FIGURA 6

Y.T

As Figuras 7 e 8 mostram o gráfico de f sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície abre para baixo. [Isso pode ser visto da expressão de f(x, y): os termos dominantes são  $-x^2 - 2y^4$  quando |x| e |y| são grandes.] Comparando os valores de f nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de f é  $f(\pm 2,64, 1,90) \approx 8,50$ . Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de f são  $(\pm 2,64, 1,90, 8,50)$ .

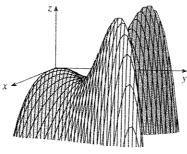


FIGURA 7

FIGURA 8

 $\square$  Os cinco pontos críticos da função f do Exemplo 4 são mostrados no mapa de contorno de f na Figura 9.

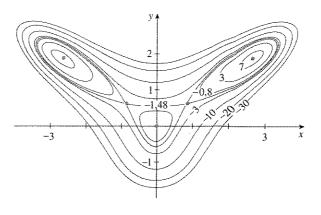


FIGURA 9

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Determine a distância mais curta entre o ponto (1, 0, -2) e o plano x + 2y + z = 4.

SOLUÇÃO A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto (1, 0, -2) é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

mas, se (x, y, z) pertence ao plano x + 2y + z = 4, então z = 4 - x - 2y, e assim temos  $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$ . Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

achamos que o único ponto crítico é  $(\frac{11}{6},\frac{5}{3})$ . Como  $f_{xx}=4$ ,  $f_{xy}=4$  e  $f_{yy}=10$ , temos  $D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=24>0$  e  $f_{xx}>0$ . Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em  $(\frac{11}{6},\frac{5}{3})$ . Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é,

na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de (1, 0, -2). Se  $x = \frac{11}{6}$  e  $y = \frac{5}{3}$ , então

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

A distância mais curta de (1, 0, -2) ao plano x + 2y + z = 4 é  $5\sqrt{6}/6$ .

**EXEMPLO 6** 

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

SOLUÇÃO Seja o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) x, y e z, como mostrado na Figura 10. O volume dessa caixa é

$$V = xyz$$

Podemos expressar V como função só de x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Resolvendo essa equação para z, obtemos z = (12 - xy)/[2(x + y)], e V fica

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Se calcularmos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2 (12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2 (12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Se V é um máximo, então  $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$ , mas x = 0 ou y = 0 fornecem V = 0, dessa forma, precisamos resolver as equações

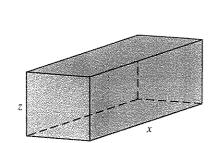
$$12 - 2xy - x^2 = 0 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Isso leva a  $x^2 = y^2$  e portanto x = y. (Note que x e y precisam ser positivos no problema.) Se substituirmos x = y em uma das equações, obteremos  $12 - 3x^2 = 0$ , que dá x = 2, y = 2 e  $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$ .

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V, ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto e que, portanto, esse máximo ocorre quando x = 2, y = 2, z = 1. Assim,  $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ , e o volume máximo da caixa é 4 m<sup>3</sup>.

## Valores Máximo e Mínimo Absolutos

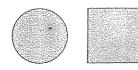
Para uma função f de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado [a,b], então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1 do Volume I, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nos extremos do intervalo a e b.



☐ O Exemplo 5 poderia ser resolvido utilizando-se vetores. Compare com os

métodos da Seção 12.5.

FIGURA 10



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos não fechados

FIGURA 11

Para as funções de duas variáveis a situação é semelhante. Como para os intervalos fechados os extremos do intervalo estão contidos no intervalo, um **conjunto fechado** de  $\mathbb{R}^2$  contém todos os seus pontos da fronteira. [Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.] Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ). Mas mesmo que um único ponto da fronteira seja omitido, o conjunto deixa de ser fechado (veja a Figura 11).

Um **conjunto limitado** em  $\mathbb{R}^2$  é aquele que está contido em algum disco. Em outras palavras, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos estabelecer o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para as duas dimensões.

**8** Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado D de  $\mathbb{R}^2$ , então f atinge um valor máximo absoluto  $f(x_1, y_1)$  e um valor mínimo absoluto  $f(x_2, y_2)$  em alguns pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  de D.

Para achar os pontos extremos cuja existência é garantida pelo Teorema 8, notamos que, pelo Teorema 2, se f tem um valor extremo em  $(x_1, y_1)$ , então  $(x_1, y_1)$  ou é um ponto crítico de f ou um ponto da fronteira de D. Portanto temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.

- $\fbox{ \ \ \, }$  Para determinar um máximo ou mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:
- 1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f no interior de D.
- 2. Estabeleça os valores extremos de f na fronteira de D.
- 3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

**EXEMPLO 7**  $\square$  Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$  no retângulo  $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$ .

SOLUÇÃO Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, e, portanto, o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto. De acordo com o passo 1 de (9), inicialmente devemos calcular os pontos críticos. Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0$$
  $f_y = -2x + 2 = 0$ 

e, assim, o único ponto crítico existente é (1, 1), no qual temos f(1, 1) = 1.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  mostrados na Figura 12. Em  $L_1$ , temos y = 0 e

$$f(x,0) = x^2 \qquad 0 \le x \le 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de x, que tem valor mínimo f(0,0)=0 e máximo f(3,0)=9. Sobre  $L_2$ , temos x=3 e

$$f(3, y) = 9 - 4y$$
  $0 \le y \le 2$ 

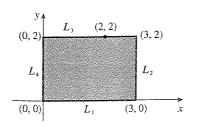


FIGURA 12

Essa é uma função decrescente de y, portanto seu máximo é f(3, 0) = 9 e seu mínimo é f(3, 2) = 1. Sobre  $L_3$ , temos y = 2 e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \le x \le 3$$

Pelos métodos do Capítulo 4 do Volume I, ou simplesmente observando que  $f(x, 2) = (x - 2)^2$ , vemos que o mínimo valor dessa função é f(2, 2) = 0, e seu valor máximo é f(0, 2) = 4. Finalmente, sobre  $L_4$ , temos x = 0 e

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \le y \le 2$$

com valor máximo f(0, 2) = 4 e valor mínimo f(0, 0) = 0. Portanto, na fronteira, o valor mínimo de  $f \in 0$  e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor f(1, 1) = 1 no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é f(3, 0) = 9, e o valor mínimo absoluto é f(0, 0) = f(2, 2) = 0. A Figura 13 mostra o gráfico de f.

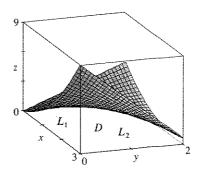


FIGURA 13  
$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

Fechamos esta seção com a prova da primeira parte do Teste da Segunda Derivada. As partes (b) e (c) têm provas semelhantes.

Prova da Parte (a) do Teorema 3 Vamos calcular a segunda derivada direcional de f na direção de  $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ . A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}}f = f_{x}h + f_{y}k$$

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$D_{\mathbf{u}}^{2} f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) = \frac{\partial}{\partial x} (D_{\mathbf{u}} f) h + \frac{\partial}{\partial y} (D_{\mathbf{u}} f) k$$

$$= (f_{xx} h + f_{yx} k) h + (f_{xy} h + f_{yy} k) k$$

$$= f_{xx} h^{2} + 2f_{xy} h k + f_{yy} k^{2}$$
 (pelo Teorema de Clairaut)

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$D_{\rm u}^2 f = f_{\rm xx} \left( h + \frac{f_{\rm xy}}{f_{\rm rx}} k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{\rm rx}} \left( f_{\rm xx} f_{\rm yy} - f_{\rm xy}^2 \right)$$

Temos que  $f_{xx}(a, b) > 0$  e D(a, b) > 0. Mas  $f_{xx}$  e  $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$  são funções contínuas, logo existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio  $\delta > 0$  tal que  $f_{xx}(x, y) > 0$  e D(x, y) > 0 sempre que (x, y) pertencer a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que  $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$  sempre que (x, y) pertencer a B. Isso implica que, se C é uma curva obtida pela interseção do gráfico de f com o plano vertical que passa por P(a, b, f(a, b)) na direção de  $\mathbf{u}$ , então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento  $2\delta$ . Isso é verdadeiro na direção de todo vetor  $\mathbf{u}$ ; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em f. Logo,  $f(x, y) \geq f(a, b)$  sempre que f(x, y) estiver em f. Isso mostra que f(a, b) é um mínimo local.

## 14.7 Exercícios

Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) 
$$f_{xx}(1, 1) = 4$$
,  $f_{xy}(1, 1) = 1$ ,  $f_{yy}(1, 1) = 2$ 

(b) 
$$f_{xx}(1, 1) = 4$$
,  $f_{xy}(1, 1) = 3$ ,  $f_{yy}(1, 1) = 2$ 

**2.** Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de *g* com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre *g*?

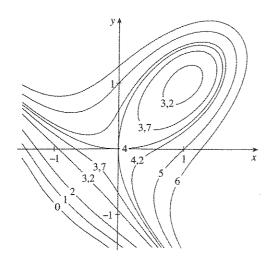
(a) 
$$g_{xx}(0, 2) = -1$$
,  $g_{xy}(0, 2) = 6$ ,  $g_{yy}(0, 2) = 1$ 

(b) 
$$g_{xy}(0, 2) = -1$$
,  $g_{xy}(0, 2) = 2$ ,  $g_{yy}(0, 2) = -8$ 

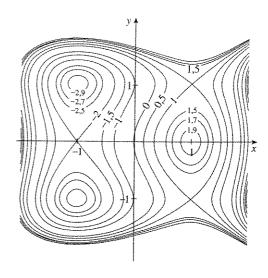
(c) 
$$q_{xx}(0, 2) = 4$$
,  $q_{xy}(0, 2) = 6$ ,  $q_{yy}(0, 2) = 9$ 

3-4 □ Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo locais em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$



**4.** 
$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$$



5-18 □ Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, utilize-o com a janela de inspeção e o ponto de vista que mostre os aspectos importantes da função.

5. 
$$f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

**6.** 
$$f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$$

7. 
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

8. 
$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$$

**9.** 
$$f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$$

**10.** 
$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

11. 
$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$$

**12.** 
$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

**14.** 
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$15. f(x, y) = x \operatorname{sen} y$$

**16.** 
$$f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

17. 
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$$

**18.** 
$$f(x, y) = x^2 y e^{-x^2 - y^2}$$

19-22 □ Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida use o cálculo para achar esses valores precisamente.

**19.** 
$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

**20.** 
$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$$

**21.** 
$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$
  
  $0 \le x \le 2\pi, \ 0 \le y \le 2\pi$ 

22. 
$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y),$$
  
 $0 \le x \le \pi/4, \ 0 \le y \le \pi/4$ 

23-26 □ Utilize um dispositivo gráfico como no Exemplo 4 (ou Método de Newton ou um determinador de raízes) para estabelecer os pontos críticos de f com arredondamento na terceira casa decimal. Em seguida classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

**23.** 
$$f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$$

**24.** 
$$f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$$

**25.** 
$$f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$$

**26.** 
$$f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4\cos y$$

27-34 □ Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

- 27. f(x, y) = 1 + 4x 5y, D é a região triangular fechada com vértices (0, 0), (2, 0), e (0, 3)
- **28.** f(x, y) = 3 + xy x 2y, D é a região triangular fechada com vértices (1, 0), (5, 0), e (1, 4)

29. 
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$
,  
 $D = \{(x, y) | |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 

**30.** 
$$f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$$
,  
 $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\}$ 

31. 
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$
,  
 $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$ 

**32.** 
$$f(x, y) = xy^2$$
,  $D = \{(x, y) | x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 3\}$ 

**33.** 
$$f(x, y) = 2x^3 + y^4$$
,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$ 

**34.** 
$$f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$$
,  $D \notin o$  quadrilátero cujos vértices são  $(-2, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 2)$ .

35. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de tamanho de janela de inspeção e de ponto de vista para ver como isso é possível.

36. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^{y} - x^{3} - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo, local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida utilize um computador com uma escolha conveniente de janela de inspeção e ponto de vista para ver como isso é possível.

- 37. Determine a distância mais curta entre o ponto (2, 1, -1) e o plano x + y - z = 1.
- 38. Determine o ponto do plano x y + z = 4 que está mais próximo do ponto (1, 2, 3).
- Determine os pontos da superfície  $z^2 = xy + 1$  que estão mais próximos da origem.
- **40.** Determine os pontos da superfície  $x^2y^2z = 1$  que estão mais próximos da origem.
- Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.
- 42. Determine três números positivos x, y e z cuja soma é 100 tal que  $x^a y^b z^c$  seja máximo.
- 43. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

44. Resolva o problema do Exercício 43 para um elipsóide genérico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

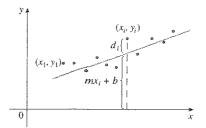
- 45. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano x + 2y + 3z = 6.
- 46. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se sua superfície total é dada como 64 cm2.
- 47. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.
- **48.** A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

- 49. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm³. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.
- 50. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 units/m² por dia, as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 units/m² por dia, o piso, a uma taxa de 1 unit/m² por dia e o terraço, a uma taxa de 5 units/m² por dia. Cada parede deve ter, pelo menos, 30 m de comprimento, a altura, no mínimo, 4 m, e o volume exatamente 4.000 m³.
  - (a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos seus lados.
  - (b) Ache as dimensões que minimizam a perda de calor.
     (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)
  - (c) Você poderia projetar um prédio com precisamente a mesma perda de calor se as restrições sobre os comprimentos dos lados fossem removidas?
- **51.** Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser *L*, qual é o maior volume possível?
- 52. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg estabelece que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são proporções de A, B e O na população. Use o fato de que p+q+r=1 para mostrar que P é no máximo  $\frac{2}{3}$ .

53. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y sejam relacionadas linearmente, ou seja, y = mx + b, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e b. O cientista realiza um experimento e coleta os dados na forma de pontos (x1, y1), (x2, y2), ..., (xn, yn), e então plota-os. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta y = mx + b "se aproxime" dos pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja  $d_i = y_i - (mx_i + b)$  o desvio vertical do ponto  $(x_i, y_i)$  da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar  $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ , a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta que melhor aproxima é obtida quando

$$m\sum_{i=1}^{n}x_{i}+bn=\sum_{i=1}^{n}y_{i} \qquad m\sum_{i=1}^{n}x_{i}^{2}+b\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\sum_{i=1}^{n}x_{i}y_{i}$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)

**54.** Determine uma equação do plano que passe pelo ponto (1, 2, 3) que corte o menor volume do primeiro octante.

## Projeto Aplicado

#### Projeto de uma Caçamba

Para esse projeto, inicialmente defina a forma na qual você deseja dimensionar uma caçamba de entulho com tampa. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar que minimize o custo de construção.

- 1. Primeiro estabeleça uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
- 2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
  - Os lados, a frente e a retaguarda devem ser feitos de aço laminado de 0,1046 polegada de espessura, que custa \$ 0,70 por pé quadrado (incluindo custos de corte e dobra).
  - A base (fundo) é feita de um aço laminado de 0,1345 polegada de espessura, que custa \$ 0,90 por pé quadrado.
  - As tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, não importando a dimensão.
  - A soldagem custa aproximadamente \$ 0,18 por pé, considerando tanto o material quanto a mão-de-obra.

Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.

- 3. Descreva como qualquer das hipóteses ou simplificações feitas pode afetar o resultado.
- 4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração da forma da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

#### Projeto Descoberta

#### Aproximação Quadrática e Pontos Críticos

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função f de duas variáveis em um ponto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de L é o plano tangente da superfície z = f(x, y) em (a, b, f(a, b)), e a aproximação linear correspondente é  $f(x, y) \approx L(x, y)$ . A linearização L é também chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de f em (a, b).

1. Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (a, b), então o polinômio de Taylor de segundo grau de f em (a, b) é

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
  
+  $\frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$ 

e a aproximação  $f(x, y) \approx Q(x, y)$  é denominada de **aproximação quadrática** de f em (a, b). Verifique que Q tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que f em (a, b).

- (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para f(x, y) = e<sup>-x<sup>1</sup>-y<sup>2</sup></sup> em (0, 0).
   (b) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.
- **3.** (a) Estabeleça os polinômios de Taylor de primeíro e segundo graus  $L \in Q$  para  $f(x, y) = xe^y$ 
  - (b) Compare os valores de L, Q e f em (0,9,0,1).
- (c) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.
  - **4.** Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um parabolóide.
    - (a) Completando os quadrados, mostre que, se  $a \neq 0$ , então

$$f(x, y) = ax^{3} + bxy + cy^{2} = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} y \right)^{2} + \left( \frac{4ac - b^{2}}{4a^{2}} \right) y^{2} \right]$$

- (b) Seja  $D = 4ac b^2$ . Prove que, se D > 0 e a > 0, então f tem um mínimo local em (0, 0).
- (c) Demonstre que, se D > 0 e a < 0, então f tem um máximo local em (0, 0).
- (d) Mostre que, se  $D \le 0$ , então (0,0) é um ponto de sela.
- 5. (a) Suponha que, f seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que f(0,0) = 0 e que (0,0) seja um ponto crítico de f. Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau Q, de f em (0,0).
  - (b) O que você conclui sobre Q usando os resultados do Problema 4?
  - (c) Em vista da aproximação quadrática  $f(x, y) \approx Q(x, y)$ , o que a parte (b) sugere sobre  $f^{y}$

## Multiplicadores de Lagrange

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume V=xyz sujeita à restrição 2xz+2yz+xy=12, que expressa a condição da área da superfície ser de 12 m². Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica f(x,y,z) sujeita a uma restrição (ou condição) da forma g(x,y,z)=k.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então vamos começar tentando determinar os valores extremos de f(x, y) sujeita à restrição da forma g(x, y) = k. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de f(x, y) quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível g(x, y) = k. A Figura 1 mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função f. Essas curvas de nível têm equação f(x, y) = c, onde c = 7, 8, 9, 10, 11. Maximizar f(x, y) sujeita a g(x, y) = k é achar qual o maior valor de c tal que a curva de nível f(x, y) = c intercepte g(x, y) = k. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente em comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c.) Isso significa que as retas normais ao ponto  $(x_0, y_0)$  onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo os vetores gradientes são paralelos: ou seja,  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$  para algum escalar  $\lambda$ .

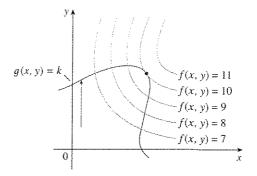


FIGURA 1

Esse argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de f(x, y, z) sujeita à restrição g(x, y, z) = k. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação g(x, y, z) = k. Em vez das curvas de nível da Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível f(x, y, z) = c e argumentar que, se o valor máximo de  $f \in f(x_0, y_0, z_0) = c$ , então a superfície de nível f(x, y, z) = c é tangente à superfície de nível g(x, y, z) = k, e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode ser colocado de forma precisa como se segue. Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  sobre a superfície S e seja C a curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  que pertença a S e passe pelo ponto P. Se  $t_0$  é o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, então  $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . A função composta h(t) = f(x(t), y(t), z(t)) fornece os valores de f sobre a curva C. Como f tem um valor extremo em  $(x_0, y_0, z_0)$ , segue que f tem um valor extremo em f0, e, portanto, f1. Porém, se f2 for diferenciável, usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$0 = h'(t_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)$$
  
=  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ 

Isso mostra que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é ortogonal ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t_0)$  para toda curva C assim obtida. Mas já vimos na Seção 14.6 que o vetor gradiente de g,  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ , também é ortogonal a  $\mathbf{r}'(t_0)$  (veja a Equação 14.6.18). Isso significa

☐ Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Veja no Volume I, à página 292, uma pequena biografia de Lagrange.

 $\square$  Ao derivar o Método de Lagrange, supusemos que  $\nabla g \neq \mathbf{0}$ . Em cada um de nossos exemplos você pode verificar que  $\nabla g \neq \mathbf{0}$  em todos os pontos onde g(x,y,z)=k.

que os vetores  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  precisam ser paralelos. Portanto, se  $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ , existe um número  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

O número  $\lambda$  na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

**Método dos Multiplicadores de Lagrange** Para determinar os valores máximo e mínimo de f(x, y, z) sujeita a g(x, y, z) = k [supondo que esses valores extremos existam e que  $\nabla g \neq 0$  sobre a superfície g(x, y, z) = k]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \dot{\nabla} g(x, y, z)$$

g(x, y, z) = k

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Se escrevermos a equação vetorial  $\nabla f = \lambda \nabla g$  em termos de seus componentes, a equação do passo (a) ficará

$$f_x = \lambda g_x$$
  $f_y = \lambda g_y$   $f_z = \lambda g_z$   $g(x, y, z) = k$ 

Isto é, um sistema de quatro equações a quatro incógnitas x, y, z e  $\lambda$ . Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para  $\lambda$ .

Para as funções de duas variáveis, o método de Lagrange é semelhante àquele que acabamos de descrever. Para achar os valores extremos de f(x, y) sujeita à restrição g(x, y) = k, olhamos para todos os valores de  $x, y \in \lambda$  tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$
 e  $g(x, y) = k$ 

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x$$
  $f_y = \lambda g_y$   $g(x, y) = k$ 

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Uma caixa retangular sem tampa é feita de 12 m<sup>2</sup> de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 6 da Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

e

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z, e  $\lambda$  tal que  $\nabla V = \lambda \nabla g$  e g(x, y, z) = 12. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x$$
  $V_y = \lambda g_y$   $V_z = \lambda g_z$   $2xz + 2yz + xy = 12$ 

ou seja:

$$yz = \lambda(2z + y)$$

$$3 \qquad \qquad xz = \lambda(2z + x)$$

$$xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$[5]$$
  $2xz + 2yz + xy = 12$ 

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso você pode notar que, se multiplicarmos (2) por x, (3) por y e (4) por z, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$\boxed{\mathbf{6}}$$
  $xyz = \lambda(2xz + xy)$ 

$$\overline{7} \qquad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observamos que  $\lambda \neq 0$  porque  $\lambda = 0$  implicaria yz = xz = xy = 0 de (2), (3) e (4), e isso contradiz (5). Logo, de (6) e (7), temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que dá xz = yz. Mas  $z \ne 0$  (uma vez que z = 0 daria V = 0), portanto x = y. De (7) e (8), obtemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá 2xz = xy e, assim, (como  $x \ne 0$ ) y = 2z. Se colocarmos x = y = 2z em (5), obteremos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y e z são todos positivos, temos que z = 1, x = 2 e y = 2 como antes.

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Determine os valores extremos da função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  no círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição  $g(x,y)=x^2+y^2=1$ . Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações  $\nabla f=\lambda \nabla g, g(x,y)=1$ , que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x$$
  $f_y = \lambda g_y$   $g(x, y) = 1$ 

ou como

11

$$9 2x = 2x\lambda$$

$$4y = 2y\lambda$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

☐ Outro método de resolver o sistema de equações (2-5) é resolver cada uma das equações 2, 3 e 4 para depois equacionar as expressões resultantes.

 $\square$  Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C da Figura 2 que pertence ao parabolóide  $z=x^2+2y^2$  e cuja projeção seja o círculo de restrição  $x^2+y^2=1$ .

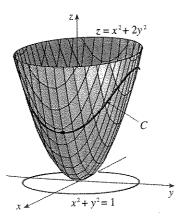


FIGURA 2

 $\Box$  A geometría por tràs do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de  $f(x,y)=x^2+2y^2$  correspondem às curvas de nível que encostam na circunferência  $x^2+y^2=1$ .

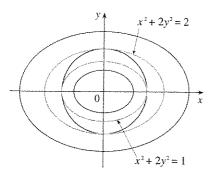


FIGURA 3

De (9), temos x = 0 ou  $\lambda = 1$ . Se x = 0, então (11) leva a  $y = \pm 1$ . Se  $\lambda = 1$ , então y = 0 de (10), e assim (11) fornece  $x = \pm 1$ . Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos (0, 1), (0, -1), (1, 0) e (-1, 0). Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2$$
  $f(0, -1) = 2$   $f(1, 0) = 1$   $f(-1, 0) = 1$ 

Portanto, o valor máximo de f no círculo  $x^2 + y^2 = 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é  $f(\pm 1, 0) = 1$ . Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Estabeleça os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  no disco  $x^2 + y^2 \le 1$ .

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Como  $f_x = 2x$  e  $f_y = 4y$ , o único ponto crítico é (0, 0). Comparamos o valor de f nesse ponto com os valores extremos de f na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0,0) = 0$$
  $f(\pm 1,0) = 1$   $f(0,\pm 1) = 2$ 

Assim, o valor máximo de f no disco  $x^2 + y^2 \le 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é f(0, 0) = 0.

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Determine os pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que estão mais próximos e mais distantes do ponto (3, 1, -1).

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto (3, 1, -1) é

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância;

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos  $\nabla f = \lambda \nabla g$ , g = 4, o que nos leva a:

$$2(x-3)=2x\lambda$$

$$2(y-1) = 2y\lambda$$

$$2(z+1)=2z\lambda$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de  $\lambda$  de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15). De (12), temos

$$x-3=x\lambda$$
 ou  $x(1-\lambda)=3$  ou  $x=\frac{3}{1-\lambda}$ 

 $\square$  A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de  $f(x,y)=x^2+2y^2$  correspondem às curvas de nível que encostam na circunferência  $x^2+y^2=1$ .

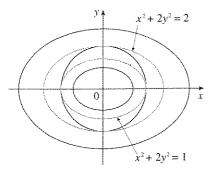


FIGURA 3

De (9), temos x = 0 ou  $\lambda = 1$ . Se x = 0, então (11) leva a  $y = \pm 1$ . Se  $\lambda = 1$ , então y = 0 de (10), e assim (11) fornece  $x = \pm 1$ . Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos (0, 1), (0, -1), (1, 0) e (-1, 0). Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2$$
  $f(0, -1) = 2$   $f(1, 0) = 1$   $f(-1, 0) = 1$ 

Portanto, o valor máximo de f no círculo  $x^2 + y^2 = 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é  $f(\pm 1, 0) = 1$ . Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Estabeleça os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  no disco  $x^2 + y^2 \le 1$ .

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Como  $f_x = 2x$  e  $f_y = 4y$ , o único ponto crítico é (0, 0). Comparamos o valor de f nesse ponto com os valores extremos de f na fronteira obtidos no Exemplo 2:

$$f(0,0) = 0$$
  $f(\pm 1,0) = 1$   $f(0,\pm 1) = 2$ 

Assim, o valor máximo de f no disco  $x^2 + y^2 \le 1$  é  $f(0, \pm 1) = 2$ , e o valor mínimo é f(0, 0) = 0.

**EXEMPLO 4**  $\square$  Determine os pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que estão mais próximos e mais distantes do ponto (3, 1, -1).

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto (3, 1, -1) é

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos  $\nabla f = \lambda \nabla g$ , g = 4, o que nos leva a:

$$\boxed{12} \qquad \qquad 2(x-3) = 2x\lambda$$

$$2(y-1)=2y\lambda$$

$$2(z+1)=2z\lambda$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de  $\lambda$  de (12), (13) e (14), e substituir esses valores em (15). De (12), temos

$$x-3=x\lambda$$
 ou  $x(1-\lambda)=3$  ou  $x=\frac{3}{1-\lambda}$ 

96

☐ A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo **P** do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de **P** sem usar o cálculo?

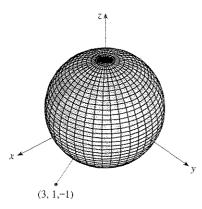
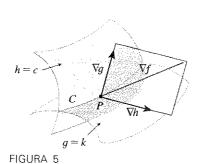


FIGURA 4



[Note que  $1 - \lambda \neq 0$  porque, de (12),  $\lambda = 1$  é impossível.] De forma semelhante, (13) e (14) fornecem

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \qquad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$

Portanto, de (15) temos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

que nos dá  $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$ ,  $1 - \lambda = \pm \sqrt{11/2}$ . Logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de  $\lambda$  então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$
 e  $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ 

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é  $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$  e o mais distante é  $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$ .

## Duas Restrições

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de f(x, y, z) sujeita a duas restrições (condições laterais) da forma g(x, y, z) = k e h(x, y, z) = c. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrita a pertencer à curva C, obtida pela interseção das superfícies de nível g(x, y, z) = k e h(x, y, z) = c. (Veja a Figura 5.) Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ . Sabemos, do começo desta seção, que  $\nabla f$  é ortogonal a C lá. Mas nós também sabemos que  $\nabla g$  é ortogonal a g(x, y, z) = k e que  $\nabla h$  é ortogonal a h(x, y, z) = c, portanto  $\nabla g$  e  $\nabla h$  são ambos ortogonais a C. Isso significa que o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  pertence ao plano determinado por  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ . (Estamos supondo que esses vetores gradientes não são paralelos nem nulos.) Logo, existem números  $\lambda$  e  $\mu$  (chamados multiplicadores de Lagrange), tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Nesse caso o método de Lagrange nos leva a procurar os valores extremos resolvendo as cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z,  $\lambda$  e  $\mu$ . Essas equações podem ser obtidas escrevendo-se a Equação (16) em termos dos componentes e usando as equações das restrições:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

 $\bigcirc$  O cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  intercepta o plano x - y + z = 1 em uma elípse (Figura 6). O Exemplo 5 pergunta pelo valor máximo de f quando (x, y, z)pertence a essa elipse.

da interseção do plano x - y + z = 1 com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Maximizamos a função f(x, y, z) = x + 2y + 3z sujeita às restrições g(x, y, z) = x - y + z = 1 e  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ . A condição de Lagrange é  $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ , de modo que devemos resolver as equações

$$1 = \lambda + 2x\mu$$

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Determine o valor máximo da função f(x, y, z) = x + 2y + 3z na curva

$$2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$3 = \lambda$$

$$x - y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Tomando  $\lambda = 3$  [de (19)] em (17), obtemos  $2x\mu = -2$ , e então  $x = -1/\mu$ . Analogamente, (18) dá  $y = 5/(2\mu)$ . Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

e também  $\mu^2 = \frac{29}{4}$ ,  $\mu = \pm \sqrt{29/2}$ . Assim  $x = \pm 2/\sqrt{29}$ ,  $y = \pm 5/\sqrt{29}$  e, de (20),  $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$ . Os valores correspondentes de f são

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto o valor máximo de f na curva dada é  $3 + \sqrt{29}$ .

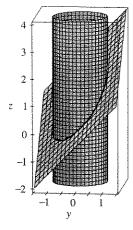
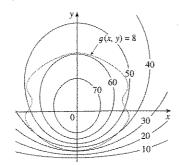


FIGURA 6

#### Exercícios

Na figura estão mapas de contorno de f e a curva de equação q(x, y) = 8. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição g(x, y) = 8. Explique suas razões.



2.(a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Na mesma tela, trace diversas curvas da forma  $x^2 + y = c$  até que você encontre uma que encoste no círculo. Qual o significado dos valores de c para essas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de  $f(x, y) = x^2 + y$  sujeita à restrição  $x^2 + y^2 = 1$ . Compare sua resposta com a da parte (a).

\$9100 2...2

3-17 🗆 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. 
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
;  $x^2 + y^2 = 1$ 

4. 
$$f(x, y) = 4x + 6y$$
;  $x^2 + y^2 = 13$ 

**5.** 
$$f(x, y) = x^2y$$
;  $x^2 + 2y^2 = 6$ 

6. 
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
;  $x^4 + y^4 = 1$ 

7. 
$$f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 = 35$ 

8. 
$$f(x, y, z) = 8x - 4z$$
;  $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$ 

**9.** 
$$f(x, y, z) = xyz$$
;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 

**10.** 
$$f(x, y, z) = x^2y^2z^2$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

**12.** 
$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 

**13.** 
$$f(x, y, z, t) = x + y + z + t$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ 

**14.** 
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n;$$
  
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 

**15.** 
$$f(x, y, z) = x + 2y$$
;  $x + y + z = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 4$ 

**16.** 
$$f(x, y, z) = 3x - y - 3z$$
;  
  $x + y - z = 0$ ,  $x^2 + 2z^2 = 1$ 

17. 
$$f(x, y, z) = yz + xy$$
;  $xy = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 1$ 

18-19  $\Box$  Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

**18.** 
$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$
,  $x^2 + y^2 \le 16$ 

**19.** 
$$f(x, y) = e^{-xy}$$
,  $x^2 + 4y^2 \le 1$ 

- **20.** (a) Se seu sistema algébrico computacional traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$  sujeita a  $(x 3)^2 + (y 3)^2 = 9$  por métodos gráficos.
  - (b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um CAS para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).
  - 21. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como Cobb-Douglas modelaram P = bLαK¹-α seguindo certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e α < 1. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia pode gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, maximizar a produção P estará sujeita à restrição mL + nK = p. Mostre que a produção máxima ocorre quando</p>

$$L = \frac{\alpha p}{m}$$
 e  $K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$ 

- 22. Referindo-se ao Exercício 21, suponha agora que a produção esteja fixada em  $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$ , onde Q é uma constante. Que valores de L e K minimizam a função custo C(L, K) = mL + nK?
- Utilize os multiplicadores de Lagrange para provar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.
- 24. Use multiplicadores de Lagrange para provar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero. [Dica: Utilize a fórmula de Heron para a área:  $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ , onde s = p/2 e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

25-37 ☐ Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

- 25. Exercício 37
- 26. Exercício 38
- 27. Exercício 39
- 28. Exercício 40
- 29. Exercício 41
- 30. Exercício 42

- 31. Exercício 43
- 32. Exercício 44
- 33. Exercício 45
- 34. Exercício 46
- 35. Exercício 47
- 36. Exercício 48
- 37. Exercício 51
- 38. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1.500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.
- **39.** O plano x + y + 2z = 2 intercepta o parabolóide  $z = x^2 + y^2$  em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão o mais próximo e o mais longe possível da origem.
- **40.** O plano 4x 3y + 8z = 5 intercepta o cone  $z^2 = x^2 + y^2$  em uma elipse.
  - (a) faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
  - (b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.
- 41-42 □ Ache os valores de máximo e mínimo da f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema computacional algébrico para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu CAS acha somente uma solução, você pode necessitar do uso de comandos adicionais.)

**41.** 
$$f(x, y, z) = ye^{x-z}$$
;  $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ ,  $xy + yz = 1$ 

**42.** 
$$f(x, y, z) = x + y + z$$
;  $x^2 - y^2 = z$ ,  $x^2 + z^2 = 4$ 

- 43. (a) Determine o valor máximo de  $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \cdot \cdot x_n}$  dado que  $x_1, x_2, ..., x_n$  são números positivos e  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$ , onde c é uma constante.
  - (b) Deduza da parte (a) que, se  $x_1, x_2, ..., x_n$  são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de *n* números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

- **44.** (a) Maximize  $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$  sujeita às restrições  $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$  e  $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$ .
  - (b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}}$$
 e  $y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$ 

e mostre que

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_j^2} \sqrt{\sum b_j^2}$$

para números  $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ . Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

#### Projeto Aplicado







#### Ciência dos Foguetes

Muitos foguetes, tais como o Pegasus XL, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o Saturno V, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para diminuir a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, posicionando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou ser um bom compromisso entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios a serem projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo atingir a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação de velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln \left( 1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r} \right)$$

onde M, é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o fator estrutural determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a (constante) rapidez de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Vamos considerar as forças externas desprezíveis e supor que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se  $M_i$  é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa  $M_1$ e sua carga tenha massa  $M_2 + M_3 + A$ ; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c \left[ \ln \left( \frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left( \frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A} \right) + \ln \left( \frac{M_3 + A}{SM_3 + A} \right) \right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total  $M=M_1+M_2+M_3$  do propulsor do foguete sujeito à restrição que a velocidade desejada ve do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificar, definimos variáveis Ni de modo que a restrição possa ser expressa como  $v_i = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$ . Como é difícil exprimir M em termos dos  $N_i$ , desejamos usar uma função mais simples que ao ser minimizada leve também à minimização de M. Mostre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

E conclua que

$$\frac{M+A}{A} = \frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1-SN_1)(1-SN_2)(1-SN_3)}$$

3. Verifique que ln((M + A)/A) tem os mesmos pontos de mínimo que M; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de  $N_i$  onde o mínimo ocorre sujeito à restrição  $v_i = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$ . [Dica: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar a simplificar as expressões.]

- 4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de  $v_f$ .
- 5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 100 milhas acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 17.500 mi/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural S = 0,2 e que a rapidez de exaustão seja c = 6.000 mi/h.
  - (a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A.
  - (b) Estabeleça a massa de cada estágio como função de A. (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)
- 6. O mesmo foguete requereria uma velocidade final de 24.700 mi/h aproximadamente para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 500 lb para o espaço.

## Projeto Aplicado Otimização de uma Turbina Hidráulica

A Great Northeen Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidroelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa na qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidroelétricas diferentes; para cada uma delas,  $\acute{e}$  conhecida a quantidade de potência elétrica que ela gera em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo  $\acute{e}$  determinar como programar essa distribuíção de água para obter a produção total máxima, dada a taxa de vazão que entra na usina geradora.

Usando dados experimentais e a equação de Bernoulli, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18.89 + 0.1277Q_1 - 4.08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_7^2)$$

$$KW_2 = (-24.51 + 0.1358Q_2 - 4.69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_7^2)$$

$$KW_3 = (-27.02 + 0.1380Q_3 - 3.84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_7^2)$$

$$250 \le Q_1 \le 1110, \quad 250 \le Q_2 \le 1110, \quad 250 \le Q_3 \le 1225$$

onde

Qi = fluxo através da turbina i em pés cúbicos por segundo

 $KW_i$  = potência gerada pela turbina i em quilowatts

 $Q_T$  = fluxo total através da usina geradora em pés cúbicos por segundo

- 1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo  $Q_i$  em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Conseqüentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de  $Q_T$ ) que maximize a produção total de energia  $KW_1 + KW_2 + KW_3$  sujeita às restrições  $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$  e restrições de domínio de cada  $Q_1$ .
- 2. Para que valores de  $Q_T$  seu resultado é válido?
- 3. Para uma vazão de entrada de 2.500 pé<sup>3</sup>/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) que seu resultado corresponde realmente a um máximo.
- 4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1.000 pes¹/s deveria ser

- distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés³/s?
- 5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1.500 pés³/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?
- 6. Se a vazão de entrada for de 3.400 pés'/s, o que você recomendaria para a empresa?

## 14

#### Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. (a) O que é uma função de duas variáveis?
  - (b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis
- 2. O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?
- 3. O que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa? Como mostrar que esse limite não existe?

- **4.** (a) O que significa dizer que f é contínua em (a, b)?
  - (b) Se f é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , o que você pode dizer de seu gráfico?
- **5.** (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  como limites.
  - (b) Como você interpreta  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?
  - (c) Se f(x, y) é dada por uma fórmula, como calcular  $f_x$  e  $f_y$ ?
- 6. O que o Teorema de Clairaut diz?
- 7. Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?
  - (a) Um gráfico de uma função de duas variáveis, z = f(x, y)
  - (b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis, F(x, y, z) = k
- **8.** Defina a linearização de f em (a, b). Qual é sua correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?
- **9.** (a) O que significa dizer que f é diferenciável em (a, b)?
  - (b) Como usualmente verificamos se f é diferenciável?
- 10. Se z = f(x, y), o que são os diferenciais dx, dy e dz?
- 11. Diga qual é a Regra da Cadeia para o caso em que z = f(x, y) e x e y são funções de uma única variável. E se x e y são funções de duas variáveis?

- 12. Se z é definido implicitamente como uma função de x e y por uma equação da forma F(x, y, z) = 0, como determinar  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ ?
- 13. (a) Escreva uma expressão como limite para a derivada direcional de f em  $(x_0, y_0)$  na direção e sentido do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ . Como interpretá-lo como taxa de variação? Como interpretá-lo geometricamente?
  - (b) Se  $f \in diferenciável$ , escreva uma expressão para  $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$  em termos de  $f_x$  e  $f_y$ .
- **14.** (a) Defina o vetor gradiente  $\nabla f$  de uma função f de duas ou três variáveis.
  - (b) Exprima  $D_{\mathbf{u}}f$  em termos de  $\nabla f$ .
  - (c) Explique o significado geométrico do gradiente.
- 15. O que as seguintes sentenças significam?
  - (a) f tem um máximo local em (a, b).
  - (b) f tem um máximo absoluto em (a, b).
  - (c) f tem um mínimo local em (a, b).
  - (d) f tem um mínimo absoluto em (a, b).
  - (e) f tem um ponto de sela em (a, b).
- **16.** (a) Se f tem um máximo local em (a, b), o que você pode dizer de suas derivadas parciais em (a, b)?
  - (b) O que é um ponto crítico de f?
- 17. Qual é o Teste da Segunda Derivada?
- 18. (a) O que é um conjunto fechado em R<sup>2</sup>? O que é um conjunto limitado?
  - (b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.
  - (c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?
- 19. Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de f(x, y, z) sujeita à restrição g(x, y, z) = k. E se tivermos uma segunda restrição h(x, y, z) = c?

Determine se as sentenças são falsas ou verdadeiras. Se verdadeiras, explique por quê; se falsas, explique por que ou dê um contra-exemplo.

1. 
$$f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

- 2. Existe uma função f com derivadas parciais de segunda ordem continuas tais que  $f_x(x, y) = x + y^2$  e  $f_y(x, y) = x - y^2$ .
- $3. \ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \ \partial y}$
- **4.**  $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$
- **5.** Se  $f(x, y) \rightarrow L$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  ao longo de toda reta que passa por (a, b), então  $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ .
- 6. Se  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$  existem, então f é diferenciável em (a, b).

- 7. Se f tem um mínimo local em (a, b) e f é diferenciável em (a, b), então  $\nabla f(a, b) = 0$ .
- **8.** Se  $f \in \text{uma função}$ , então  $\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = f(2,5)$ .
- **9.** Se  $f(x, y) = \ln y$ , então  $\nabla f(x, y) = 1/y$ .
- 10. Se (2, 1) é um ponto crítico de fe

$$f_{xx}(2, 1)f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$

então f é um ponto de sela de f em (2, 1).

- 11. Se  $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ , então  $-\sqrt{2} \le D_{\mathbf{u}} f(x, y) \le \sqrt{2}$ .
- 12. Se f(x, y) tem dois máximos locais, então f tem um mínimo local

#### **EXERCÍCIOS**

1-2 5 Determine e esboce o domínio da função.

1.  $f(x, y) = \text{sen}^{-1}x + \text{tg}^{-1}y$ sesses

3-4 □ Esboce o gráfico da função.

3.  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ 

3.  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  4.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 

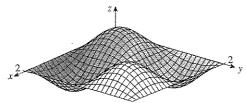
5-5 □ Esboce várias curvas de nível da função.

**5.**  $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ 

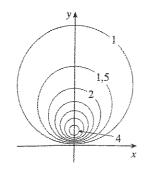
**6.**  $f(x, y) = x^2 + 4y$ 

5 \$ % \$ 4

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.



9-10 □ Avalie o limite ou mostre que ele não existe.

11. Uma placa de metal está situada no plano xy e ocupa o retângulo  $0 \le x \le 10$ ,  $0 \le y \le 8$ , onde x e y são medidos em metros. A temperatura no ponto (x, y) do plano é T(x, y), onde Té medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

| , y | 0  | 2  | 4  | 6  | 8 : |
|-----|----|----|----|----|-----|
| 0   | 30 | 38 | 45 | 51 | 55  |
| 2   | 52 | 56 | 60 | 62 | 61  |
| 4   | 78 | 74 | 72 | 68 | 66  |
| 6   | 98 | 87 | 80 | 75 | 71  |
| 8   | 96 | 90 | 86 | 80 | 75  |
| 10  | 92 | 92 | 91 | 87 | 78  |

- (a) Estime o valor das derivadas parciais  $T_x(6, 4)$  e  $T_y(6, 4)$ . Quais são as unidades?
- Estime o valor de  $D_{\mathbf{u}}T(6, 4)$ , onde  $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ . Interprete o resultado.
- (c) Estime o valor de  $T_{xy}(6, 4)$ .
- 12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura T(x, y) do Exercício 11 perto do ponto (6, 4). Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto (5; 3,8).

13-17 

Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

**13.** 
$$f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$$

**14.** 
$$u = e^{-r} \sin 2\theta$$

**15.** 
$$g(u, v) = u \operatorname{tg}^{-1} v$$

**16.** 
$$w = \frac{x}{y - z}$$

17. 
$$T(p, q, r) = p \ln(q + e^r)$$

 A rapidez da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1449,2 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius), S é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas do sólido dissolvido por 1000 g de água) e D é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule  $\partial C/\partial T$ ,  $\partial C/\partial S$ ,  $\partial C/\partial D$  quando T=10 °C, S=35 partes por milhar e D=100 m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

19-22  $\Box$  Determine as derivadas parciais de segunda ordem de f.

**19.** 
$$f(x, y) = 4x^3 - xy^2$$

**20.** 
$$z = xe^{-2y}$$

**21.** 
$$f(x, y, z) = x^k y^l z^m$$

**22.** 
$$v = r \cos(s + 2t)$$

23. Se 
$$u = x^y$$
, mostre que  $\frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ .

**24.** Se 
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
, mostre que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{2}{\rho}$$

25-23 D Encontre uma equação do (a) plano tangente e (b) da reta normal para superfície dada no ponto especificado.

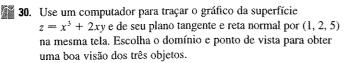
**25.** 
$$z = 3x^2 - y^2 + 2x$$
,  $(1, -2, 1)$ 

**26.** 
$$z = e^x \cos y$$
,  $(0, 0, 1)$ 

**27.** 
$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$$
,  $(2, -1, 1)$ 

**28.** 
$$xy + yz + zx = 3$$
,  $(1, 1, 1)$ 

**29.** 
$$sen(xyz) = x + 2y + 3z$$
,  $(2, -1, 0)$ 



31. Determine os pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  onde o plano tangente é paralelo ao plano 2x + y - 3z = 2.

**32.** Determine dz se  $z = x^2 \operatorname{tg}^{-1} y$ .

**33.** Estabeleça a aproximação linear da função  $f(x, y, z) = x^3 \sqrt{y^2 + z^2}$  no ponto (2, 3, 4) e use-a para estimar o número  $(1,98)^3 \sqrt{(3,01)^2 + (3,97)^2}$ .

34. Os dois lados do triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada.

Utilize diferenciais para estirmar o máximo erro no cálculo de (a) área do triângulo e (b) comprimento da hipotenusa.

**35.** Se  $w = \sqrt{x} + y^2/z$ , onde  $x = e^{2t}$ ,  $y = t^3 + 4t$ , e  $z = t^2 - 4$ , utilize a Regra da Cadeia para determinar dw/dt.

**36.** Se  $z = \cos xy + y \cos x$ , onde  $x = u^2 + v$  e  $y = u - v^2$ , utilize a Regra da Cadeia para determinar  $\partial z/\partial u$  e  $\partial z/\partial v$ .

37. Suponha que z = f(x, y), onde x = g(s, t), y = h(s, t), g(1, 2) = 3,  $g_s(1, 2) = -1$ ,  $g_t(1, 2) = 4$ , h(1, 2) = 6,  $h_s(1, 2) = -5$ ,  $h_t(1, 2) = 10$ ,  $f_s(3, 6) = 7$  e  $f_s(3, 6) = 8$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial s}$  e  $\frac{\partial z}{\partial t}$  quando s = 1 e t = 2.

**38.** Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde w = f(t, u, v), t = t(p, q, r, s), u = u(p, q, r, s) e v = v(p, q, r, s), todas diferenciáveis.

**39.** Se  $z = y + f(x^2 - y^2)$ , onde  $f \notin$  diferenciável, mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

**40.** O comprimento x de um lado de um triângulo é aumentado à taxa de 3 pol/s, o comprimento de outro lado é diminuído à taxa de 2 pol/s, e o ângulo contido  $\theta$  é aumentado à taxa de 0,05 rad/s. Qual a rapidez da variação da área do triângulo quando x = 40 pol, y = 50 pol e  $\theta = \pi/6$ ?

41. Se z = f(u, v), onde u = xy, v = y/x e f têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$x^{2} \frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}} - y^{2} \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}} = -4uv \frac{\partial^{2} z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}$$

**42.** Se  $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$ , determine  $\frac{\partial z}{\partial x} e^{-\frac{\partial z}{\partial y}}$ 

**43.** Determine o gradiente da função  $f(x, y, z) = z^2 e^{x\sqrt{y}}$ .

44. (a) Quando a derivada direcional de f é máxima?

(b) Quando é mínima?

(c) Quando é 0?

(d) Quando é a metade de seu valor máximo?

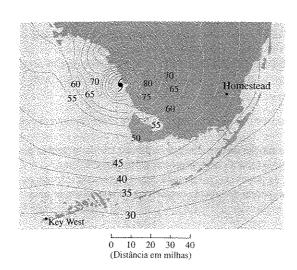
45-46  $\Box$  Determine a derivada direcional de f no ponto dado na direção e sentido indicada.

**45.**  $f(x, y) = 2\sqrt{x} - y^2$ , (1, 5), na direção do ponto (4, 1)

**46.**  $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$ , (1, 2, 3), na direção e sentido de  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 

47. Determine a taxa máxima de variação de  $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$  no ponto (2, 1). Em que direção e sentido isso ocorre?

**48.** Estabeleça a direção e sentido na qual  $f(x, y, z) = ze^{xy}$  aumenta mais rápido no ponto (0, 1, 2). Qual é a taxa máxima de aumento?



50. Determine as equações paramétricas da reta tangente ao ponto (-2, 2, 4) para a curva da interseção da superfície z = 2x² - y² com o plano z = 4.

51-54 □ Determine os valores máximo e mínimo locais e ponto de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.

**51.** 
$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$$

**52.** 
$$f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$$

**53.** 
$$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$$

**54.** 
$$f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$$

55-56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

**55.**  $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ ;  $D \notin a$  região triangular fechada do plano xy com vértices (0, 0), (0, 6) e (6, 0)

**56.** 
$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x^2 + 2y^2)$$
;  $D \in \text{o disco } x^2 + y^2 \le 4$ 

57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e ponto de sela de  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$ . Em seguida use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou programa de manipulação algébrica) para determinar os pontos críticos de

 $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$  com precisão até a terceira casa decimal. Em seguida classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59-60 ☐ Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de f sujeita à(s) restrição(ōes) dada(s).

**59.** 
$$f(x, y) = x^2y$$
;  $x^2 + y^2 = 1$ 

**60.** 
$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$
;  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ 

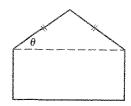
**61.** 
$$f(x, y, z) = xyz$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 

**62.** 
$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$
;  
  $x + y + z = 1$ ,  $x - y + 2z = 2$ 

**63.** Determine os pontos da superfície  $xy^2z^3 = 2$  que estão mais próximos da origem.

64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

**65.** Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro *P* fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza a área do mesmo.



**66.** Uma partícula de massa m se move sobre uma superfície z = f(x, y). Sejam x = x(t), y = y(t) as coordenadas x e y da partícula no instante t.

(a) Determine o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e a energia cinética  $K = \frac{1}{2}m |\mathbf{v}|^2$  da partícula.

(b) Estabeleça o vetor aceleração a.

(c) Seja  $z = x^2 + y^2$  e  $x(t) = t \cos t$ ,  $y(t) = t \sin t$ . Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.



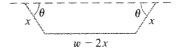
#### Problemas Quentes

- Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.
- 2. Biologistas marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção e sentido em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto P(x, y) na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

onde x e y são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

- (a) Identifique as curvas de nível da função de concentração e esboce vários membros dessa família junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.
- (b) Suponha que um tubarão esteja no ponto (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão estabelecendo e resolvendo uma equação diferencial.
- 3. Uma longa folha de metal galvanizado de espessura w polegadas deve ser dobrada em uma fôrma de maneira simétrica com três lados retos para fazer uma calha. A secção transversal é mostrada na figura.



- (a) Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, estabeleça as dimensões que forneçam a maior área da secção transversal.
- (b) Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com secção transversal semicircular do que em uma secção transversal de três lados?
- 4. Para que valores do número r, a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se. } (x, y, z) \neq 0\\ 0 & \text{se. } (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

é contínua em  $\mathbb{R}^3$ ?

- 5. Suponha que f seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície z = x f(y/x) se interceptam em um ponto comum.
- 6. (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação f(x) = 0 (veja a Seção 4.9 do Volume I) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações f(x, y) = 0 e g(x, y) = 0. As superfícies z = f(x, y) e z = g(x, y) se interceptam em uma curva que intercepta o plano xy em um ponto (r, s), que é a solução do sistema. Se uma aproximação inicial (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) está próxima desse ponto, então os planos tangentes às superfícies em (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) se interceptam em uma linha reta que intercepta o plano xy em um ponto (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>), que deve estar mais próximo de (r, s). (Compare com a Figura 2 na Seção 4.9 do Volume I.) Mostre que

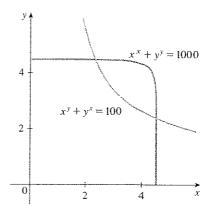
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x}$$
 e  $y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$ 

onde f, g e suas derivadas parciais são calculadas em  $(x_1, y_1)$ . Se continuarmos esse processo obteremos uma sequência de aproximações sucessivas  $(x_n, y_n)$ .

(b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como na parte (a) (veja a biografia de Simpson no Volume I). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1000$$
  $x^y + y^x = 100$ 

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de interseção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de interseção com precisão até a sexta casa decimal.



7. (a) Mostre que, quando a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

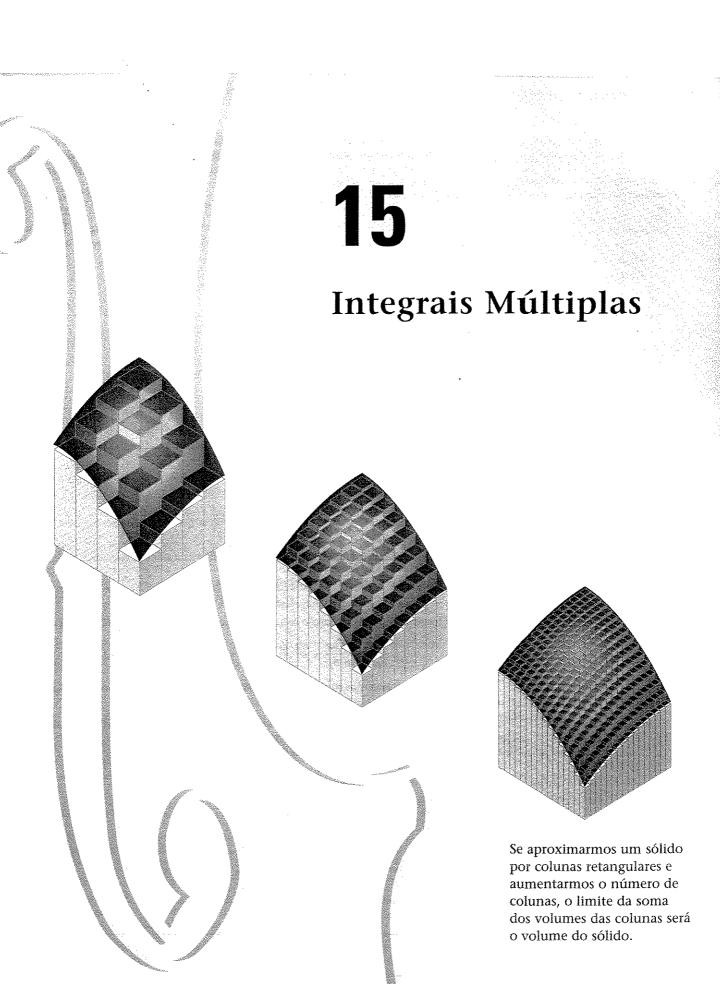
é escrita em coordenadas cilíndricas, ela fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Mostre que, quando a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas, ela fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

- 8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície  $xy^2z^2 = 1$ , determine os que estão mais longe da origem.
- **9.** Se a elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  contém a circunferência  $x^2 + y^2 = 2y$ , quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?



979

Neste capítulo estendemos a idéia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Essas idéias serão usadas para calcular volumes, áreas de superfícies, massas, centro de gravidade de uma região mais geral do que as consideradas nos Capítulos 6 e 8 (Volume I). Usaremos também as integrais duplas para calcular probabilidades quando as variáveis envolvidas forem aleatórias.

## 15.1

## Integrais Duplas sobre Retângulos

Na tentativa de resolver o problema de determinar áreas, chegamos à definição de integral definida. Vamos aplicar procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido e, no processo, chegar à definição de integral dupla.

## Revisão da Integral Definida

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se f(x) é definida para  $a \le x \le b$ , subdividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de comprimento igual  $\Delta x = (b-a)/n$  e escolhemos pontos arbitrários  $x_i^*$  em cada um desses subintervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando  $n \to \infty$  para obter a integral definida de a até b da função f.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

No caso especial em que  $f(x) \ge 0$ , a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores (da área) da Figura 1, e  $\int_a^b f(x) dx$  representa a área sob a curva y = f(x) de a até b.

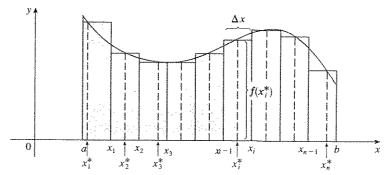
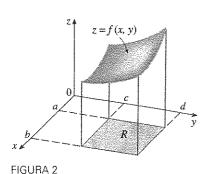


FIGURA 1



Volumes e Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor  $f(x, y) \ge 0$ . O gráfico de f é a superfície com equação z = f(x, y). Seja S o sólido que está contido na região acima de R e abaixo do gráfico de f, ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Veja a Figura 2.) Nosso objetivo é determinar o volume de S.

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo [a, b] em m subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de mesmo comprimento  $\Delta x = (b-a)/m$  e dividindo o intervalo [c, d] em n subintervalos iguais  $[y_{j-1}, y_j]$  de comprimento  $\Delta y = (d-c)/n$ . Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelos extremos dos subintervalos, como na Figura 3, formamos os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

cada um dos quais com área  $\Delta A = \Delta x \, \Delta y$ .

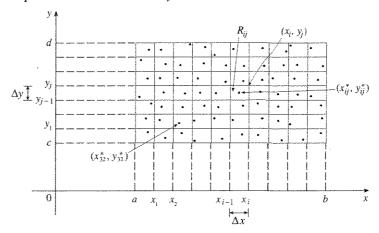


FIGURA 3 Dividindo R em sub-retângulos

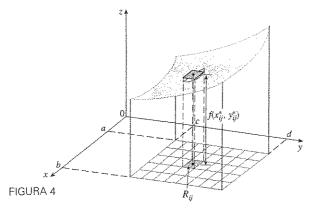
Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto amostra**,  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  em cada  $R_{ij}$ , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada  $R_{ij}$  por uma caixa retangular fina (ou "coluna") com base  $R_{ij}$  e altura  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ , como mostrado na Figura 4. (Compare com a Figura 1.) O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

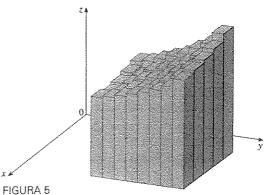
$$f(x_{ii}^*, y_{ii}^*) \Delta A$$

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

(Veja a Figura 5.) Essa dupla soma significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto amostra escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.





98

Nossa intuição diz que a aproximação dada em (3) melhora quando aumentamos os valores de m e n, e portanto devemos esperar que

$$V = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A$$

Usamos a expressão da Equação 4 para definir o **volume** do sólido *S* que corresponde à região que está abaixo do gráfico de *f* e acima do retângulo *R*. (Pode ser mostrado que essa definição corresponde à nossa fórmula de volume da Seção 6.2 do Volume I.)

Limites do tipo que aparecem na Equação 4 ocorrem muito freqüentemente, não somente quando estamos determinando volumes, como também em uma variedade de outras situações — como será visto na Seção 15.5 —, mesmo f não sendo uma função positiva. Podemos dar a seguinte definição:

**5 Definição** A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é

$$\iint_{R} f(x, y) dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A$$

se esse limite existir.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo  $\epsilon>0$  existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint\limits_R f(x,y) \, dA - \sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n f(x_{ij}^*,y_{ij}^*) \, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  em  $R_{ij}$ .

Pode ser provado que o limite da Definição 5 existe sempre que f for uma função contínua. (Esse limite pode também existir para algumas funções descontínuas que sejam razoavelmente "bem comportadas".)

O ponto amostra  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo  $R_{ij}$ , porém, se o escolhermos como o canto superior direito de  $R_{ij}$  [ou seja,  $(x_i, y_j)$ , veja a Figura 3], então a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$$\iint\limits_R f(x,y) dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i,y_j) \Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se  $f(x, y) \ge 0$ , então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície z = f(x, y) é

$$V = \iint\limits_R f(x, y) \, dA$$

A soma na Definição 5

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Note a semelhança dessa soma com a soma de Riemann em (1) para funções de uma única variável.] Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann

 $\square$  O significado do limite duplo na Equação 4 é que podemos tornar o somatório duplo tão próximo quanto desejarmos do número V [para qualquer escolha  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ ] tomando m e n suficientemente grandes.

□ Observe a semelhança entre a Definição 5 e a definição de integral simples na Equação 2.

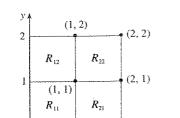


FIGURA 6

representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e  $\acute{e}$  uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f.

**EXEMPLO** 1  $\Box$  Estime o volume do sólido que está acima do quadrado  $R = [0, 2] \times [0, 2]$  e abaixo do parabolóide elíptico  $z = 16 - x^2 - 2y^2$ . Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto amostra como o canto superior direito de cada quadrado  $R_{ij}$ . Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O parabolóide elíptico é o gráfico de  $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$  e a área de cada quadrado vale 1. Aproximando o volume pela soma de Riemann com m = n = 2, temos

$$V \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) \Delta A$$
  
=  $f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A$   
=  $13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$ 

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7.

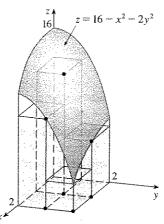
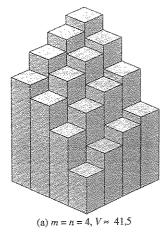
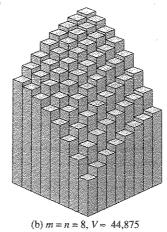


FIGURA 7

Obtemos melhor aproximação do volume no Exemplo 1, quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido





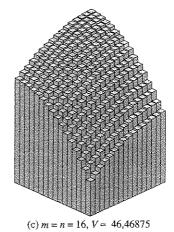


FIGURA 8 A aproximação pela soma de Riemann para o volume abaixo de  $z = 16 - x^2 - 2y^2$  fica melhor à medida que m e n aumentam.

981

verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Se  $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$ , calcule a integral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{1-x^2} \, dA$$

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como  $\sqrt{1-x^2} \ge 0$ , podemos computar a integral interpretando-a como volume. Se  $z=\sqrt{1-x^2}$ , então  $x^2+z^2=1$  e  $z\ge 0$ , logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular  $x^2+z^2=1$  e acima do retângulo R (veja a Figura 9). O volume de S é a área de um semicírculo com raio 1 vez o comprimento do cilindro. Portanto

$$\iint_{a} \sqrt{1-x^2} \, dA = \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 4 = 2\pi$$

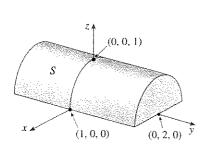


FIGURA 9

#### Regra do Ponto Médio

Os métodos usados para aproximar as integrais de funções de uma variável real (a Regra do Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson) têm seus correspondentes para integrais duplas. Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas. Isso significa que usaremos a soma dupla de Riemann para aproximar a integral dupla, onde o ponto amostra  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  em  $R_{ij}$  é tomado como o ponto central  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$  de  $R_{ij}$ . Em outras palavras,  $\bar{x}_i$  é o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $\bar{y}_j$  é o ponto médio de  $[y_{j-1}, y_j]$ .

Regra do Ponto Médio para Integrais Duplas

$$\iint\limits_{R} f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_{i}, \overline{y}_{j}) \Delta A$$

onde  $\bar{x}_i$  é o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $\bar{y}_j$  é o ponto médio de  $[y_{j-1}, y_j]$ .

**EXEMPLO 3**  $\square$  Use a Regra do Ponto Médio com m = n = 2 para estimar o valor da integral  $\iint_{\mathbb{R}} (x - 3y^2) dA$ , onde  $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$ .

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com m=n=2, calcularemos  $f(x,y)=x-3y^2$  no centro de quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Então temos  $\bar{x}_1=\frac{1}{2}, \, \bar{x}_2=\frac{3}{2}, \, \bar{y}_1=\frac{5}{4}$  e  $\bar{y}_2=\frac{7}{4}$ . A área de cada sub-retângulo é  $\Delta A=\frac{1}{2}$ . Logo

$$\iint_{R} (x - 3y^{2}) dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\overline{x}_{i}, \overline{y}_{j}) \Delta A$$

$$= f(\overline{x}_{1}, \overline{y}_{1}) \Delta A + f(\overline{x}_{1}, \overline{y}_{2}) \Delta A + f(\overline{x}_{2}, \overline{y}_{1}) \Delta A + f(\overline{x}_{2}, \overline{y}_{2}) \Delta A$$

$$= f(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) \Delta A + f(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}) \Delta A + f(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}) \Delta A + f(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}) \Delta A$$

$$= (-\frac{67}{16})\frac{1}{2} + (-\frac{139}{16})\frac{1}{2} + (-\frac{51}{16})\frac{1}{2} + (-\frac{123}{16})\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{95}{8} = -11,875$$
anto, temos
$$\iint_{R} (x - 3y^{2}) dA \approx -11,875$$

Portanto, temos

FIGURA 10

y 4

| Número de<br>sub-retângulos | Aproximações<br>pela Regra do<br>Ponto Médio             |  |  |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------|--|--|
| 1<br>4<br>16<br>64<br>256   | -11,5000<br>-11,8750<br>-11,9687<br>-11,9922<br>-11,9980 |  |  |
| 1024                        | -11,9995                                                 |  |  |

NOTA • Na próxima seção desenvolveremos um processo eficiente para calcular integrais duplas e veremos que o valor exato da integral dupla do Exemplo 3 é –12. (Lembre-se de que a interpretação da integral dupla como volume só é válida quando a função *f* é uma função *positiva*. O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume. Nos Exemplos 2 e 3 na Seção 15.2, discutiremos como interpretar integrais de uma função que não é sempre positiva em termos de volumes.) Dividimos os sub-retângulos da Figura 10 em quatro menores, todos com o mesmo formato, e calculamos a aproximação pela Regra do Ponto Médio. Repetimos sucessivamente o procedimento, dividindo em quatro cada sub-retângulo e calculando a aproximação. Os resultados estão apresentados na tabela ao lado. Observe como esses valores estão se aproximando do valor real da integral, –12.

## Valor Médio

Na Seção 6.5 do Volume I, mostramos que o valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo [a, b] é

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{h - a} \int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

De modo semelhante, definimos o valor médio de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_{R} f(x, y) \, dA$$

onde A(R) é a área de R. Se  $f(x, y) \ge 0$ , a equação

$$A(R) \times f_{\text{méd}} = \iint_{R} f(x, y) dA$$

diz que a caixa com base R e altura  $f_{\text{med}}$  tem o mesmo volume que o sólido delimitado pelo gráfico de f. [Se z=f(x,y) descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura  $f_{\text{med}}$ , então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar plana a região. Veja a Figura 11.]

**EXEMPLO 4** © O mapa de contornos na Figura 12 mostra as quantidades da precipitação de neve, em polegadas, no Estado do Colorado, em 24 de dezembro de 1982. (O Estado tem formato retangular com medidas 388 milhas na direção leste-oeste e 276 milhas na direção norte-sul.) Utilize o mapa de contornos para estimar a precipitação média no Colorado em 24 de dezembro.

SOLUÇÃO Vamos colocar a origem no canto sudoeste do Estado. Então  $0 \le x \le 388$ ,  $0 \le y \le 276$ , e f(x, y) é a queda de neve, em polegadas, na localização x milhas para leste e y milhas para norte da origem. Se R é o retângulo representativo do Estado do Colorado, então a precipitação média do Colorado em 24 de dezembro foi

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{A(R)} \iint_{R} f(x, y) \, dA$$

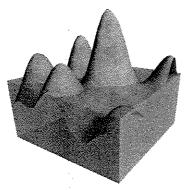


FIGURA 11

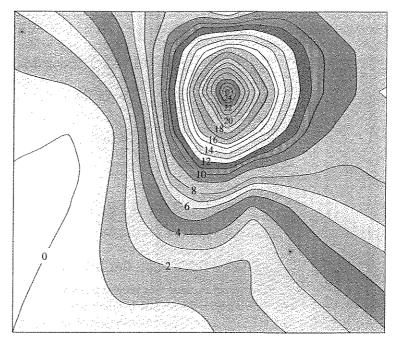


FIGURA 12

onde  $A(R)=388\cdot 276$ . Para estimar o valor dessa integral dupla, vamos usar a Regrado Ponto Médio com m=n=4. Em outras palavras, dividimos R em 16 subretângulos de tamanhos iguais, como na Figura 13. A área de cada sub-retângulo é

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

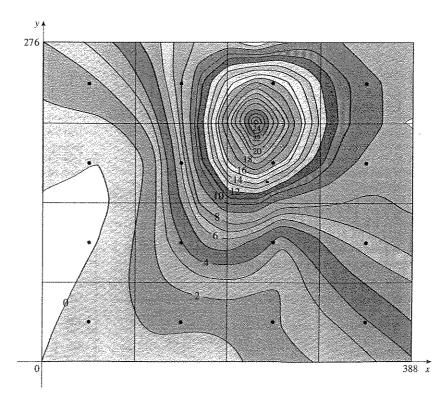


FIGURA 13

Usando o mapa de contornos para estimar o valor de f no ponto central de cada subretângulo, obtemos

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta A$$

$$\approx \Delta A [0, 4 + 1, 2 + 1, 8 + 3, 9 + 0 + 3, 9 + 4, 0 + 6, 5 + 0, 1 + 6, 1 + 16, 5 + 8, 8 + 1, 8 + 8, 0 + 16, 2 + 9, 4]$$

$$= (6693)(88, 6)$$

Portanto

$$f_{\text{méd}} \approx \frac{(6693)(88,6)}{(388)(276)} \approx 5,5$$

Em 24 de dezembro de 1982, o Estado do Colorado recebeu uma média de  $5\frac{1}{2}$  polegadas de neve.

## Propriedades das Integrais Duplas

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser provadas como na Seção 5.2 do Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são referidas como *linearidade* da integral.

$$\iint\limits_{R} \left[ f(x,y) + g(x,y) \right] dA = \iint\limits_{R} f(x,y) \, dA + \iint\limits_{R} g(x,y) \, dA$$

$$\iint\limits_R cf(x,y) \, dA = c \iint\limits_R f(x,y) \, dA \qquad \text{onde } c \notin \text{uma constante.}$$

Se  $f(x, y) \ge g(x, y)$  para todo (x, y) em R, então

$$\iint\limits_R f(x,y) \, dA \geqslant \iint\limits_R g(x,y) \, dA$$

# 15.1 Exercícios

□ Integrais duplas se comportam

assim porque as somas duplas que as

definem se comportam dessa forma.

cada sub-retângulo.

# 1. (a) Estime o volume do sólido contido abaixo da superfície z = xy e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 4\}$ . Utilize a soma de Riemann com m = 3, n = 2 e tome o ponto amostra como o canto superior direito de

- (b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).
- 2. Se  $R = [-1, 3] \times [0, 2]$ , use a soma de Riemann com m = 4, n = 2 para estimar o valor de  $\iint_R (y^2 2x^2) dA$ . Tome os pontos amostra como os cantos inferiores esquerdos dos sub-retângulos.
- 3. (a) Use uma soma de Riemann com m = n = 2 para estimar o valor de  $\iint_R \sin(x + y) dA$ , onde  $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$ . Tome como pontos amostrais os cantos inferiores esquerdos.
  - (b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).
- **4.** (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície  $z = x + 2y^2$  e acima do retângulo  $R = [0, 2] \times [0, 4]$ .

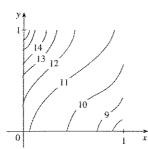
- Use a soma de Riemann com m = n = 2, e escolha os pontos amostrais como os cantos inferiores direitos.
- (b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do item (a).
- **5.** É dada a tabela de valores de uma função f(x, y) definida em  $R = [1, 3] \times [0, 4]$ .

| $x \stackrel{y}{\sim}$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  |
|------------------------|---|---|----|----|----|
| 1,0                    | 2 | 0 | -3 | 6  | -5 |
| 1,5                    | 3 | i | -4 | -8 | -6 |
| 2,0                    | 4 | 3 | 0  | 5  | 8  |
| 2,5                    | 5 | 5 | 3  | 1  | -4 |
| 3,0                    | 7 | 8 | 6  | 3  | 0  |

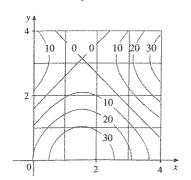
- (a) Estime ∫∫<sub>R</sub> f(x, y) dA utilizando a Regra do Ponto Médio com m = n = 2.
- (b) Estime a integral dupla com m = n = 4 escolhendo os pontos amostra o mais longe da origem.
- 6. Uma piscina de 20 por 30 pés é enchida com água. A profundidade da piscina é medida a cada intervalo de 5 pés, começando de um canto, e os valores foram anotados na tabela. Estime o volume de água da piscina.

|    | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|----|---|---|----|----|----|----|----|
| 0  | 2 | 3 | 4  | 6  | 7  | 8  | 8  |
| 5  | 2 | 3 | 4  | 7  | 8  | 10 | 8  |
| 10 | 2 | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 | 10 |
| 15 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 8  | 7  |
| 20 | 2 | 2 | 2  | 2  | 3  | 4  | 4  |

- Seja V o volume de um sólido contido entre o gráfico de  $f(x, y) = \sqrt{52 x^2 y^2}$  e acima do retângulo dado por  $2 \le x \le 4$ ,  $2 \le y \le 6$ . Usamos as retas x = 3 e y = 4 para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann computadas, utilizando como ponto amostra o canto inferior esquerdo e o canto superior direito, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U, arranje-os na seqüência crescente de valores e explique suas razões.
- **8.** A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Use-as para estimar  $\iint_R f(x, y) dA$  com precisão nas unidades.

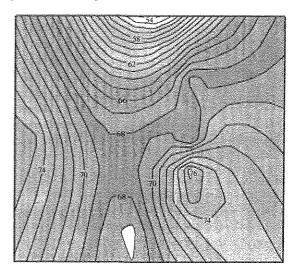


- A figura mostra o mapa de contornos de f no quadrado  $R = [0, 4] \times [0, 4]$ .
- (a) Use a Regra do Ponto Médio com m = n = 2 para estimar o valor de  $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dA$ .
- (b) Estime o valor médio de f.



10. O mapa de contornos mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 3 horas da tarde do dia 1º de maio de 1996, no Estado do Colorado. (O Estado mede 388 mi de leste a oeste e 276 mi de norte a sul.) Utilize a Regra do Ponto Médio com m = n = 4 para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.

987



11-13 

Calcule a integral dupla, identificando-a antes como o volume de um sólido.

11. 
$$\iint_R 3 dA$$
,  $R = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 2, 1 \le y \le 6\}$ 

**12.** 
$$\iint_{R} (5-x) dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 3\}$$

**13.** 
$$\iint_R (4-2y) dA$$
,  $R = [0,1] \times [0,1]$ 

- **14.** A integral  $\iint_R \sqrt{9 y^2} dA$ , onde  $R = [0, 4] \times [0, 2]$ , representa o volume de um sólido. Esboce o desenho do sólido.
- **15.** Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando-soma de um CAS) para estimar

$$\iint\limits_{B} e^{-x^2-y^2} dA$$

onde  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1.024.

- **16.** Repita o Exercício 15 para a integral  $\iint_R \cos(x^4 + y^4) dA$ .
- Se f é uma função constante, f(x, y) = k e  $R = [a, b] \times [c, d]$ , mostre que  $\iint_{\mathbb{R}} k \, dA = k(b a)(d c)$ .
- **18.** Se  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , mostre que  $0 \le \iint_R \operatorname{sen}(x + y) dA \le 1$ .

## 15.2 Integrais Iteradas

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variavél real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais de funções de uma variável real.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Usaremos a notação  $\int_c^d f(x, y) \, dy$  significando que x é mantido fixo e f(x, y) é integrado em relação a y de y = c para y = d. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y*. (Note a semelhança com a derivada parcial.) Como  $\int_c^d f(x, y) \, dy$  é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x:

$$A(x) = \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy$$

Se integrarmos a função A com relação à variável x de x = a a x = b, obteremos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são suprimidos. Então

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

significando que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Da mesma forma

$$\int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dx dy = \int_{c}^{d} \left[ \int_{a}^{b} f(x, y) dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de x=a a x=b e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de y=c a y=d. Note que em ambas as Equações 2 e 3 trabalhamos de dentro para fora.

EXEMPLO 1 

Calcule o valor das integrais

(a) 
$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$$

(b) 
$$\int_{1}^{2} \int_{0}^{3} x^{2} y \, dx \, dy$$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_{1}^{2} x^{2} y \, dy = \left[ x^{2} \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=1}^{y=2}$$
$$= x^{2} \left( \frac{2^{2}}{2} \right) - x^{2} \left( \frac{1^{2}}{2} \right) = \frac{3}{2} x^{2}$$

Portanto a função A da discussão precedente é dada por  $A(x) = \frac{3}{2}x^2$  neste exemplo.

Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[ \int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$
$$= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_{1}^{2} \int_{0}^{3} x^{2} y \, dx \, dy = \int_{1}^{2} \left[ \int_{0}^{3} x^{2} y \, dx \right] dy = \int_{1}^{2} \left[ \frac{x^{3}}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$
$$= \int_{1}^{2} 9y \, dy = 9 \frac{y^{2}}{2} \Big]_{1}^{2} = \frac{27}{2}$$

Note que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x. Em geral acontece (ver o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

Teorema de Fubini Se f for contínua no retângulo  $R=\{(x,y)\,\big|\, a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$  , então

$$\iint\limits_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Genericamente, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f possa ser descontínua em um número finito de curvas lisas, e a integral iterada exista.

A prova do Teorema de Fubini foge ao escopo deste livro, mas podemos ao menos fornecer uma justificativa razoável de sua validade quando  $f(x, y) \ge 0$ . Lembremos que, se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla  $\iint_R f(x, y) dA$  como o volume V do sólido que está acima de R e abaixo da superfície z = f(x, y). Contudo, temos outra fórmula usada para calcular volume no Capítulo 6 do Volume, que é

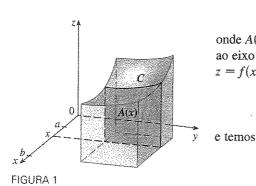
$$V = \int_{a}^{b} A(x) \, dx$$

onde A(x) é a área da secção transversal de S no plano que passa por x perpendicularmente ao eixo x. Da Figura 1 podemos ver que A(x) é a área debaixo da curva C cuja equação é z = f(x, y), onde x é mantida constante e  $c \le y \le d$ . Portanto

$$A(x) = \int_{c}^{d} f(x, y) \ dy$$

 $\iint\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dA = V = \int_{a}^{b} A(x) \, dx = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx$ 

© O Teorema 4 tem o nome do matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), que provou uma versão geral desse teorema em 1907. Mas a versão para as funções contínuas era conhecida pelo menos um século antes pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy.



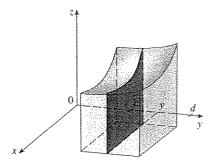


FIGURA 2

□ Note a resposta negativa no Exemplo 2; nada errado com isso. A função f no exemplo não é posítiva, e a integral não representa um volume. Da Figura 3 vemos que, se f for sempre negativa em R, o valor da integral é o negativo do volume que está acima do gráfico de f e abaixo de R.

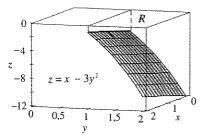


FIGURA 3

 $\square$  Para uma função f com valores positivos e negativos,  $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) \, dA$  é a diferença dos volumes:  $V_1 - V_2$ , onde  $V_1$  é o volume acima de R e abaixo do gráfico de f e  $V_2$  é o volume abaixo de R e acima do gráfico. O fato de a integral do Exemplo 3 ser 0 significa que os dois volumes  $V_1$  e  $V_2$  são iguais (veja a Figura 4).

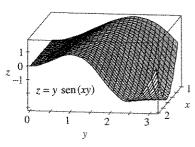


FIGURA 4

Uma argumentação semelhante, usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 2, mostra que

$$\iint\limits_{B} f(x, y) dA = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dx dy$$

**EXEMPLO 2**  $\square$  Calcule a integral dupla  $\iint_R (x-3y^2) dA$ , onde  $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$ . (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.) SOLUÇÃO 1 Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\iint\limits_{R} (x - 3y^{2}) dA = \int_{0}^{2} \int_{1}^{2} (x - 3y^{2}) dy dx$$

$$= \int_{0}^{2} [xy - y^{3}]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_{0}^{2} (x - 7) dx = \frac{x^{2}}{2} - 7x \Big]_{0}^{2} = -12$$

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\iint\limits_{R} (x - 3y^2) dA = \int_{1}^{2} \int_{0}^{2} (x - 3y^2) dx dy$$

$$= \int_{1}^{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{1}^{2} (2 - 6y^2) dy = 2y - 2y^3 \Big|_{1}^{2} = -12$$

**EXEMPLO 3**  $\square$  Calcule  $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$ , onde  $R = [1, 2] \times [0, \pi]$ .

SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x, obteremos

$$\iint_{R} y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} y \operatorname{sen}(xy) dx dy$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left[ -\cos(xy) \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_{0}^{\pi} (-\cos 2y + \cos y) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y \Big|_{0}^{\pi} = 0$$

SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos

$$\iint_{\mathbb{R}} y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_{1}^{2} \int_{0}^{\pi} y \operatorname{sen}(xy) dy dx$$

Para calcular a integral interna usamos a integração por partes com

$$u = y$$
  $dv = sen(xy) dy$   
 $du = dy$   $v = -\frac{cos(xy)}{x}$ 

e então

$$\int_0^{\pi} y \sin(xy) \, dy = -\frac{y \cos(xy)}{x} \bigg|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x} \int_0^{\pi} \cos(xy) \, dy$$
$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2} \left[ \sin(xy) \right]_{y=0}^{y=\pi}$$
$$= -\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}$$

Se agora integrarmos o primeiro termo por partes com u = -1/x e  $dv = \pi \cos \pi x dx$ , obteremos  $du = dx/x^2$ ,  $v = \sin \pi x$ , e

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x}\right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x} - \int \frac{\sin \pi x}{x^2} dx$$
Portanto
$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\sin \pi x}{x^2}\right) dx = -\frac{\sin \pi x}{x}$$

$$= -\frac{\sin 2\pi}{x} + \sin \pi = 0$$

□ No Exemplo 2, as soluções 1 e 2 são igualmente diretas, mas no Exemplo 3 a primeira solução é muito mais simples que a segunda. Portanto, ao calcular uma integral dupla, é recomendável escolher a ordem de integração que forneça integrais mais simples.

**EXEMPLO 4**  $\square$  Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo parabolóide elíptico  $x^2 + 2y^2 + z = 16$ , os planos x = 2 e y = 2, e os três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície  $z=16-x^2-2y^2$  e acima do quadrado  $R=[0,2]\times[0,2]$ . (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla, usando o Teorema de Fubini. Portanto

$$V = \iint_{R} (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} (16 - x^2 - 2y^2) dx dy$$
$$= \int_{0}^{2} \left[ 16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_{0}^{2} \left( \frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[ \frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{0}^{2} = 48$$

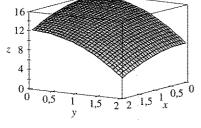


FIGURA 5

No caso especial em que f(x, y) pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y, a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para ser específico, suponha que f(x, y) = g(x)h(y) e  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Então o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint\limits_R f(x,y) \, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[ \int_a^b g(x)h(y) \, dx \right] dy$$

Na integral interna, y é uma constante, então h(y) é uma constante e podemos escrever

$$\int_{c}^{d} \left[ \int_{a}^{b} g(x)h(y) dx \right] dy = \int_{c}^{d} \left[ h(y) \left( \int_{a}^{b} g(x) dx \right) \right] dy$$
$$= \int_{c}^{b} g(x) dx \int_{a}^{d} h(y) dy$$

já que  $\int_a^b g(x) dx$  é uma constante. Portanto, neste caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais de funções de uma variável real:

$$\iint\limits_{B} g(x)h(y) dA = \int_{a}^{b} g(x) dx \int_{c}^{d} h(y) dy \quad \text{onde} \quad R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5  $\Box$  Se  $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ , então

$$\iint_{R} \operatorname{sen} x \cos y \, dA = \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \int_{0}^{\pi/2} \cos y \, dy$$
$$= \left[ -\cos x \right]_{0}^{\pi/2} \left[ \operatorname{sen} y \right]_{0}^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

 $\Box$  A função  $f(x, y) = \sin x \cos y$  do Exemplo 5 é positiva em R; assim, a integral representa o volume do sólido contido entre o gráfico de f e R como mostrado na Figura 6.

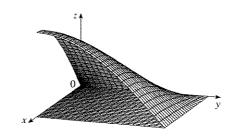


FIGURA 6

#### 15.2 Exercícios

1-2  $\Box$  Determine  $\int_0^3 f(x, y) dx e \int_0^4 f(x, y) dy$ .

1. 
$$f(x, y) = 2x + 3x^2y$$

**2.** 
$$f(x, y) = \frac{y}{x+2}$$

3-12 🗆 Calcule a integral iterada.

3. 
$$\int_{1}^{3} \int_{0}^{1} (1 + 4xy) dx dy$$

**4.** 
$$\int_{2}^{4} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2) dy dx$$

**5.** 
$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx$$

**5.** 
$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx$$
 **6.**  $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y}) \, dx \, dy$ 

7. 
$$\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8 dx dy$$
 8.  $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$ 

**8.** 
$$\int_{0}^{1} \int_{1}^{2} \frac{xe^{x}}{y} dy dx$$

$$\mathbf{9.} \int_{1}^{4} \int_{1}^{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$$

**10.** 
$$\int_{1}^{2} \int_{0}^{1} (x + y)^{-2} dx dy$$

$$11. \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} dx \, dy$$

11. 
$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} dx dy$$
 12.  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dy dx$ 

13-20 □ Calcule a integral dupla.

**13.** 
$$\iint\limits_R (6x^2y^3 - 5y^4) \, dA, \quad R = \{(x, y) \, \big| \, 0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 1 \}$$

**14.** 
$$\iint_{R} \cos(x + 2y) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi/2\}$$

$$\iint_{\mathbb{R}} \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ -3 \le y \le 3\}$$

**16.** 
$$\iint_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+y^2} dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$$

$$\iint_{\mathbb{R}} x \operatorname{sen}(x + y) \, dA, \quad R = [0, \, \pi/6] \times [0, \, \pi/3]$$

**18.** 
$$\iint_{a} \frac{x}{1+xy} dA, \quad R = [0,1] \times [0,1]$$

**19.** 
$$\iint_{R} xye^{x^{2}y} dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 2]$$

**20.** 
$$\iint_{R} \frac{x}{x^2 + y^2} dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$$

21-22 🗆 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

**21.** 
$$\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) \, dx \, dy$$
 **22.**  $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx$ 

23. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano 3x + 2y + z = 12 e acima do retângulo  $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 3\}.$ 

- 24. Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide hiperbólico  $z = 4 + x^2 - y^2$  e acima do quadrado  $R = [-1, 1] \times [0, 2].$
- 25. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide elíptico  $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$  e acima do retângulo  $R = [-1, 1] \times [-2, 2].$
- 26. Determine o volume do sólido delimitado pela superfície  $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y \operatorname{pelos} \operatorname{planos} x = \pm 1, y = 0, y = \pi,$ e z = 0.
- 27. Determine o volume do sólido limitado pela superfície  $z = x\sqrt{x^2 + y}$  e pelos planos x = 0, x = 1, y = 0, y = 1
- 28. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico  $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$ , pelos planos x = 3 e y = 2 e pelos planos coordenados.
- 29. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro  $z = 9 - y^2$  e pelo plano x = 2.
- 30. (a) Determine o volume do sólido limitado pela superfície z = 6 - xy e pelos planos x = 2, x = -2, y = 0, y = 3e z = 0.
  - (b) Use o computador para desenhar o sólido.
- 31. Utilize um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral  $\iint_{\mathbb{R}} x^5 y^3 e^{xy} dA$ , onde  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Em seguida use o CAS para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

32. Desenhe o sólido contido entre as superfícies  $z = e^{-x^2}\cos(x^2 + y^2)$  e  $z = 2 - x^2 - y^2$  para  $|x| \le 1$ ,  $|y| \le 1$ . Utilize um sistema computacional algébrico para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

33-34 □ Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

- **33.**  $f(x, y) = x^2y$ , R tem vértices (-1, 0), (-1, 5), (1, 5), (1, 0)
- **34.**  $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$ ,  $R = [0, 4] \times [0, 1]$
- 35. Utilize seu CAS para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dy \, dx \qquad e \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \, dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

- 36. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?
  - (b) Se f(x, y) é contínua em  $[a, b] \times [c, d]$  e

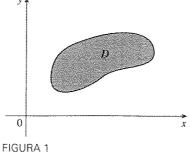
$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) dt ds$$

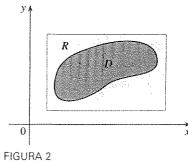
para a < x < b, c < y < d, mostre que  $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$ .

# Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode ser cercada por uma região retangular R como na Figura 2. Definimos então uma nova função F com domínio R por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R, \text{ mas não em } D \end{cases}$$





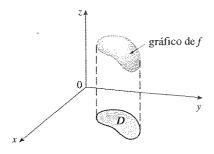
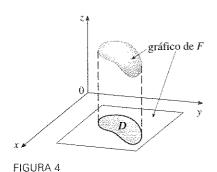


FIGURA 3



Se a integral dupla de F sobre R existe, então definimos a integral dupla de f sobre D por

$$\iint_{D} f(x, y) dA = \iint_{R} F(x, y) dA \quad \text{onde } F \text{ \'e dada pela Equação 1.}$$

A Definição 2 tem sentido porque R é um retângulo, e portanto  $\iint_R F(x, y) dA$  foi definida de maneira precisa na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de F(x, y) são 0 quando (x, y) está fora da região D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo tomado R desde que contenha D.

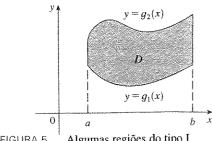
No caso em que  $f(x, y) \ge 0$  podemos ainda interpretar  $\iint_D f(x, y) dA$  como o volume do sólido contido acima de D e abaixo da superfície z = f(x, y) (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 3 e 4 e lembrando que  $\iint_R F(x, y) dA$  é o volume abaixo do gráfico de F.

A Figura 4 mostra também que F provavelmente tem uma descontinuidade nos pontos de fronteira de D. Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva fronteira de D for "bem comportada" (em um sentido que está fora do escopo deste livro), então pode ser mostrado que  $\iint_R F(x, y) dA$  existe, e portanto  $\iint_D f(x, y) dA$  existe. Em particular, esse é o caso para os tipos de regiões listados a seguir.

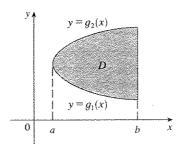
Uma região plana D é dita ser do tipo I, se está contida entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja,

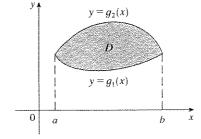
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde  $g_1$  e  $g_1$  são contínuas em [a, b]. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.



Algumas regiões do tipo I FIGURA 5





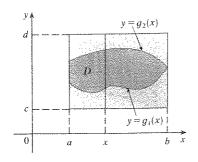


FIGURA 6

Para calcular  $\iint_D f(x, y) dA$  quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo R = [a, b] $\times$  [c, d] que contenha D, como na Figura 6, e tomamos F a função definida como na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora da região D. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dA = \iint\limits_{R} F(x, y) dA = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} F(x, y) dy dx$$

Observe que F(x, y) = 0 se  $y < g_1(x)$  ou  $y > g_2(x)$  porque (x, y) nessas condições está fora da região D. Assim,

$$\int_{c}^{d} F(x, y) \, dy = \int_{g_{t}(x)}^{g_{z}(x)} F(x, y) \, dy = \int_{g_{t}(x)}^{g_{z}(x)} f(x, y) \, dy$$

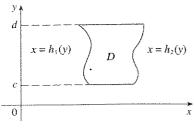
porque F(x, y) = f(x, y) quando  $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ . Portanto temos a seguinte fórmula que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

 $\boxed{3}$  Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

então

$$\iint\limits_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_i(x)}^{g_i(x)} f(x, y) dy dx$$



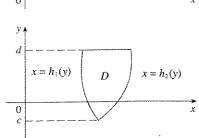


FIGURA 7 Algumas regiões do tipo II

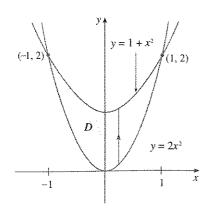


FIGURA 8

A integral do lado direito de (3) é uma integral iterada semelhante às consideradas na seção anterior, exceto que na integral de dentro enxergamos x como constante não só em f(x, y), como também nos limites de integração  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$ .

Consideraremos também regiões planas do tipo II, que podem ser expressas como

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d, \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são contínuas. Dois exemplos de região do tipo II estão ilustrados na Figura 7. Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer (3), podemos mostrar que

$$\iint_{D} f(x, y) dA = \int_{c}^{d} \int_{h_{1}(y)}^{h_{2}(y)} f(x, y) dx dy$$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Calcule  $\iint_D (x + 2y) dA$ , onde D é a região limitada pelas parábolas  $y = 2x^2$  e  $y = 1 + x^2$ .

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando  $2x^2 = 1 + x^2$ , ou seja,  $x^2 = 1$ , logo  $x = \pm 1$ . Notamos que a região D, ilustrada na Figura 8, é do tipo I e não do tipo II, e podemos escrever que

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, \ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

Como a fronteira de baixo é  $y = 2x^2$  e a de cima é  $y = 1 + x^2$ , a Equação 3 leva a

$$\iint_{D} (x+2y) dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^{2}}^{1+x^{2}} (x+2y) dy dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[ xy + y^{2} \right]_{y=2x^{2}}^{y=1+x^{2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[ x(1+x^{2}) + (1+x^{2})^{2} - x(2x^{2}) - (2x^{2})^{2} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left( -3x^{4} - x^{3} + 2x^{2} + x + 1 \right) dx$$

$$= -3 \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{4}}{4} + 2 \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{2}}{2} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

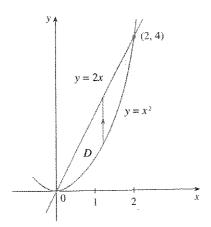


FIGURA 9

D como uma região do tipo I

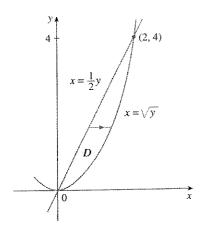
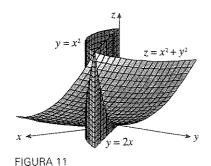


FIGURA 10

D como uma região do tipo II

 $\square$  A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano xy, abaixo do parabolóide  $z=x^2+y^2$ , e entre o plano y=2x e o cilindro parabólico  $y=x^2$ .



NOTA  $\circ$  Quando montamos a integral dupla como no Exemplo 1, é essencial desenhar um diagrama. Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical como na Figura 8. Assim os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama como segue: a seta começa na fronteira debaixo  $y=g_1(x)$ , que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima  $y=g_2(x)$ , que dá o extremo superior de integração. Para uma região do tipo II a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

EXEMPLO 2  $\Box$  Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e acima da região D do plano xy limitada pela reta y = 2x e pela parábola  $y = x^2$ .

SOLUÇÃO 1 Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, \ x^2 \le y \le 2x \}$$

Portanto, o volume debaixo de  $z = x^2 + y^2$  e acima de D é

$$V = \iint_{D} (x^{2} + y^{2}) dA = \int_{0}^{2} \int_{x^{2}}^{2x} (x^{2} + y^{2}) dy dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left[ x^{2}y + \frac{y^{3}}{3} \right]_{y=x^{2}}^{y=2x} dx = \int_{0}^{2} \left[ x^{2}(2x) + \frac{(2x)^{3}}{3} - x^{2}x^{2} - \frac{(x^{2})^{3}}{3} \right] dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left( -\frac{x^{6}}{3} - x^{4} + \frac{14x^{3}}{3} \right) dx = -\frac{x^{7}}{21} - \frac{x^{5}}{5} + \frac{7x^{4}}{6} \right]_{0}^{2} = \frac{216}{35}$$

SOLUÇÃO 2 Da Figura 10 vemos que D pode ser escrito como uma região do tipo II

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le y \le 4, \ \tfrac{1}{2} y \le x \le \sqrt{y} \right\}$$

Logo, outra expressão para V é

$$V = \iint_{D} (x^{2} + y^{2}) dA = \int_{0}^{4} \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^{2} + y^{2}) dx dy$$

$$= \int_{0}^{4} \left[ \frac{x^{3}}{3} + y^{2}x \right]_{x = \frac{1}{2}y}^{x = \sqrt{y}} dy = \int_{0}^{4} \left( \frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^{3}}{24} - \frac{y^{3}}{2} \right) dy$$

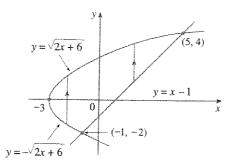
$$= \frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^{4} \Big|_{0}^{4} = \frac{216}{35}$$

23

EXEMPLO 3  $\ \, \Box$  Calcule  $\iint_D xy\ dA$ , onde D é a região limitada pela reta y=x-1 e pela parábola  $y^2=2x+6$ .

SOLUÇÃO A região D está representada na Figura 12. Novamente D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque a fronteira inferior é constituída de duas partes. Portanto preferimos expressar D como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \le y \le 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \le x \le y + 1\}$$



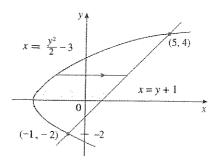


FIGURA 12

(a) D como região do tipo I

(b) D como região do tipo II

Logo (5) fornece

obteríamos

$$\iint_{D} xy \, dA = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^{2}-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^{4} \left[ \frac{x^{2}}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^{2}-3}^{x=y+1} \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} y \left[ (y+1)^{2} - (\frac{1}{2}y^{2} - 3)^{2} \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left( -\frac{y^{5}}{4} + 4y^{3} + 2y^{2} - 8y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{y^{6}}{24} + y^{4} + 2\frac{y^{3}}{3} - 4y^{2} \right]_{-2}^{4} = 36$$

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a),

$$\iint\limits_{D} xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

mas isso daria muito mais trabalho que o outro método.

EXEMPLO 4 

Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0 e z = 0.

SOLUÇÃO Em uma questão como essa, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D sobre a qual o sólido se encontra. A Figura 13 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados x = 0, z = 0, o plano vertical x = 2y e o plano x + 2y + z = 2. Como x + 2y + z = 2 intercepta o plano xy (cuja equação é z = 0) na reta x + 2y = 2, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas x = 2y, x + 2y = 2 e x = 0. (Veja a Figura 14.)

O plano x + 2y + z = 2 pode ser escrito como z = 2 - x - 2y, então o volume pedido está sob o gráfico da função z = 2 - x - 2y e acima

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ x/2 \le y \le 1 - x/2\}$$

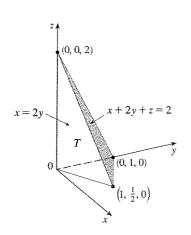


FIGURA 13

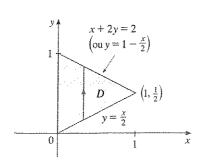


FIGURA 14

Portanto

$$V = \iint_{D} (2 - x - 2y) dA = \int_{0}^{1} \int_{x/2}^{1 - x/2} (2 - x - 2y) dy dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left[ 2y - xy - y^{2} \right]_{y = x/2}^{y = 1 - x/2} dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left[ 2 - x - x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) - \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^{2} - x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{2}}{4} \right] dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left( x^{2} - 2x + 1 \right) dx = \frac{x^{3}}{3} - x^{2} + x \Big]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Calcule a integral iterada  $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) \, dy \, dx$ .

SOLUÇÃO Se tentarmos calcular a integral como ela se apresenta, teremos inicialmente de resolver o problema de calcular  $\int \sec(y^2) \, dy$ . Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que  $\int \sec(y^2) \, dy$  não é uma função elementar (veja o final da Seção 7.5 do Volume I). Precisamos então mudar a ordem de integração, o que pode ser conseguido escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla. Usando (3) de trás para a frente, temos

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{1} \sec(y^{2}) \, dy \, dx = \iint_{D} \sec(y^{2}) \, dA$$

onde

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1\}$$

Esboçamos essa região D na Figura 15. Então, da Figura 16 vemos que um modo alternativo de descrever D é

$$D = \{(x, y) | 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$$

Isso nos permite usar (5) para exprimir a integral dupla como uma integral iterada na ordem reversa:

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{1} \operatorname{sen}(y^{2}) \, dy \, dx = \iint_{D} \operatorname{sen}(y^{2}) \, dA$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{y} \operatorname{sen}(y^{2}) \, dx \, dy = \int_{0}^{1} \left[ x \operatorname{sen}(y^{2}) \right]_{x=0}^{x=y} \, dy$$

$$= \int_{0}^{1} y \operatorname{sen}(y^{2}) \, dy = -\frac{1}{2} \cos(y^{2}) \Big]_{0}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

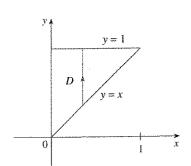


FIGURA 15

D como uma região do tipo I

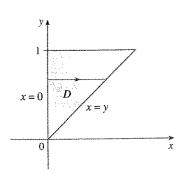


FIGURA 16

D como uma região do tipo II

# Propriedade da Integral Dupla

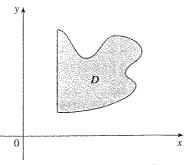
Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

$$\iint\limits_D \left[ f(x,y) + g(x,y) \right] dA = \iint\limits_D f(x,y) \, dA + \iint\limits_D g(x,y) \, dA$$

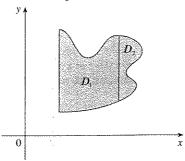
$$\iint\limits_{D} cf(x,y) dA = c \iint\limits_{D} f(x,y) dA$$

 $\begin{array}{c|c}
 & D \\
\hline
 & D_1 \\
\hline
 & D_2
\end{array}$ 

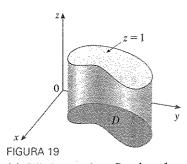
FIGURA 17



(a) D não é região nem do tipo I nem do tipo II.



(b)  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1$  é do tipo I, e  $D_2$  é tipo do II. FIGURA 18



(a) Cilindro com base D e altura 1.

Se  $f(x, y) \ge g(x, y)$  para todo (x, y) em D, então

$$\iint\limits_D f(x,y) \ dA \ge \iint\limits_D g(x,y) \ dA$$

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real dada pela equação  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

Se  $D = D_1 \cup D_2$ , onde  $D_1$  e  $D_2$  não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

$$\iint_{D} f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões *D* que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse processo (veja os Exercícios 49 e 50).

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos uma função constante f(x, y) = 1 sobre uma região D, obteremos a área de D:

$$\iint\limits_{D} 1 \ dA = A(D)$$

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e altura 1, tem volume  $A(D) \cdot 1 = A(D)$ , mas sabemos que também podemos escrever seu volume como  $\iint_D 1 \, dA$ .

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para provar a seguinte propriedade (veja o Exercício 53):

11 Se  $m \le f(x, y) \le M$  para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \le \iint_D f(x, y) dA \le MA(D)$$

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral  $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$ , onde  $D \notin$  o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como  $-1 \le \text{sen } x \le 1 \text{ e } -1 \le \cos y \le 1$ , temos  $-1 \le \text{sen } x \cos y \le 1 \text{ e}$  portanto

$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leq e^{1} = e$$

Assim, usando  $m=e^{-1}=1/e, M=e, e$   $A(D)=\pi(2)^2$  na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \le \iint\limits_{D} e^{\sin x \cos y} dA \le 4\pi e$$

# Exercícios

1-6 
Calcule as integrais iteradas.

1. 
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x^{2}} (x + 2y) dy dx$$

**2.** 
$$\int_{1}^{2} \int_{y}^{2} xy \, dx \, dy$$

3. 
$$\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} \, dx \, dy$$

**4.** 
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) \, dy \, dx$$

**5.** 
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$$
 **6.**  $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2} du dv$ 

**6.** 
$$\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} \, du \, dv$$

7-18 
Calcule a integral dupla.

7. 
$$\iint x^3 y^2 dA$$
,  $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, -x \le y \le x\}$ 

**8.** 
$$\iint_{0}^{b} \frac{4y}{x^{3} + 2} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2x\}$$

**9.** 
$$\iint_{\Omega} \frac{2y}{x^2 + 1} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{x} \}$$

**10.** 
$$\iint_{\Omega} e^{y^2} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$$

**11.** 
$$\iint_D e^{x/y} dA$$
,  $D = \{(x, y) \mid 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$ 

**12.** 
$$\iint_D x \sqrt{y^2 - x^2} \, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$$

13. 
$$\iint_D x \cos y \, dA$$
,  $D \in \text{limitada por } y = 0, y = x^2, x = 1$ 

**14.** 
$$\iint (x + y) dA$$
,  $D$  é limitada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ 

$$15. \iint_{\Sigma} y^3 dA,$$

D é a região triangular com vértices (0, 2), (1, 1) e (3, 2)

**16.** 
$$\iint xy^2 dA$$
,  $D \in \text{limitada por } x = 0 \quad \text{e} \quad x = \sqrt{1 - y^2}$ 

$$\iint_{\Omega} (2x - y) dA,$$

D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2.

**18.** 
$$\iint_{\mathbb{R}} 2xy \, dA, \quad D$$

é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 2) e (0, 3)

19-28 □ Determine o volume do sólido dado.

- **19.** Abaixo do plano x + 2y z = 0 e acima da região limitada
- **20.** Abaixo da superfície  $z = 2x + y^2$  e acima da região limitada  $por x = y^2 e x = y^3$

- **21.** Abaixo da superfície z = xy e acima do triângulo com vértices em (1, 1), (4, 1) e (1, 2)
- 22. Delimitado pelo parabolóide  $z = x^2 + 3y^2$  e pelos planos x = 0, y = 1, y = x, z = 0
- **23.** Limitado pelos planos x = 0, y = 0, z = 0, e x + y + z = 1
- 24. Limitado pelo cilindro z = x, y = x, x + y = 2, e z = 0
- **25.** Delimitado pelos cilindros  $z = x^2$ ,  $y = x^2$  e pelos planos z = 0, y = 4
- **26.** Limitado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 4$  e pelos planos x = 2y, x = 0, z = 0 no primeiro octante
- 27. Limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e pelos planos y = z, x = 0, z = 0 no primeiro octante
- **28.** Limitado pelos cilindros  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $y^2 + z^2 = r^2$
- 29. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de interseção da curva  $y = x^4$  e  $y = 3x - x^2$ . Se D é a região limitada por essas curvas, estime  $\iint_D x dA$ .
- **30.** Determine o volume aproximado do sólido no primeiro octante que é limitado pelos planos y = x, z = 0 e z = x e pelo cilindro  $y = \cos x$ . (Utilize o dispositivo gráfico para estimar os pontos de interseção.)

31-32 □ Determine o volume do sólido por subtração de dois

- **31.** O sólido delimitado pelos cilindros parabólicos  $y = 1 x^2$ ,  $y = x^2 - 1$  e pelos planos x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0
- **32.** O sólido delimitado pelo parabolóide cilíndrico  $y = x^2$  e os planos z = 3y, z = 2 + y
- 33–36 
  Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.
  - Abaixo da superfície  $z = x^3y^4 + xy^2$  e acima da região limitada pelas curvas  $y = x^3 - x e y = x^2 + x para x \ge 0$
  - **34.** Entre os parabolóides  $z = 2x^2 + y^2$  e  $z = 8 x^2 2y^2$  e dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$
  - **35.** Delimitado por  $z = 1 x^2 y^2$  e z = 0
  - **36.** Delimitado por  $z = x^2 + y^2$  e z = 2y

37-42 □ Esboce a região de integração e faça a mudança da ordem

**37.** 
$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$$

**38.** 
$$\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x,y) \, dy \, dx$$

**39.**  $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy$  **40.**  $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y) \, dx \, dy$ 

**42.**  $\int_{1}^{2} \int_{0}^{\ln x} f(x, y) \, dy \, dx$  **42.**  $\int_{0}^{1} \int_{\operatorname{ared} x}^{\pi/4} f(x, y) \, dy \, dx$ 

43-48 🗆 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

**43.**  $\int_{0}^{1} \int_{0}^{3} e^{x^{2}} dx dy$ 

**44.**  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{2}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy$ 

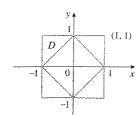
**45.**  $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) \, dx \, dy$ 

**46.**  $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) \, dy \, dx$ 

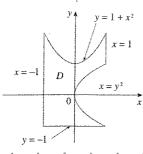
**47.**  $\int_0^1 \int_{\text{arcsen } y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx \, dy$  **48.**  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} \, dx \, dy$ 

49-50  $\square$  Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

 $\mathbf{49.} \quad \iint_{\mathbb{R}} x^2 dA$ 



**50.**  $\iint_{\Omega} xy \, dA$ 



51-52 🗆 Utilize a Propriedade 11 para estimar o valor da integral.

1001

**51.**  $\iint_{\Omega} \sqrt{x^3 + y^3} \, dA, D = [0, 1] \times [0, 1]$ 

**52.**  $\iint e^{x^2+y^2} dA$ , D é o disco com centro na origem e raio  $\frac{1}{2}$ 

53. Prove a Propriedade 11.

No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D. obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que

$$\iint_{D} f(x, y) dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2y} f(x, y) dx dy + \int_{1}^{3} \int_{0}^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

**55.** Calcule  $\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4) dA$ , onde  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 2\}.$ [Dica: explore o fato de que D é simétrica com relação a ambos os eixos.]

**56.** Utilize simetria para calcular  $\iint_D (2 - 3x + 4y) dA$ , onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices (±5, 0) e

**57.** Calcule  $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dA$ , onde  $D \in O$  disco  $x^2+y^2 \leq 1$ , identificando primeiro a integral como o volume de um

58. Desenhe o sólido limitado pelo plano x + y + z = 1 e pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e determine seu volume exato. (Utilize seu CAS para fazer esse desenho, para achar as equações das fronteiras da região de integração e para calcular a integral dupla.)

# 15.4

## Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla  $\iint_R f(x, y) dA$ , onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

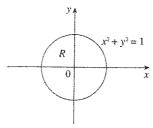


FIGURA 1

(a) 
$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2 \pi\}$$

(a)  $R = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$ 

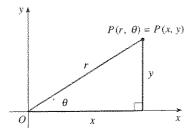


FIGURA 2

Lembre-se da Figura 2 em que as coordenadas polares  $(r, \theta)$  de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2$$
  $x = r\cos\theta$   $y = r\sin\theta$ 

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais do retângulo polar

$$R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcular a integral dupla  $\iint_R f(x, y) dA$ , onde R é o retângulo polar, dividimos o intervalo [a, b] em m subintervalos  $[r_{i-1}, r_i]$  de larguras iguais  $\Delta r = (b-a)/m$  e dividimos o intervalo  $[\alpha, \beta]$  em n subintervalos  $[\theta_{j-1}, \theta_j]$  de larguras iguais  $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$ . Então os círculos  $r = r_i$  e os raios  $\theta = \theta_j$  dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores mostrados na Figura 4.

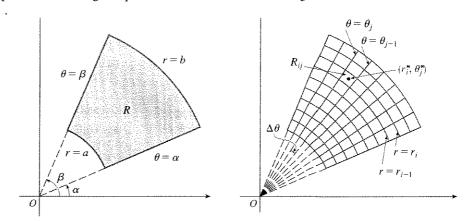


FIGURA 3 Retângulo polar

FIGURA 4 Dividindo R em sub-retângulos polares

O "centro" dos sub-retângulos polares

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$
  $\theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$ 

Calculamos a área de  $R_{ij}$  usando o fato de a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central  $\theta$  ser  $\frac{1}{2}r^2\theta$ . Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central  $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$ , descobrimos que a área de  $R_{ij}$  é

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \theta - \frac{1}{2} r_{i-1}^1 \quad \Delta \theta = \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta \theta$$
$$= \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}) (r_i - r_{i-1}) \Delta \theta = r_i^* \Delta r \Delta \theta$$

Apesar de termos definido a integral dupla  $\iint_R f(x, y) dA$  em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f, obtemos a mesma resposta usando os retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro  $R_{ij}$  são  $(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)$ , portanto uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_{i}^{*} \cos \theta_{j}^{*}, r_{i}^{*} \sin \theta_{j}^{*}) \Delta A_{i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_{i}^{*} \cos \theta_{j}^{*}, r_{i}^{*} \sin \theta_{j}^{*}) r_{i}^{*} \Delta r \Delta \theta$$

Se escrevermos  $g(r, \theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ , então a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \, \theta_j^*) \, \Delta r \, \Delta \, \theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_a^\beta \int_a^b g(r,\,\theta)\,dr\,d\theta$$

Portanto, temos

$$\iint_{R} f(x, y) dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_{i}^{*} \cos \theta_{j}^{*}, r_{i}^{*} \sin \theta_{j}^{*}) \Delta A_{i}$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_{i}^{*}, \theta_{j}^{*}) \Delta r \Delta \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} g(r, \theta) dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

[2] Mudança para Goordenadas Polares em uma Integral Dupla Se f é contínua no retângulo polar R dado por  $0 \le a \le r \le b$ ,  $\alpha \le \theta \le \beta$ , onde  $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ , então

$$\iint\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) dA = \int_{a}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

A fórmula em (2) diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla, escrevendo  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , usando os límites de integração apropriados para  $r \in \theta$ , e substituindo dA por  $r dr d\theta$ . Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar encontra-se na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares "infinitesimais" como retângulos convencionais com dimensões  $r d\theta$  e dr e portanto com "área"  $dA = r dr d\theta$ .

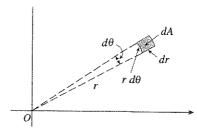


FIGURA 5

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Calcule  $\iint_R (3x + 4y^2) dA$ , onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) | y \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por  $1 \le r \le 2$ .

 $0 \le \theta \le \pi$ . Portanto, da Fórmula 2, segue

$$\iint_{R} (3x + 4y^{2}) dA = \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} (3r \cos \theta + 4r^{2} \sin^{2}\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} (3r^{2} \cos \theta + 4r^{3} \sin^{2}\theta) dr d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} [r^{3} \cos \theta + r^{4} \sin^{2}\theta]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_{0}^{\pi} (7 \cos \theta + 15 \sin^{2}\theta) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} [7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta)] d\theta$$

$$= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_{0}^{\pi} = \frac{15\pi}{2}$$

**EXEMPLO 2**  $\square$  Determine o volume do sólido limitado pelo plano z = 0 e pelo parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

SOLUÇÃO Se tomarmos z=0 na equação do parabolóide, obteremos  $x^2+y^2=1$ . Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo  $x^2+y^2=1$ , e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dado por  $x^2+y^2 \le 1$  [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por  $0 \le r \le 1$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ . Como  $1-x^2-y^2=1-r^2$ , o volume é

$$V = \iint_{D} (1 - x^{2} - y^{2}) dA = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} (1 - r^{2}) r dr d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} (r - r^{3}) dr = 2\pi \left[ \frac{r^{2}}{2} - \frac{r^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

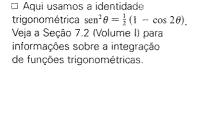
$$V = \iint\limits_{D} (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

que não é fácil de calcular porque envolve o cálculo das seguintes integrais:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \qquad \int x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx \qquad \int (1-x^2)^{3/2} \, dx$$

3.3

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como mostrado na Figura 7. Isso é semelhante a uma região em coordenadas retangulares do tipo II consideradas na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte:



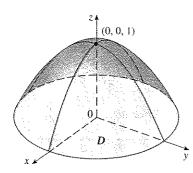


FIGURA 6

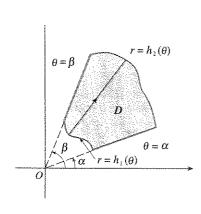


FIGURA 7  $D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_i(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$ 

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então  $\iint_{\Omega} f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_{i}(\theta)}^{h_{i}(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ 

Em particular, tomando f(x, y) = 1,  $h_1(\theta) = 0$  e  $h_2(\theta) = h(\theta)$  nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  e  $r = h(\theta)$  é

$$A(D) = \iint_{D} 1 \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{h(\theta)} r \, dr \, d\theta$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{r^{2}}{2} \right]_{0}^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^{2} d\theta$$

que é o mesmo que obteríamos usando a Fórmula 10.4.3.

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas  $r=\cos 2\theta$ .

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8 vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{ (r, \theta) \mid -\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \ 0 \le r \le \cos 2\theta \}$$

Sua área é

$$A(D) = \iint_{D} dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{0}^{\cos 2\theta} r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[ \frac{1}{2} r^{2} \right]_{0}^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^{2} 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \frac{1}{4} \left[ \theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide  $z = x^2 + y^2$ , acima do plano xy, e dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$ .

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cuja fronteira tem equação  $x^2 + y^2 = 2x$  ou, após completar os quadrados,

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

(veja as Figuras 9 e 10). Em coordenadas polares, temos  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $x = r\cos\theta$ , logo a fronteira circular fica  $r^2 = 2r\cos\theta$ , ou  $r = 2\cos\theta$ . Portanto o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \ 0 \le r \le 2 \cos \theta\}$$

e, da Fórmula 3, vem

$$V = \iint_{D} (x^{2} + y^{2}) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2\cos\theta} r^{2} r dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^{4}}{4} \right]_{0}^{2\cos\theta} d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{4}\theta d\theta$$

$$= 8 \int_{0}^{\pi/2} \cos^{4}\theta d\theta = 8 \int_{0}^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^{2} d\theta$$

$$= 2 \int_{0}^{\pi/2} \left[ 1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \right] d\theta$$

$$= 2 \left[ \frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_{0}^{\pi/2} = 2 \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

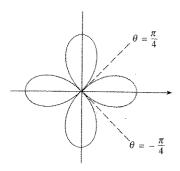


FIGURA 8

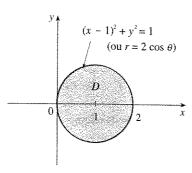


FIGURA 9

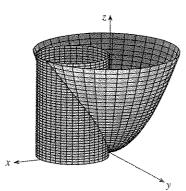
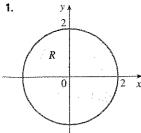
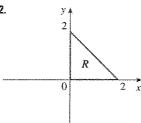


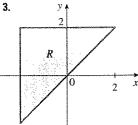
FIGURA 10

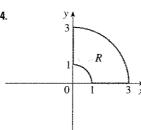
1-6 □ Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva  $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dA$ como uma integral iterada, onde f é uma arbitrária qualquer contínua em R.

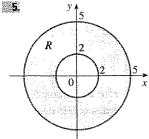


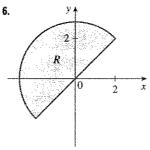












7-8 🗆 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a

7. 
$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{4}^{7} r \, dr \, d\theta$$

8. 
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r \, dr \, d\theta$$

9-16 
Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

9.  $\iint_{\mathbb{R}} x dM$ , onde D é o disco com centro na origem e raio 3

10.  $\iint_R (x + y) dA$ , onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ 

11.  $\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA$ , onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência  $x^2 + y^2 = 9$ 

12.  $\iint_{R} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA,$ <br/>onde  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4, \ x \ge 0\}$ 

13.  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$ , onde D é a região limitada pelo semicírculo  $x = \sqrt{4-y^2}$  e o eixo y

14.  $\iint_{\mathbb{R}} y e^x dA$ , onde D é a região do primeiro quadrante contida pelo círculo  $x^2 + y^2 = 16$ 

**15.**  $\iint_{\mathbb{R}} \arctan(y/x) dA$ , onde  $R = \{(x, y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le y \le x\}$ 

**16.**  $\iint_D x \, dA$ , onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos  $x^2 + y^2 = 4 e x^2 + y^2 = 2x$ 

17-20 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

17. Um laço da rosácea  $r = \cos 3\theta$ 

18. A região delimitada pela curva  $r = 4 + 3 \cos \theta$ 

19. A região interior a ambos os círculos  $r = \cos \theta$  e  $r = \sin \theta$ 

**20.** A região dentro do círculo r = 4 sen  $\theta$  e fora do círculo r = 2

21-27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

**21.** Abaixo do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e acima do disco  $x^2 + y^2 \le 9$ 

22. Dentro da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e fora do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ 

23. Uma esfera de raio a

24. Limitada pelo parabolóide  $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$  e pelo plano

Acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e abaixo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 

**26.** Limitada pelos parabolóides  $z = 3x^2 + 3y^2$  e  $z = 4 - x^2 - y^2$ 

27. Dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e do elipsóide  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$ 

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio  $r_1$  é usada para fazer um furo no centro de uma esfera de raio  $r_2$ . Determine o volume do sólido em formato de anel restante.

(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Note que o volume depende somente de h, e não de

29-32 
Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

**29.**  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \, dx$ 

**30.**  $\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dx dy$ 

**32.** 
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx$$

- 33. Uma piscina circular tem 40 pés de diâmetro. Sua profundidade é constante na direção leste-oeste e aumenta linearmente de 2 pés no término sul para 7 pés no término norte. Determine o volume de água da piscina.
- 34. Um aspersor distribui água em um círculo de raio de 100 pés. Ele fornece água até uma profundidade  $e^{-r}$  pés por hora em uma distância de r pés do aspersor.
  - (a) Qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro de um círculo de raio R centrado no aspersor?
  - (b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora e por pés quadrados fornecida para uma região circular de raio R.
- 35. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dy \, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

**36.** (a) Definimos uma integral imprópria (sobre todo plano  $\mathbb{R}^2$ )

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)} dy dx$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \iint_{\Omega} e^{-(x^2 + y^2)} dA$$

onde  $D_a$  é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

1007

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte

$$\iint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \to \infty} \iint_{\Sigma_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

onde  $S_a$  é o quadrado com vértices  $(\pm a, \pm a)$ . Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável  $t = \sqrt{2}x$ , mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental para probabilidade e estatística.)

37. Utilize o resultado do Exercício 36, parte (c), para calcular as seguintes integrais:

(a) 
$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

(a) 
$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$
 (b)  $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$ 

## Aplicações das Integrais Duplas

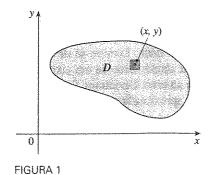
Já vimos uma aplicação da integral dupla: cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, o que será feito na próxima seção. Nesta seção, vamos explorar as aplicações físicas, como no cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos ainda como essas idéias físicas são importantes quando aplicadas a funções de densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

#### Densidade e Massa

Na Seção 8.3 do Volume I calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante, usando as integrais de funções de uma variável real. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha uma lâmina colocada em uma região D do plano xy e cuja densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por  $\rho(x, y)$ , onde  $\rho$  é uma função contínua sobre D. Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde  $\Delta m$  e  $\Delta A$  são a massa e a área do pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).



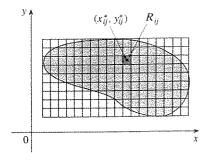


FIGURA 2

Para determinar a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em subretângulos  $R_{ij}$  todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos  $\rho(x, y)$  como 0 fora de D. Se escolhermos um ponto  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  em  $R_{ij}$ , então a massa da parte da lâmina que ocupa  $R_{ij}$  é aproximadamente  $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$   $\Delta A$ , onde  $\Delta A$  é a área de  $R_{ij}$ . Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor limite dessa aproximação:

$$1 \qquad m = \lim_{k, l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_{D} \rho(x, y) dA$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por  $\sigma(x, y)$  em um ponto (x, y) em D, então a carga total Q é dada por

$$Q = \iint\limits_{D} \sigma(x, y) \, dA$$

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Uma carga está distribuída sobre uma região D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) seja  $\sigma(x, y) = xy$ , medida em coulombs por metro quadrado  $(C/m^2)$ . Determine a carga total.

SOLUÇÃO Da Equação 2 e Figura 3, temos

$$Q = \iint\limits_{D} \sigma(x, y) dA = \int_{0}^{1} \int_{1-x}^{1} xy \, dy \, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left[ x \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_{0}^{1} \frac{x}{2} \left[ 1^{2} - (1-x)^{2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (2x^{2} - x^{3}) \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{2x^{3}}{3} - \frac{x^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{5}{24}$$

Logo, a carga total é  $\frac{5}{24}$  C.

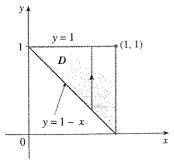


FIGURA 3

### Momentos e Centro de Massa

Na Seção 8.3 do Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideramos uma lâmina com densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha  $\rho(x,y)$  como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8 (Volume I) definimos o momento de uma partícula em torno de um eixo como o produto de sua massa pela distância (na perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos como na Figura 2. Então a massa de  $R_{ij}$  é aproximadamente  $\rho(x_{ij}^*,y_{ij}^*)$   $\Delta A$ , e podemos aproximar o momento de  $R_{ij}$  com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ii}^*, y_{ii}^*) \Delta A] y_{ii}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira **em torno do eixo x**:

$$M_{x} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^{*} \rho(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A = \iint_{D} y \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o momento em torno do eixo y é:

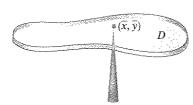


FIGURA 4

$$M_{y} = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*} \rho(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A = \iint_{D} x \rho(x, y) dA$$

Como anteriormente, definimos o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  de modo que  $m\bar{x} = M_y$  e  $m\bar{y} = M_x$ . O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

As coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade  $\rho(x, y)$  são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_D x \rho(x, y) dA$$
  $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y \rho(x, y) dA$ 

onde a massa m é dada por

$$m = \iint\limits_{D} \rho(x, y) \, dA$$

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2), se a função densidade é  $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$ .

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Note que a equação da fronteira superior é y=2-2x.) A massa da lâmina é

$$m = \iint_{D} \rho(x, y) dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx$$
$$= \int_{0}^{1} \left[ y + 3xy + \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$
$$= 4 \int_{0}^{1} (1 - x^{2}) dx = 4 \left[ x - \frac{x^{3}}{3} \right]_{0}^{1} = \frac{8}{3}$$

Então, as fórmulas em (5) nos dão

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_{D} x \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (x + 3x^{2} + xy) dy dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_{0}^{1} \left[ xy + 3x^{2}y + x \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_{0}^{1} (x - x^{3}) dx = \left[ \frac{x^{2}}{2} - \frac{x^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{3}{8}$$

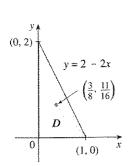


FIGURA 5

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_{D} y \rho(x, y) dA = \frac{3}{8} \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (y + 3xy + y^{2}) dy dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_{0}^{1} \left[ \frac{y^{2}}{2} + 3x \frac{y^{2}}{2} + \frac{y^{3}}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} (7 - 9x - 3x^{2} + 5x^{3}) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 7x - 9 \frac{x^{2}}{2} - x^{3} + 5 \frac{x^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{11}{16}$$

O centro de massa é o ponto  $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$ .

EXEMPLO 3 
A densidade em qualquer ponto de uma lârnina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

SOLUÇÃO Vamos considerar a lâmina como a metade superior do círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  (veja a Figura 6). Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então  $\sqrt{x^2+y^2}=r$  e a região D é dada por  $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi$ . Logo a massa da lâmina é

$$m = \iint_{D} \rho(x, y) dA = \iint_{D} K \sqrt{x^{2} + y^{2}} dA$$
$$= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{a} (Kr) r dr d\theta = K \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{a} r^{2} dr$$
$$= K\pi \frac{r^{3}}{3} \Big|_{0}^{a} = \frac{K\pi a^{3}}{3}$$

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y, e assim o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja,  $\bar{x} = 0$ . A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_{D} y \rho(x, y) dA = \frac{3}{K\pi a^{3}} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{a} r \sin\theta (Kr) r dr d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^{3}} \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{0}^{a} r^{3} dr = \frac{3}{\pi a^{3}} \left[ -\cos\theta \right]_{0}^{\pi} \left[ \frac{r^{4}}{4} \right]_{0}^{a}$$

$$= \frac{3}{\pi a^{3}} \frac{2a^{4}}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto o centro de massa está localizado no ponto  $(0, 3a/(2\pi))$ .

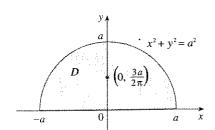


FIGURA 6

 $\square$  Compare a localização do centro de massa no Exemplo 3 com o Exemplo 4 na Seção 8.3 (Volume I), onde encontramos o centro de massa da lâmina com o mesmo formato, mas a densidade uniforme a está localizada no ponto  $(0, 4a/(3\pi))$ .

## Momento de Inércia

O momento de inércia (também chamado segundo momento) de uma partícula de massa m em torno de um eixo é definido como  $mr^2$ , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade  $\rho(x, y)$  e ocupando uma região D pelo mesmo processo que fizemos para momentos simples. Dividimos D em

5/2 \$4.5

pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em torno do eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia** da lâmina **em torno do eixo** x:

$$I_{x} = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^{*})^{2} \rho(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A = \iint_{D} y^{2} \rho(x, y) dA$$

Da mesma forma, o momento de inércia em torno do eixo y é:

$$I_{y} = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^{*})^{2} \rho(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A = \iint_{D} x^{2} \rho(x, y) dA$$

É de interesse, ainda, considerar o momento de inércia em torno da origem, também chamado momento polar de inércia:

$$I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ (x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2 \right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Note que  $I_0 = I_x + I_y$ .

**EXEMPLO 4** Determine os momentos de inércia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_0$  do disco homogêneo D com densidade  $\rho(x, y) = \rho$ , centro na origem e raio a.

SOLUÇÃO A fronteira de D é o círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ , que em coordenadas polares D é descrito como  $0 \le \theta \le 2\pi$ ,  $0 \le r \le a$ . Vamos calcular  $I_0$  primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta$$
$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi \rho \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi \rho a^4}{2}$$

Em vez de calcular  $I_x$  e  $I_y$  diretamente, vamos usar o fato de que  $I_x + I_y = I_0$  e  $I_x = I_y$  (da simetria do problema). Portanto

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \rho a^4}{4}$$

No Exemplo 4, note que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho (\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{1}{2}ma^2$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia.

Em geral, o momento de inércia tem um papel em movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a freada.

O raio de rotação de uma lâmina em torno de um eixo é um número R tal que

$$mR^2 = I$$

onde *m* é a massa da lâmina e *I* é o momento de inércia em torno do eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância *R* do eixo, então o momento de inércia desse "ponto massa" seria o mesmo que o momento de inércia da lâmina

Em particular, o raio de rotação  $\overline{y}$  em torno do eixo x e o raio de rotação  $\overline{x}$  em torno do eixo y têm as equações

$$m\overline{y}^2 = I_x \qquad m\overline{x}^2 = I_y$$

Então  $(\vec{x}, \vec{y})$  é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar o momento de inércia em torno dos eixos coordenados resultantes. (Note a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 🗆 Determine o raio de rotação em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como notado, a massa do disco é  $m = \rho \pi a^2$ , e da Equação 10, temos

$$\overline{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de rotação em torno do eixo x é

$$\sqrt{\bar{y}} = \frac{a}{2}$$

ŽĴ.

que é metade do raio do disco.

#### Probabilidade

Na Seção 9.5, consideramos a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória contínua X. Isso significa que  $f(x) \ge 0$  para todo x,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y, como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) \, dA$$

de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \le X \le b, \ c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

(Veja a Figura 7.)

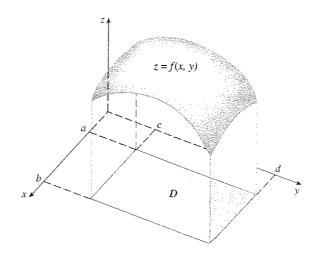


FIGURA 7

A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo  $D = [a, b] \times [c, d]$  e abaixo do gráfico da função densidade conjunta.

Como as probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \ge 0$$
 
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1$$

Como no Exercício 36 da Seção 15.4, a integral dupla sobre  $\mathbb{R}^2$  é uma integral imprópria definida como o limite da integral dupla sobre o círculo ou retângulo expandido e podemos escrever

$$\iint\limits_{\mathbb{D}^1} f(x, y) \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

EXEMPLO 6 = Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \le x \le 10, \ 0 \le y \le 10\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Em seguida calcule  $P(X \le 7, Y \ge 2)$ .

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como f(x, y) = 0 fora do retângulo  $[0, 10] \times [0, 10]$ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{0}^{10} \int_{0}^{10} C(x + 2y) \, dy \, dx = C \int_{0}^{10} \left[ xy + y^{2} \right]_{y=0}^{y=10} dx$$
$$= C \int_{0}^{10} (10x + 100) \, dx = 1500C$$

Portanto 1500C = 1, e então  $C = \frac{1}{1.500}$ .

Agora podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \le 7, Y \ge 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \frac{1}{1500} (x + 2y) \, dy \, dx$$
$$= \frac{1}{1500} \int_{0}^{7} \left[ xy + y^{2} \right]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500} \int_{0}^{7} (8x + 96) \, dx$$
$$= \frac{868}{1500} \approx 0,5787$$

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade  $f_1(x)$  e Y seja uma variável aleatória com função densidade  $f_2(y)$ . Então X e Y são ditas variáveis aleatórias independentes se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Na Seção 8.5 do Volume I, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0\\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \ge 0 \end{cases}$$

onde  $\mu$  é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 
O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos, e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos que 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individual como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{se } x \ge 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{se } y \ge 0 \end{cases}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

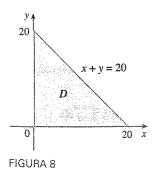
$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{se } x \ge 0, \ y \ge 0\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Perguntamos pela probabilidade de X + Y < 20:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então

$$P(X + Y < 20) = \iint_{D} f(x, y) dA = \int_{0}^{20} \int_{0}^{20-x} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} dy dx$$
$$= \frac{1}{50} \int_{0}^{20} \left[ e^{-x/10} (-5) e^{-y/5} \right]_{y=0}^{y=20-x} dx$$



$$= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} (1 - e^{(x-20)/5}) dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}) dx = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$$

$$= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$$

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos que 20 minutos antes de tomar seus assentos.

### Valor Esperado

Lembre-se da Seção 8.5 (Volume I) que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f, então sua média é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f, definimos **média** X e **média** Y, também chamadas **valores esperados** de X e Y, como

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dA \qquad \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dA$$

Note como são parecidas as expressões de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  em (11) com os momentos  $M_x$  e  $M_y$  de uma lâmina com função densidade  $\rho$  nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a "probabilidade de massa" total é 1, as expressões de  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$  em (5) mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as coordenadas do "centro de massa" da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalhamos com distribuição normal. Como na Seção 8.5 (Volume I), uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde  $\mu$  é sua média e  $\sigma$  é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8  $\Box$  Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos como tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. De fato, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça dela um gráfico. Determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção diferir dos valores médios em mais do que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuição normal com  $\mu_1=4.0$ ,  $\mu_2=6.0$  e  $\sigma_1=\sigma_2=0.01$ . As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0.0002}$$
  $f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0.0002}$ 

 $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{0,0002\pi} e^{-(x-4)^2/0,0002} e^{-(y-6)^2/0,0002}$ 

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2 + (y-6)^2]}$$

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de X e Y diferirem dos valores médios de menos que 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$P(3,98 < X < 4,02, 5,98 < Y < 6,02) = \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$= \frac{5000}{\pi} \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} e^{-5.000[(x-4)^2 + (y-6)^2]} \, dy \, dx$$

$$\approx 0.91$$

Então a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0.91 = 0.09$$

# 15.5 Exercícios

- Uma carga elétrica é distribuída sobre um retângulo  $1 \le x \le 3$ ,  $0 \le y \le 2$ , de modo que a densidade de carga em (x, y) seja  $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$  (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.
- Uma carga elétrica é distribuída sobre um disco
   x² + y² ≤ 4 de modo que a densidade de carga em (x, y) seja
   σ(x, y) = x + y + x² + y² (medida em coulombs por metro
   quadrado). Determine a carga total no disco.

 $3-10 \equiv$  Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade  $\rho$ .

**3.** 
$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}; \ \rho(x, y) = xy^2$$

**4.** 
$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}; \ \rho(x, y) = cxy$$

- **5.**  $D \notin \text{uma região triangular com vértices } (0, 0), (2, 1), (0, 3);$   $\rho(x, y) = x + y$
- **6.** D é uma região triangular com vértices (0, 0), (1, 1), (4, 0);  $\rho(x, y) = x$
- 7.  $D \in \text{limitada por } y = e^x, y = 0, x = 0 \in x = 1; \rho(x, y) = y$
- **8.**  $D \in \text{limitada por } y = \sqrt{x}, y = 0 \in x = 1; \rho(x, y) = x.$
- **9.** D é limitada pela parábola  $x = y^2$  e pela reta y = x 2;  $\rho(x, y) = 3$
- **10.**  $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \cos x, \ 0 \le x \le \pi/2\}; \ \rho(x, y) = x$

- 11. Uma lâmina ocupa a parte do disco  $x^2 + y^2 \le 1$  do primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.
- 12. Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.
- 13. Determine o centro de massa da lâmina com formato de um triângulo reto isósceles com lados iguais de tamanho a se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa.
- 14. Uma lâmina ocupa a região circular  $x^2 + y^2 = 2y$ , mas fora do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Determine o centro de massa se a densidade for proporcional à distância do ponto à origem.
- **15.** Determine os momentos de inércia  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_\theta$  para a lâmina do Exercício 7.
- Determine os momentos de inércia I<sub>x</sub>, I<sub>y</sub>, I<sub>0</sub> para a lâmina do Exercício 12.
- Determine os momentos de inércia I<sub>x</sub>, I<sub>y</sub>, I<sub>0</sub> para a lâmina do Exercício 9.
- 18. Considere uma pá de ventilador, quadrada, com lado de comprimento igual a 2 e com seu canto inferior esquerdo posicionado na origem. Se a densidade da pá for ρ(x, y) = 1 + 0,1x, será mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y?

**19.** 
$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \text{sen } x, \ 0 \le x \le \pi\}; \ \rho(x, y) = xy$$

**20.** D é delimitada pela cardióide  $r = 1 + \cos \theta$ ;

$$\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

21. Uma lâmina com densidade constante  $\rho(x, y) = \rho$  ocupa um quadrado de vértices (0, 0), (a, 0), (a, a) e (0, a). Determine os momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  e os raios de rotação  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$ .

22. Uma lâmina com densidade constante  $\rho(x, y) = \rho$  ocupa a região abaixo da curva  $y = \operatorname{sen} x$  de x = 0 até  $x = \pi$ . Determine os momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  e raios de rotação  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$ .

23. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine a constante C.
- (b) Determine  $P(X \le 1, Y \le 1)$ .
- (c) Determine  $P(X + Y \le 1)$ .
- 24. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.

(b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é f da parte (a), determine

(i) 
$$P(X \ge \frac{1}{2})$$
 (ii)  $P(X \ge \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2})$ 

- (c) Determine os valores esperados de X e Y.
- 25. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x + 0.2y)} & \text{se } x \ge 0, \ y \ge 0\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.
- (b) Determine as seguintes probabilidades. (i)  $P(Y \ge 1)$  (ii)  $P(X \le 2, Y \le 4)$
- (c) Determine os valores esperados de X e Y.
- **26.** (a) Uma lâmpada tem dois bulbos de um tipo com tempo de vida médio de 1000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha desses bulbos por uma

função densidade exponencial com média  $\mu=1000$ , determine a probabilidade de que ambos os bulbos venham a falhar dentro de um período de 1000 horas.

1017

- (b) Outra lâmpada tem somente um bulbo do mesmo tipo dos da parte (a). Se um bulbo se queima e é trocado por outro do mesmo tipo, determine a probabilidade de que os dois venham a falhar dentro de 1000 horas.
- 27. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias, onde X tem distribuição normal com média 45 e desvio-padrão 0,5 e Y tem distribuição normal com média 20 e desvio-padrão 0,1.
  - (a) Ache  $P(40 \le X \le 50, 20 \le Y \le 25)$
  - (b) Encontre  $P(4(X 45)^2 + 100(Y 20)^2 \le 2)$ .
  - 28. Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam em um café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y, onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. As funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \ge 0\\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \le y \le 10\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que se atrase. Yolanda sempre chega às 12h10, e é mais provável que se atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

29. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 mi na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto A(xo, yo), suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde d(P, A) denota a distância de P a A.

- (a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por milha quadrada. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A.
- (b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde você preferiria viver?

# 15.6

## Área de Superfície

☐ Na Seção 16.6, trataremos de superfícies mais gerais, chamadas superfícies paramétricas. Assim, você pode pular esta seção, se for cobrir a outra.

Nesta seção, vamos aplicar a integral dupla ao problema de se determinar a área de uma superfície. Na Seção 8.2 (Volume I), determinamos a área de um tipo especial de superfície – uma superfície de revolução – por métodos de cálculo de uma única variável. Calcularemos aqui a área de uma superfície cuja equação é dada por z = f(x, y), o gráfico de uma função de duas variáveis.

Seja S a superfície com a equação z = f(x, y), onde f tem derivadas parciais contínuas.

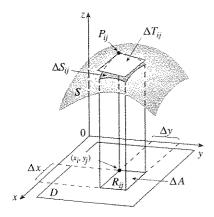
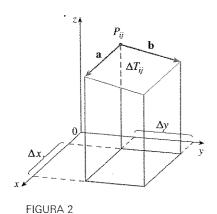


FIGURA 1



Para simplificar a dedução da fórmula da área, vamos supor que  $f(x,y) \ge 0$  e que o domínio D de f seja um retângulo. Vamos dividir D em retângulos pequenos  $R_{ij}$  com área  $\Delta A = \Delta x \, \Delta y$ . Se  $(x_i, y_j)$  é o canto de  $R_{ij}$  mais próximo da origem, seja  $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$  o ponto de S diretamente acima dele (veja a Figura 1). O plano tangente a S em  $P_{ij}$  é uma aproximação de S perto de  $P_{ij}$ . Assim, a área  $\Delta T_{ij}$  da parte desse plano tangente (um paralelogramo) que está diretamente acima de  $R_{ij}$  é uma aproximação da área  $\Delta S_{ij}$  da parte de S que está diretamente acima de  $R_{ij}$ . Então, a soma  $\Sigma \Sigma \, \Delta T_{ij}$  é uma aproximação da área total de S, a qual parece melhorar à medida que aumentamos o número de retângulos. Portanto definimos a **área de superfície** de S como

$$A(S) = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

Para determinar uma fórmula mais conveniente que a Equação 1 para propósitos computacionais, tomamos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  como os vetores que começam em  $P_{ij}$  e correspondem aos lados do paralelogramo com área  $\Delta T_{ij}$  (veja a Figura 2). Então  $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ . Lembrese, da Seção 14.3, que  $f_x(x_i, y_j)$  e  $f_y(x_i, y_j)$  são as inclinações das retas tangentes a  $P_{ij}$  com direções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Portanto

$$\mathbf{a} = \Delta x \, \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j) \, \Delta x \, \mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = \Delta y \, \mathbf{i} + f_y(x_i, y_i) \, \Delta y \, \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j) \Delta y \end{vmatrix}$$
$$= -f_x(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k}$$
$$= [-f_x(x_i, y_j) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \mathbf{j} + \mathbf{k}] \Delta A$$

Logo

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

Da Definição 1, temos

$$A(S) = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

e por qualquer definição de integral dupla podemos obter a seguinte fórmula:

2 A área da superfície com equação  $z=f(x,y),\,(x,y)\in D$ , onde  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas, é

$$A(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{[f_{x}(x, y)]^{2} + [f_{y}(x, y)]^{2} + 1} dA$$

gillia.

Verificaremos na Seção 16.6 que essa fórmula é consistente com nossa fórmula prévia para a área de uma superfície de revolução. Se utilizarmos a notação alternativa para derivada parcial, podemos reescrever a Fórmula 2 como segue:

$$A(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Note a semelhança entre a fórmula de área da superfície na Equação 3 e a fórmula do comprimento de arco da Seção 8.1 (Volume I):

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}} \, dx$$

EXEMPLO 1  $\Box$  Determine a área de superfície da parte da superfície  $z = x^2 + 2y$  que está acima da região triangular T no plano xy com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1).

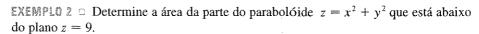
SOLUÇÃO A região T é mostrada na Figura 3 e descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x\}$$

Usando a Fórmula 2 com  $f(x, y) = x^2 + 2y$ , obtemos

$$A = \iint_{T} \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1} \, dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \sqrt{4x^2 + 5} \, dy \, dx$$
$$= \int_{0}^{1} x \sqrt{4x^2 + 5} \, dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4x^2 + 5)^{3/2} \Big]_{0}^{1} = \frac{1}{12} (27 - 5\sqrt{5})$$

A Figura 4 mostra a porção da superfície cuja área acabamos de calcular.



SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide no círculo  $x^2 + y^2 = 9$ , z = 9. Portanto a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 5). Usando a Fórmula 3, temos

$$A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA$$
$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{8} \sqrt{1 + 4r^2} \, (8r) \, dr$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big]_0^3 = \frac{\pi}{6} \left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

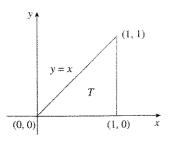
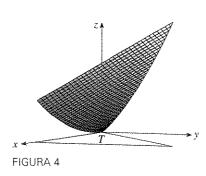


FIGURA 3



D 3 FIGURA 5

# 15.6 Exercícios

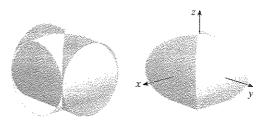
1-12 Determine a área da superfície.

- 1. A parte do plano z = 2 + 3x + 4y que está acima do retângulo  $[0, 5] \times [1, 4]$
- 2. A parte do plano 2x + 5y + z = 10 que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 9$
- 3. A parte do plano 3x + 2y + z = 6 que está no primeiro octante
- 4. A parte da superfície  $z = 1 + 3x + 2y^2$  que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (0, 1) e (2, 1)
- 5. A parte do cilindro  $y^2 + z^2 = 9$  que está acima do retângulo com vértices, (0, 0), (4, 0), (0, 2) e (4, 2)
- **6.** A parte do parabolóide  $z = 4 x^2 y^2$  que está acima do plano xy
- 7. A parte do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 x^2$  que está entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$
- **8.** A superfície  $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2}), \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$
- **9.** A parte da superfície z = xy que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$
- **10.** A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está acima do plano z = 1
- 11. A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = ax$  e acima do plano xy
- 12. A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  que está dentro do parabolóide  $z = x^2 + y^2$

13-14 Determine a área de superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando a área em termos de integral de função de uma variável real e use sua calculadora para estimar o valor da integral.

- 13. A parte da superfície  $z=e^{-x^2-y^2}$  que está acima do círculo  $x^2+y^2 \le 4$
- **14.** A parte da superfície  $z = \cos(x^2 + y^2)$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
- **15.** (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área da superfície da porção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que está acima do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área da superfície da parte (a) com precisão de quatro casas decimais. Compare com sua resposta para a parte (a).

- **16.** (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas com m = n = 2 para estimar a área da superfície  $z = xy + x^2 + y^2$ ,  $0 \le x \le 2$ ,  $0 \le y \le 2$ .
- (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área da superfície da parte (a) com precisão de quatro casas decimais. Compare com sua resposta para a parte (a).
- 17. Determine a área exata da superfície  $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$ ,  $1 \le x \le 4$ ,  $0 \le y \le 1$ .
- **18.** Determine a área exata da superfície  $z = 1 + x + y + x^2$   $-2 \le x \le 1$ ,  $-1 \le y \le 1$  Ilustre traçando o gráfico da superfície.
- 19. Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície  $z = 1 + x^2y^2$  que está acima do disco  $x^2 + y^2 \le 1$ .
- **20.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície  $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$  que está acima do quadrado  $|x| + |y| \le 1$ . Ilustre, traçando o gráfico da superfície.
  - 21. Mostre que a área da parte da superfície do plano z = ax + by + c com projeção sobre a região D no plano xy com área A(D) é  $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$  A(D).
  - 22. Se você tentar utilizar a Fórmula 2 para determinar a área do topo superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , terá problemas, porque a integral dupla é imprópria. De fato, o integrando tem uma descontinuidade infinita em todo ponto da fronteira circular  $x^2 + y^2 = a^2$ . Entretanto, a integral pode ser calculada sobre o disco  $x^2 + y^2 \le t^2$  como  $t \to a^-$ . Use esse método para mostrar que a área da esfera de raio  $a \in 4\pi a^2$ .
  - 23. Determine a área da parte do parabolóide  $y = x^2 + z^2$  cortada pelo plano y = 25. [Dica: Projete a superfície sobre o plano xz.]
  - **24.** A figura mostra a superfície criada quando o cilindro  $y^2 + z^2 = 1$  intercepta o cilindro  $x^2 + z^2 = 1$ . Determine a área dessa superfície.

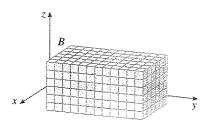


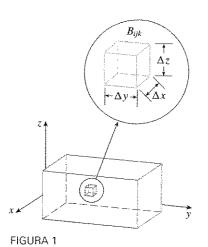
# 15.7

# Integrais Triplas

Assim como definimos integrais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas, para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, \ c \le y \le d, \ r \le z \le s\}$$





O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo [a, b] em l subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de comprimentos iguais  $\Delta x$ , dividindo [c, d] em m subintervalos de comprimentos  $\Delta y$ , e dividindo [r, s] em n subintervalos de comprimento  $\Delta z$ . Os planos através dos pontos terminais desses subintervalos paralelos aos planos coordenados subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume  $\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ .

Assim formamos a soma tripla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*}) \Delta V$$

onde o ponto amostra  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$  está em  $B_{ijk}$ . Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em (2).

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) \ dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*}) \ \Delta V$$

se o limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto amostra como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto  $(x_i, y_j, z_k)$ , obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_{B} f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{i}, y_{j}, z_{k}) \Delta V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada como segue.

Teorema de Fubini para as Integrals Triplas Se f é contínua em uma caixa retangular  $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ , então

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) dV = \int_{r}^{s} \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y, z) dx dy dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e finalmente em relação a z. Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo: se primeiro integrarmos em relação a y, então em relação a z e depois a x, teremos

$$\iiint\limits_R f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

EVERGELO V II Calcule a integral tripla  $\iiint_B xyz^2 dV$ , onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

$$\iiint_{B} xyz^{2} dV = \int_{0}^{3} \int_{-1}^{2} \int_{0}^{1} xyz^{2} dx dy dz = \int_{0}^{3} \int_{-1}^{2} \left[ \frac{x^{2}yz^{2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz$$
$$= \int_{0}^{3} \int_{-1}^{2} \frac{yz^{2}}{2} dy dz = \int_{0}^{3} \left[ \frac{y^{2}z^{2}}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$
$$= \int_{0}^{3} \frac{3z^{2}}{4} dz = \frac{z^{3}}{4} \int_{0}^{3} = \frac{27}{4}$$

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada genérica** E no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E. Por definição,

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) \, dV = \iiint\limits_B F(x, y, z) \, dV$$

Essa integral existe se f for contínua e na fronteira de E for "razoavelmente lisa". A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

Vamos restringir nossa atenção às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita ser do **tipo 1** se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y, ou seja,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy, como mostrado na Figura 2. Note que a fronteira superior do sólido E é a superfície de equação  $z = u_2(x, y)$ , enquanto a fronteira inferior é a superfície  $z = u_1(x, y)$ .

Pelos mesmos argumentos que nos levaram a (15.3.3), podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_i(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos, e assim  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  são vistas como constantes, enquanto f(x, y, z) é integrada em relação a z.

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, \ g_1(x) \le y \le g_2(x), \ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

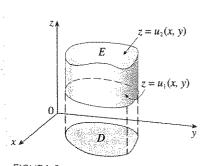
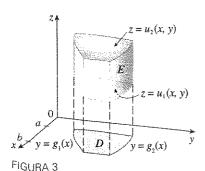


FIGURA 2 Uma região sólida do tipo 1



Uma região sólida do tipo 1

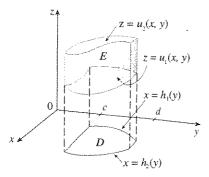
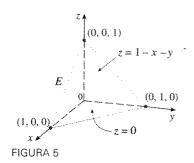


FIGURA 4
Outra região sólida do tipo 1



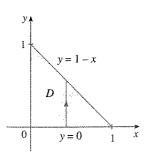
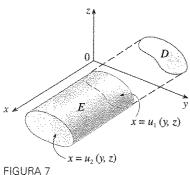


FIGURA 6



Uma região do tipo 2

e a Equação 6 fica

$$\iiint_E f(x, y, z) \ dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \ dz \ dy \ dx$$

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \le y \le d, \ h_1(y) \le x \le h_2(y), \ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 fica

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Calcule  $\iiint_E z \, dV$ , onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos x = 0, y = 0, z = 0 e x + y + z = 1.

SOLUÇÃO Para montarmos a integral tripla, é recomendável desenhar dois diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano z=0 e a superior é o plano x+y+z=1 (ou z=1-x-y), e então usamos  $u_1(x,y)=0$  e  $u_2(x,y)=1-x-y$  na Fórmula 7. Note que os planos x+y+z=1 e z=0 se interceptam na reta x+y=1 (ou y=1-x) no plano xy. Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 - x, \ 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\iiint_E z \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ -\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 \, dx = \frac{1}{6} \left[ -\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Uma região sólida E é do tipo 2 se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é  $x = u_1(y, z)$ , e a superfície da frente é  $x = u_2(y, z)$ , e temos

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dV = \iint\limits_D \left[ \int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

Finalmente, uma região do tipo 3 é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, \ u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\}\$$

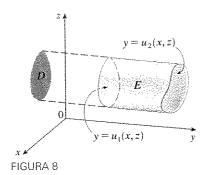
onde D é a projeção de E sobre o plano xz,  $y = u_1(x, z)$  é a superfície da esquerda, e  $y = u_2(x, z)$  é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

$$\iiint\limits_E f(x,y,z) \ dV = \iint\limits_D \left[ \int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z) \ dy \right] dA$$

Em cada uma das Equações 10 e 11 podem existir duas possíveis expressões para a integral dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 — Calcule  $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2} \, dV$ , onde E é a região limitada pelo parabolóide  $y=x^2+z^2$  e pelo plano y=4.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção  $D_1$  sobre o plano xy, que é a região parabólica da Figura 10. (O traço de  $y=x^2+z^2$  no plano z=0 é a parábola  $y=x^2$ .)



Uma região do tipo 3

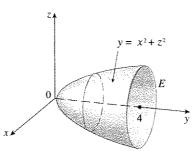


FIGURA 9

Região de integração

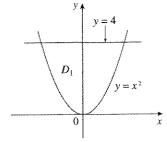


FIGURA 10

Projeção sobre o plano xy

De  $y = x^2 + z^2$  obtemos  $z = \pm \sqrt{y - x^2}$ , e então a superfície fronteira debaixo de E é  $z = -\sqrt{y - x^2}$ , e a superfície de cima é  $z = \sqrt{y - x^2}$ . Portanto a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \le x \le 2, \ x^2 \le y \le 4, \ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\}$$

e obtemos

$$\iiint\limits_{E} \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Vamos, em vez disso, considerar E como região do tipo 3. Como tal, sua projeção  $D_3$  sobre o plano xz é o disco  $x^2 + z^2 \le 4$  mostrado na Figura 11.

Então a superfície lateral esquerda de E é o parabolóide  $y=x^2+z^2$  e a superfície lateral direita é o plano y=4. Assim, tomando  $u_1(x,z)=x^2+z^2$  e  $u_2(x,z)=4$  na Equação 11, temos

$$\iiint_{E} \sqrt{x^{2} + z^{2}} \, dV = \iint_{D_{1}} \left[ \int_{x^{2} + z^{2}}^{4} \sqrt{x^{2} + z^{2}} \, dy \right] dA$$
$$= \iint_{D_{1}} (4 - x^{2} - z^{2}) \sqrt{x^{2} + z^{2}} \, dA$$

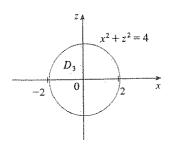


FIGURA 11
Projeção sobre o plano xz

☐ A maior dificuldade no cálculo de uma integral tripla é estabelecer a expressão para a região de integração (como na Equação 9 do Exemplo 2). Lembre-se de que os limites de integração da integral de dentro contêm no máximo duas variáveis, os limites de integração da integral do

meio contêm no máximo uma variável, e os limites de integração de fora

precisam ser constantes

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-z^2) \sqrt{x^2+z^2} \, dz \, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz:  $x = r\cos\theta$ ,  $z = r\sin\theta$ . O que nos dá

$$\iiint_{E} \sqrt{x^{2} + z^{2}} \, dV = \iint_{D_{3}} (4 - x^{2} - z^{2}) \sqrt{x^{2} + z^{2}} \, dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} (4 - r^{2}) r \, r \, dr \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{2} (4r^{2} - r^{4}) \, dr$$

$$= 2\pi \left[ \frac{4r^{3}}{3} - \frac{r^{5}}{5} \right]_{0}^{2} = \frac{128\pi}{15}$$

## Aplicações da Integral Tripla

Lembre-se de que, se  $f(x) \ge 0$ , então a integral  $\int_a^b f(x) \, dx$  representa a área abaixo da curva y = f(x) de a até b, e se  $f(x,y) \ge 0$ , então a integral dupla  $\iint_D f(x,y) \, dA$  representa o volume sob a superfície z = f(x,y) acima de D. A interpretação correspondente para a integral tripla  $\iiint_E f(x,y,z) \, dV$ , onde  $f(x,y,z) \ge 0$ , não é muito útil, porque seria um "hipervolume" de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o domínio da função f; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla  $\iiint_E f(x,y,z) \, dV$  pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e f(x, y, z).

Vamos começar com o caso especial onde f(x, y, z) = 1 para todos os pontos em E. Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E:

$$V(E) = \iiint_E dV$$

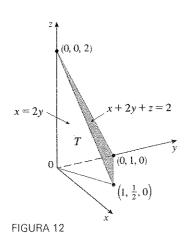
Por exemplo: você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando f(x, y, z) = 1 na Fórmula 6:

$$\iiint_{E} 1 \, dV = \iint_{D} \left[ \int_{u_{1}(x, y)}^{u_{2}(x, y)} dz \right] dA = \iint_{D} \left[ u_{2}(x, y) - u_{1}(x, y) \right] dA$$

e, da Seção 15.3, sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies  $z = u_1(x, y)$  e  $z = u_2(x, y)$ .

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Utilize uma integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0 e z = 0.

SOLUÇÃO O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy estão mostrados nas Figuras 12 e 13. A fronteira inferior de T é o plano z=0, e a superior é o plano x+2y+z=2, ou seja, z=2-x-2y. Portanto, temos



x + 2y = 2  $(ou y = 1 - \frac{x}{2})$   $y = \frac{x}{2}$  1 x + 2y = 2  $(1, \frac{1}{2})$  x + 2y = 2 1

FIGURA 13

$$V(T) = \iiint_{T} dV = \int_{0}^{1} \int_{x/2}^{1-x/2} \int_{0}^{2-x-2y} dz \ dy \ dx$$
$$= \int_{0}^{1} \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \ dy \ dx = \frac{1}{3}$$

pelo mesmo cálculo usado no Exemplo 4 da Seção 15.3.

(Note que não é necessário usar a integral tripla para calcular volumes. Elas simplesmente fornecem um método alternativo para estabelecer os cálculos.)

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo: se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é  $\rho(x, y, z)$ , em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z), então sua **massa** é

$$m = \iiint_{\mathcal{E}} \rho(x, y, z) \, dV$$

e seus momentos em relação aos três planos coordenados são

$$M_{yz} = \iiint_{E} x \rho(x, y, z) dV \qquad M_{xz} = \iiint_{E} y \rho(x, y, z) dV$$

$$M_{xy} = \iiint_{E} z \rho(x, y, z) dV$$

O centro de massa está localizado no ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centróide** de *E*. Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$I_{x} = \iiint_{E} (y^{2} + z^{2})\rho(x, y, z) dV \qquad I_{y} = \iiint_{E} (x^{2} + z^{2})\rho(x, y, z) dV$$

$$I_{z} = \iiint_{E} (x^{2} + y^{2})\rho(x, y, z) dV$$

Como na Seção 15.5, a carga elétrica total sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga  $\sigma(x, y, z)$  é

$$Q = \iiint\limits_E \sigma(x, y, z) \, dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z, sua função densidade conjunta é uma função das três variáveis tal que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_{E} f(x, y, z) \ dV$$

Em particular,

$$P(a \le X \le b, \ c \le Y \le d, \ r \le Z \le s) = \int_a^b \int_a^d \int_r^s f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

1027

2.3

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \ge 0$$
 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dy dx = 1$$

EXEMPLO 5  $\equiv$  Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico  $x = y^2$  e pelos planos x = z, z = 0 e x = 1.

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy estão mostrados na Figura 14. As superfícies inferior e superior de E são os planos z=0 e z=x, e então descrevemos E como uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le y \le 1, \ y^2 \le x \le 1, \ 0 \le z \le x\}$$

Então, se a densidade é  $\rho(x, y, z) = \rho$ , a massa é

$$m = \iiint_{E} \rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^{2}}^{1} \int_{0}^{x} \rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^{2}}^{1} x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^{2}}{2} \right]_{x=y^{2}}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^{4}) \, dy = \rho \int_{0}^{1} (1 - y^{4}) \, dy$$

$$= \rho \left[ y - \frac{y^{5}}{5} \right]_{0}^{1} = \frac{4\rho}{5}$$

Por causa da simetria de E e  $\rho$  em relação ao plano xz, podemos dizer imediatamente que  $M_{xz}=0$  e, portanto,  $\bar{y}=0$ . Os outros momentos são

 $M_{yz} = \iiint x\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} x\rho \, dz \, dx \, dy$ 

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^{1}}^{1} x^{2} dx dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^{3}}{3} \right]_{x=y^{2}}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^{6}) dy = \frac{2\rho}{3} \left[ y - \frac{y^{7}}{7} \right]_{0}^{1} = \frac{4\rho}{7}$$

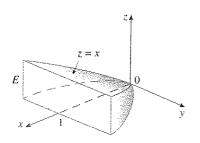
$$M_{xy} = \iiint_{E} z\rho dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^{2}}^{1} \int_{0}^{x} z\rho dz dx dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^{2}}^{1} \left[ \frac{z^{2}}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^{2}}^{1} x^{2} dx dy$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^{6}) dy = \frac{2\rho}{7}$$

 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$ 

Logo, o centro de massa é



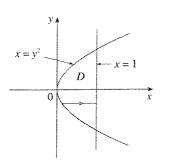


FIGURA 14

### Exercícios

- 1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a z, depois x e então y.
- **2.** Calcule a integral  $\iiint_F (xz y^3) dV$ , onde  $E = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3-5 □ Calcule a integral iterada.

3. 
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz \, dy \, dx \, dz$$

**4.** 
$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz \, dz \, dy \, dx$$

**5.** 
$$\int_{0}^{3} \int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-z^{2}}} ze^{y} dx dz dy$$

**5.** 
$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^y \, dx \, dz \, dy$$
 **6.** 
$$\int_0^1 \int_0^7 \int_0^y z e^{-y^2} \, dx \, dy \, dz$$

7-16 □ Calcule a integral tripla.

7. 
$$\iiint_E 2x \, dV$$
, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le y \le 2, \ 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2}, \ 0 \le z \le y\}$$

**8.** 
$$\iiint_E yz \cos(x^5) dV$$
, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x, \ x \le z \le 2x\}$$

- **9.**  $\iiint_E 6xy \, dV$ , onde E está abaixo do plano z = 1 + x + y e acima da região do plano xy limitada pelas curvas  $y = \sqrt{x}$ ,
- **10.**  $\iiint_E y \, dV$ , onde E é limitado pelos planos x = 0, y = 0, z = 0e 2x + 2y + z = 4
- 11.  $\iiint_E xy \, dV$ , onde E é o sólido tetraedro com vértices (0, 0, 0),  $(1, 0, 0), (0, 2, 0) \in (0, 0, 3)$
- 12.  $\iiint_E xz \, dV$ , onde E é o sólido tetraedro com vértices (0, 0, 0),  $(0, 1, 0), (1, 1, 0) \in (0, 1, 1)$
- **13.**  $\iiint_E x^2 e^y dV$ , onde E é limitado pelo cilindro parabólico  $z = 1 - y^2$  e pelos planos z = 0, x = 1, and x = -1
- **14.**  $\iiint_E (x + 2y) dV$ , onde E é limitado pelo cilindro parabólico  $y = x^2$  e pelos planos x = z, x = y e z = 0
- **15.**  $\iiint_E x \, dV$ , onde E é limitado pelo parabolóide  $x = 4y^2 + 4z^2$  e pelo plano x = 4
- **16.**  $\iiint_E z \, dV$ , onde E é limitado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 9$  e pelos planos x = 0, y = 3x e z = 0 no primeiro octante

17-20 🗆 Use a integral tripla para determinar o volume do sólido

- O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano 2x + y + z = 4
- O sólido limitado pelo cilindro  $y = x^2$  e pelos planos z = 0, z = 4, e y = 9
- **19.** O sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  e pelos planos y + z = 5 e z = 1
- O sólido limitado pelo parabolóide  $x = y^2 + z^2$  e pelo plano x = 16

- (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortado do cilíndro  $y^2 + z^2 = 1$  pelos planos y = x e x = 1 como uma integral tripla.
  - (b) Utilize a Tabela de Integrais (na contracapa) ou um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).
- 22. (a) Na Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla sobre uma caixa B, onde f(x, y, z) é calculada no centro  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$  da caixa  $\bar{B}_{ijk}$ . Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar  $\iiint_B e^{-x^2-y^2-z^2} dV$ , onde B é o cubo definido por  $0 \le x \le 1$ ,  $0 \le y \le 1$ ,  $0 \le z \le 1$ . Divida B em oito cubos de igual tamanho.
- (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão de até duas casas decimais. Compare com a resposta da parte (a).

23-24 🗆 Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 22) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

**23.** 
$$\iiint_B \frac{1}{\ln(1+x+y+z)} dV$$
, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 8, \ 0 \le z \le 4\}$$

24 III 
$$sen(rv^2z^3) dV$$
 and

**24.** 
$$\iiint_B \operatorname{sen}(xy^2z^3) dV$$
, onde  $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 2, \ 0 \le z \le 1\}$ 

25-25 🗆 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

**25.** 
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy \, dz \, dx$$
 **26.** 
$$\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dy$$

**26.** 
$$\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dz$$

27-30  $\square$  Expresse a integral  $\iiint_E f(x, y, z) dV$  como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

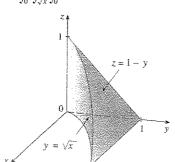
**27.** 
$$x^2 + z^2 = 4$$
,  $y = 0$ ,  $y = 6$ 

**28.** 
$$z = 0$$
,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $z = y - 2x$   
**29.**  $z = 0$ ,  $z = y$ ,  $x^2 = 1 - y$ 

**29.** 
$$z = 0$$
,  $z = v$ ,  $x^2 = 1 - v$ 

**30.** 
$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

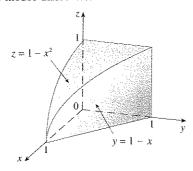
$$\int_{0}^{1} \int_{c_{0}}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$



32. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.



33-34  $\odot$  Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

- 33.  $\int_0^1 \int_1^1 \int_0^y f(x, y, z) dz dx dy$
- **34.**  $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

35–38  $\Box$  Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com a função densidade dada  $\rho$ .

- **35.**  $E \neq 0$  sólido do Exercício 9;  $\rho(x, y, z) = 2$
- **36.** E é limitado pelo cilindro parabólico  $z = 1 y^2$  e pelos planos x + z = 1, x = 0 e z = 0;  $\rho(x, y, z) = 4$
- 31.  $E \notin o$  cubo dado por  $0 \le x \le a$ ,  $0 \le y \le a$ ,  $0 \le z \le a$ ;  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- **38.**  $E \notin 0$  tetraedro limitado pelos planos x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1;  $\rho(x, y, z) = y$

39-40 🗆 Estabeleça, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

- **39.** O sólido do Exercício 19;  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **40.** O hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ ,  $z \ge 0$ ;  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- 41. Seja E um sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e pelos planos y = z, x = 0 e z = 0 com função densidade  $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$ . Use um sistema computacional algébrico para determinar os valores exatos das

seguintes quantidades para E.

- (a) A massa
- (b) O centro de massa
- (c) O momento de inércia em relação ao eixo z
- **42.** Se E é o sólido do Exercício 16 com função densidade  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ , determine as seguintes quantidades, com precisão de três decimais.
  - (a) A massa
  - (b) O centro de massa
  - (c) O momento de inércia em relação ao eixo z
  - 43. Determine os momentos de inércia para um cubo com densidade constante k e lados de comprimento L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.
  - 44. Determine os momentos de inércia do tijolo retangular de dimensões a, b e c, massa M e densidade constante se o centro do tijolo está na origem e suas arestas são paralelas aos eixos coordenados.
  - **45.** A função densidade conjunta de variáveis aleatórias X,  $Y \in Z$  é f(x, y, z) = Cxyz se  $0 \le x \le 2$ ,  $0 \le y \le 2$ ,  $0 \le z \le 2$  e f(x, y, z) = 0 em caso contrário.
    - (a) Determine o valor da constante C.
    - (b) Determine  $P(X \le 1, Y \le 1, Z \le 1)$ .
    - (c) Determine  $P(X + Y + Z \le 1)$ .
  - **46.** Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta  $f(x, y, z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$  se  $x \ge 0$ ,  $y \ge 0$ ,  $z \ge 0$  e f(x, y, z) = 0 em caso contrário.
    - (a) Determine o valor da constante C.
    - (b) Determine  $P(X \le 1, Y \le 1)$ .
    - (c) Determine  $P(X \le 1, Y \le 1, Z \le 1)$ .

47-48 □ O valor médio de uma função f(x, y, z) sobre uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) \ dV$$

onde V(E) é o volume de E. Por exemplo: se  $\rho$  é a função densidade, então  $\rho_{\rm méd}$  é a densidade média de E.

- Determine o valor médio da função f(x, y, z) = xyz sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas pararelas aos eixos coordenados.
- **48.** Ache o valor médio da função  $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$  sobre a região delimitada pelo parabolóide  $z = 1 x^2 y^2$  e pelo plano z = 0.
- 49. Determine a região E para a qual a integral

$$\iint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2) \, dV$$

é máxima.

### Projeto Descebeca:

### Volumes de Hiperesferas

Nesse projeto determinaremos as fórmulas para o volume contido em uma hiperesfera em um espaço n-dimensional.

- 1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r.
- 2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de
- 3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume contido na hiperesfera  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$  em  $\mathbb{R}^4$ . (Use somente a substituição trigonométrica e a redução das formulas para  $\int \sin^n x \, dx$  ou  $\int \cos^n x \, dx$ .)
- 4. Use uma integral n-upla para determinar o volume contido em uma hiperesfera de raio r no espaço n-dimensional  $\mathbb{R}^n$ . [Dica: as fórmulas para n par e para n impar são diferentes.]

#### 15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Vimos na Seção 15.4 que algumas integrais duplas são mais simples de calcular usando coordenadas polares. Nesta seção, veremos que algumas integrais triplas são mais simples de calcular utilizando coordenadas polares ou esféricas.

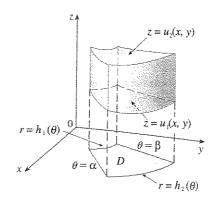
### Coordenadas Cilíndricas

Lembre-se da Seção 12.7 que as coordenadas cilíndricas de um ponto P eram  $(r, \theta, z)$ , onde r,  $\theta$  e z estão mostrados na Figura 1. Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 2). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}\$$



 $P(r, \theta, z)$ 

FIGURA 1

1031

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\iiint_F f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 1 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

A Fórmula 2 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z,  $r \in \theta$ , e trocando dV por  $r dz dr d\theta$ . (A Figura 3 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E é uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas, e especialmente quando a função f(x, y, z) envolve expressões  $x^2 + y^2$ .

EXEMPLE 1 = Um sólido E está contido no cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , abaixo do plano z = 4 e acima do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  (veja a Figura 4). A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas o cilindro é r=1 e o parabolóide é  $z=1-r^2$ , e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1, \ 1 - r^2 \le z \le 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr) \, r \, dz \, dr \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2 [4 - (1 - r^2)] \, dr \, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) \, dr$$
$$= 2\pi K \left[ r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLE 2 = Calcule 
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) dz dy dx$$
.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, -2 \le x \le 2, \,\, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \,\, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \right\}$$

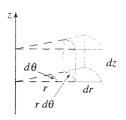


FIGURA 3

Elemento de volume em coordenadas cilíndricas:  $dV = r dz dr d\theta$ 

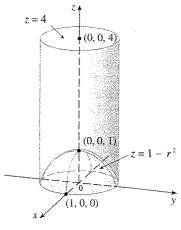


FIGURA 4

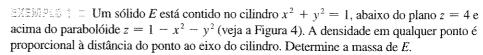
Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 1 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\iiint_{E} f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_{1}(\theta)}^{h_{2}(\theta)} \int_{u_{1}(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_{2}(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

A Fórmula 2 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$  e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z,  $r \in \theta$ , e trocando dV por  $r\,dz\,dr\,d\theta$ . (A Figura 3 mostra como se lembrar disso.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E é uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas, e especialmente quando a função f(x, y, z) envolve expressões  $x^2 + y^2$ .



SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas o cilindro é r=1 e o parabolóide é  $z=1-r^2$ , e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1, \ 1 - r^2 \le z \le 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$m = \iiint_{E} K\sqrt{x^{2} + y^{2}} dV = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{1-r^{2}}^{4} (Kr) r dz dr d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} Kr^{2} [4 - (1 - r^{2})] dr d\theta = K \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} (3r^{2} + r^{4}) dr$$

$$= 2\pi K \left[ r^{3} + \frac{r^{5}}{5} \right]_{0}^{1} = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 2 = Calcule 
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2) \, dz \, dy \, dx$$
.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{ (x, y, z) \, \middle| \, -2 \le x \le 2, \, \, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \, \, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \right\}$$

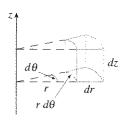


FIGURA 3

Elemento de volume em coordenadas cilíndricas:  $dV = r dz dr d\theta$ 

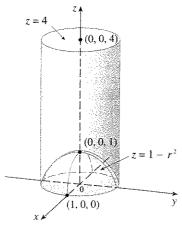


FIGURA 4

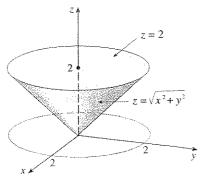


FIGURA 5

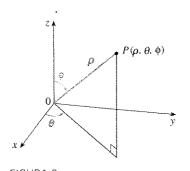


FIGURA 6 Coordenadas esféricas de *P* 

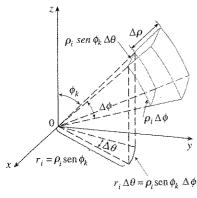


FIGURA 7

e a projeção de *E* sobre o plano xy é o disco  $x^2 + y^2 \le 4$ . A superfície inferior de *E* é o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e a superfície superior é o plano z = 2. Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le r \le 2, \ r \le z \le 2\}$$

Portanto temos

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^{2}}}^{\sqrt{4-x^{2}}} \int_{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}^{2} (x^{2}+y^{2}) dz dy dx = \iiint_{E} (x^{2}+y^{2}) dV = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r}^{2} r^{2} r dz dr d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{2} r^{3} (2-r) dr = 2\pi \left[ \frac{1}{2} r^{4} - \frac{1}{5} r^{5} \right]_{0}^{2} = \frac{16}{5} \pi$$

### Coordenadas Esféricas

Na Seção 12.7, definimos as coordenadas esféricas ( $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) de um ponto (veja a Figura 6) e demonstramos as seguintes relações entre coordenadas retangulares e coordenadas esféricas:

[3] 
$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = \rho \cos \phi$ 

Nesse sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma cunha esférica

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \ \alpha \le \theta \le \beta, \ c \le \phi \le d\}$$

onde  $a \ge 0$ ,  $\beta - \alpha \le 2\pi$ , e  $d - c \le \pi$ . Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas  $E_{ijk}$  por meio de esferas igualmente espaçadas  $\rho = \rho_i$ , semiplanos  $\theta = \theta_i$  e semicones  $\phi = \phi_k$ . A Figura 7 mostra que  $E_{ijk}$  é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões  $\Delta \rho$ ,  $\rho_i \Delta \phi$  (arco de circunferência de raio  $\rho_i$  e ângulo  $\Delta \phi$ ) e  $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \Delta \theta$  (arco de circunferência de raio  $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k$ , e ângulo  $\Delta \theta$ ). Logo, uma aproximação do volume de  $E_{ijk}$  é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta \rho)(\rho_i \Delta \phi)(\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \Delta \theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 39), que o valor exato do volume de  $E_{ijk}$  é dado por

$$\Delta V_{iik} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

onde  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$  é algum ponto do interior de  $E_{ijk}$ . Seja  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$  as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\iiint_{E} f(x, y, z) \ dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*}) \ \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_{i} \operatorname{sen} \tilde{\phi}_{k} \cos \tilde{\theta}_{j}, \tilde{\rho}_{i} \operatorname{sen} \tilde{\phi}_{k} \operatorname{sen} \tilde{\theta}_{j}, \tilde{\rho}_{i} \cos \tilde{\phi}_{k}) \tilde{\rho}_{i}^{2} \operatorname{sen} \tilde{\phi}_{k} \Delta \rho_{i} \Delta \theta_{j} \Delta \phi_{k}$$

Mas essa soma é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

Consequentemente, chegamos à seguinte fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas:

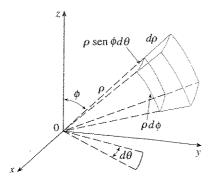


FIGURA 8

Elemento de volume em coordenadas esféricas:  $dV = \rho^2$  sen  $\phi d\rho d\theta d\phi$ 

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

$$= \int_c^d \int_a^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{ (\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \ \alpha \le \theta \le \beta, \ c \le \phi \le d \}$$

A Fórmula 4 nos diz que convertemos uma integral tripla de coordenadas retangulares para as coordenadas esféricas, escrevendo

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = \rho \cos \phi$ 

utilizando os limites de integração apropriados e substituindo dV por  $\rho^2$  sen  $\phi d\rho d\theta d\phi$ . Isso é ilustrado na Figura 8.

Podemos esperar que essa fórmula inclua regiões esféricas mais gerais como

$$E = \{ (\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ c \leq \phi \leq d, \ g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi) \}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que (4), exceto que os limites de integração para  $\rho$  são  $g_1(\theta, \phi)$  e  $g_2(\theta, \phi)$ .

Normalmente as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.

EXEMPLO 3  $\Box$  Calcule  $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ , onde  $B \notin a$  bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

SOLUÇÃO Como a fronteira de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{ (\rho, \theta, \phi) \, \big| \, 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \phi \le \pi \}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Então, (4) temos

$$\iiint_{B} e^{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}} dV = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} e^{(\rho^{2})^{3/2}} \rho^{2} \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} \rho^{2} e^{\rho^{3}} d\rho$$

$$= \left[ -\cos \phi \right]_{0}^{\pi} (2\pi) \left[ \frac{1}{3} e^{\rho^{3}} \right]_{0}^{1} = \frac{4}{3} \pi (e - 1)$$

NOTA  $\ \square$  Seria extremamente desvantajoso calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares a integral iterada seria

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$$

EXEMPLO 4 5 Utilize as coordenadas esféricas para determinar o volume de um sólido que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e abaixo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  (veja a Figura 9).

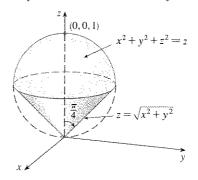


FIGURA 9

A Figura 10 mostra uma visão diferente (desta vez, utilizamos o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

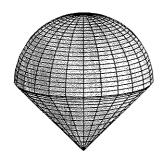


FIGURA 10

SOLUÇÃO Note que a esfera passa pela origem e tem centro em  $(0, 0, \frac{1}{2})$ . Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{ou} \qquad \rho = \cos \phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

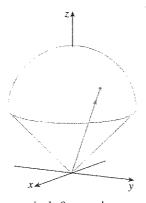
$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi\sin^2\theta} = \rho\sin\phi$$

Ou seja, sen  $\phi = \cos \phi$ , ou  $\phi = \pi/4$ . Portanto a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

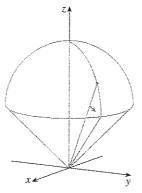
$$E = \{ (\rho, \, \theta, \, \phi) \, \big| \, 0 \le \theta \le 2\pi, \, \, 0 \le \phi \le \pi/4, \, \, 0 \le \rho \le \cos \phi \}$$

A Figura 11 mostra como E é varrido se integramos primeiro em relação a  $\rho$ , depois em relação a  $\phi$ , e então em relação a  $\theta$ . O volume de E é

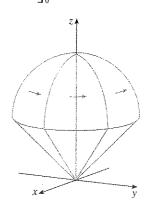
$$V(E) = \iiint_{E} dV = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{\cos \phi} \rho^{2} \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\pi/4} \sin \phi \left[ \frac{\rho^{3}}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$
$$= \frac{2\pi}{3} \int_{0}^{\pi/4} \sin \phi \cos^{3}\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[ -\frac{\cos^{4}\phi}{4} \right]_{0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$



 $\rho$  varia de 0 a cos  $\phi$ , enquanto FIGURA 11  $\phi$  e  $\theta$  ficam constantes.



 $\phi$  varia de 0 a  $\pi/4$ , enquanto  $\theta$  fica constante.



 $\theta$  varia de 0 a  $2\pi$ .

1-4 🗆 Paça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

1. 
$$\int_{0}^{4} \int_{0}^{2\pi} \int_{r}^{4} r \, dz \, d\theta \, dr$$

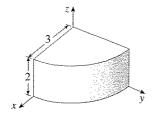
2. 
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

3. 
$$\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \ d\rho \ d\theta \ d\phi$$
 4.  $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}_{\mathbf{i}} \phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$ 

$$4. \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

5-5 □ Estabeleça a integral tripla de uma função contínua arbitrária f(x, y, z) em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

5.



7-16 Utilize as coordenadas cilíndricas.

- 7. Calcule  $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$ , onde E é a região contida dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  e entre os planos z = -5 e z = 4.
- **8.** Calcule  $\iiint_E (x^3 + xy^2) dV$ , onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ .
- 9. Calcule  $\iiint_E e^z dV$ , onde E está delimitado pelo parabolóide  $z = 1 + x^2 + y^2$ , pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 5$  e pelo plano xy.
- **10.** Calcule  $\iiint_E x \, dV$ , onde E está delimitado pelos planos z = 0e z = x + y + 3, pelos cilindros  $x^2 + y^2 = 4 e x^2 + y^2 = 9$ .
- **11.** Calcule  $\iiint_E x^2 dV$ , onde E é o sólido que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , acima do plano z = 0 e abaixo do cone  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ .
- 12. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro  $x^{2} + y^{2} = 1$  como da esfera  $x^{2} + y^{2} + z^{2} = 4$ .
- 13. (a) Ache o volume da região E limitada pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$ .
  - (b) Encontre o centróide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).
- **14.** (a) Determine o volume do sólido que o cilindro  $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
  - (b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.
- 15. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide  $z = 4x^2 + 4y^2$  e pelo plano z = a (a > 0) se S tem densidade constante K.

**16.** Determine a massa da bola B dada por  $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$  se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância

17-28 🗆 Utilize as coordenadas esféricas.

- Calcule  $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , onde  $B \in a$  bola unitária  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ .
- **18.** Calcule  $\iiint_H (x^2 + y^2) dV$ , onde H é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- **19.** Calcule  $\iiint_E z \, dV$ , onde E está contido entre as esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  no primeiro octante.
- **20.** Calcule  $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$ , onde E é delimitado pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  no primeiro octante.
- 21. Calcule  $\iiint_E x^2 dV$ , onde E é limitado pelo plano xz e os hemisférios  $y = \sqrt{9 x^2 z^2}$  e  $y = \sqrt{16 x^2 z^2}$ .
- **22.** Calcule  $\iiint_E xyz \ dV$ , onde E está entre as esferas  $\rho = 2$  e  $\rho = 4$ e acima do cone  $\phi = \pi/3$ .
- 23. Determine o volume do sólido que está acima do cone  $\phi = \pi/3$  e abaixo da esfera  $\rho = 4\cos\phi$ .
- 24. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , acima do plano xy e abaixo do cone
- 25. Determine o centróide do sólido do Exercício 21.
- 26. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
  - (a) Determine a massa de H.
  - (b) Determine o centro de massa de H.
  - (c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu
- 27. (a) Determine o centróide do hemisfério sólido homogêneo de
  - (b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação ao diâmetro de sua base.
- 28. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância à base.

29-32 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

- 29. Determine o volume e o centróide do sólido E que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e abaixo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- 30. Determine o volume da menor cunha esférica de uma esfera de raio a cortada por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de  $\pi/6$ .

- 31. Calcule  $\iiint_E z \, dV$ , onde E está acima do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e abaixo do plano z = 2y. Utilize a Tabela de Integrais (veja a *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para calcular a integral.
- **32.** (a) Determine o volume contido pelo toro  $\rho = \text{sen } \phi$ .
  - (b) Utilize um computador para desenhar o toro.

38-34 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

**33.** 
$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^3-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dz dy dx$$

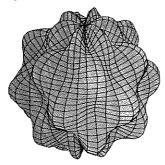
**34.** 
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, dz \, dx \, dy$$

35-36 : Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

**35.** 
$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

**36.** 
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) \, dz \, dx \, dy$$

37. No Projeto de Laboratório do Capítulo 12, investigamos a família de superfícies  $\rho=1+\frac{1}{5}\operatorname{sen} m\theta\operatorname{sen} n\phi$  que foram usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com m=6 e n=5 está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



38. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz = 2\pi$$

- (A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio aumenta indefinidamente.)
- **39.** (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera  $r^2 + z^2 = a^2$  e por baixo pelo cone  $z = \cot \phi_0$  (ou  $\phi = \phi_0$ ), onde  $0 < \phi_0 < \pi/2$ , é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \cos \phi_0\right)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por  $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$ ,  $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ ,  $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$  é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi} \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

onde 
$$\tilde{\rho}$$
 está entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ,  $\tilde{\phi}$  está entre  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ ,  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ , e  $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ .

- **40.** Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho requerida para levantar uma montanha do nível do mar. Considere uma montanha que tem essencialmente o formato de um cone reto circular. Suponha que a densidade de peso do material na vizinhança de um ponto  $P \in g(P)$  e a altura é h(P).
  - (a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
  - (b) Assuma que o monte Fuji no Japão tem o formato de um cone circular reto com raio de 62.000 pés, altura de 12.400 pés e densidade constante de 200 lb/pé³. Quanto trabalho teria sido exercido para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?

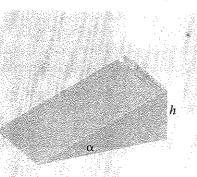


### Projeto Aplicado

### Corrida na Rampa

Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de squash), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolem em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará mais depressa embaixo? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão, consideramos a bola ou o cilindro com massa m, raio r e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação). Se a queda vertical for h, a energia potencial no topo será mgh. Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular  $\omega$ , e assim  $v = \omega r$ .



A energia cinética na base da rampa consiste em duas partes:  $\frac{1}{2}mv^2$  da translação (movimento de descida da rampa) e  $\frac{1}{2}I\omega^2$  da rotação. Se supusermos que a perda de energia por atrito na descida seja desprezível, então a lei de conservação de energia nos  $d\hat{a}$ :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

1. Mostre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \quad \text{onde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Se y(t) é a distância vertical percorrida até o instante t, então as mesmas razões utilizadas no Problema 1 mostram que  $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$  a qualquer instante t. Utilize esse resultado para mostrar que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+I^*}} (\operatorname{sen} \alpha) \sqrt{y}$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de inclinação da rampa.

3. Resolvendo a equação diferencial do Problema 2, mostre que o tempo total de percurso é

$$T = \sqrt{\frac{2h(1+I^*)}{g \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Isso mostra que o objeto com menor  $I^*$  ganha a corrida.

**4.** Mostre que  $I^* = \frac{1}{2}$  para o cilindro sólido e  $I^* = 1$  para o cilindro oco.

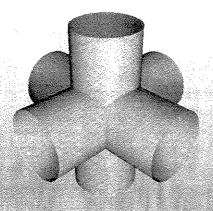
**5.** Calcule  $I^*$  para a bola parcialmente oca com raio interior a e raio externo r. Expresse sua resposta em termos do coeficiente b = a/r. O que acontece quando  $a \to 0$  e quando  $a \to r$ ?

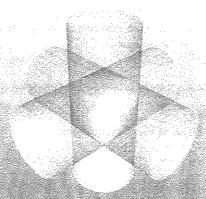
**6.** Mostre que  $I^* = \frac{2}{5}$  para a bola sólida e  $I^* = \frac{2}{3}$  para a bola oca. Assim, os objetos terminam a corrida na seguinte ordem: bola sólida, cilindro sólido, bola oca, cilindro oco.

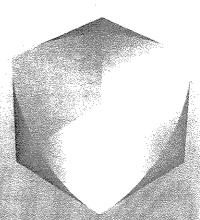
### Projeto Descoberta

### A Interseção de Três Cilindros

A figura mostra o sólido formado por três cilindros circulares com mesmo diâmetro que se interceptam em ângulo reto. Neste projeto vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.







1. Esboce cuidadosamente o sólido confido nos três cilindros  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + z^2 = 1$  e  $y^2 + z^2 = 1$ . Indique a posição dos eixos coordenados e identifique as faces com as equações dos cilindros correspondentes.

- 2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
- 3. Utilize um sistema computacional algébrico para desenhar as arestas do sólido
  - 4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilíndro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
  - **5.** Se o primeiro cilindro for  $x^2 + y^2 = a^2$ , onde a < 1, estabeleça, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se a > 1?

### 15.9

### Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos a mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u, podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, dada no Capítulo 5 do Volume I) como

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^d f(g(u))g'(u) \, du$$

onde x = g(u) e a = g(c), b = g(d). Outro modo de escrever a Fórmula 1 é a seguinte:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{c}^{d} f(x(u)) \frac{dx}{du} du$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para as coordenadas polares. As novas variáveis r e  $\theta$  estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r \cos \theta$$
  $v = r \sin \theta$ 

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint\limits_{R} f(x, y) dA = \iint\limits_{S} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

onde S é a região no plano  $r\theta$  que corresponde à região R no plano xy.

Genericamente, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$(3) x = q(u, v) y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v)$$
  $y = y(u, v)$ 

Vamos admitir que T seja uma **transformação**  $C^1$ , o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$ , então o ponto  $(x_1, y_1)$  é denominado **imagem** do ponto  $(u_1, v_1)$ . Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é

chamada **um** a **um**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv. T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de** S, constituída das imagens de todos os pontos de S.

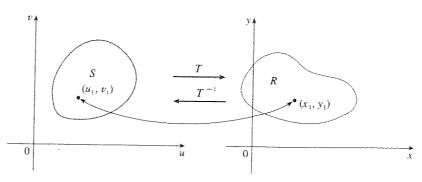


FIGURA 1

Se T é um a um, então existe uma **transformação inversa**  $T^{-1}$  do plano xy para o plano uv e é possível resolver as Equações 3 para u e v em termos de x e y:

$$u = G(x, y)$$
  $v = H(x, y)$ 

EXEMPLO 1 D Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado  $S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 1\}.$ 

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S. O primeiro lado,  $S_1$ , é dado por v=0 ( $0 \le u \le 1$ ) (veja a Figura 2). Das equações dadas, temos  $x=u^2$ , y=0, e portanto  $0 \le x \le 1$ . Então,  $S_1$  é mapeado no segmento de reta que liga (0,0) a (1,0) no plano xy. O segundo lado,  $S_2$ , é u=1 ( $0 \le v \le 1$ ) e, substituindo u=1 nas equações dadas, temos

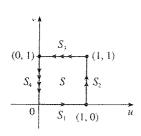
$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Eliminando v, obtemos

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \le x \le 1$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma,  $S_3$  é dado por v=1 ( $0 \le u \le 1$ ), cuja imagem é o arco parabólico

Finalmente,  $S_4$  é dado por u=0 ( $0 \le v \le 1$ ), cuja imagem é  $x=-v^2$ , y=0, ou seja,  $-1 \le x \le 0$ . (Note que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5.



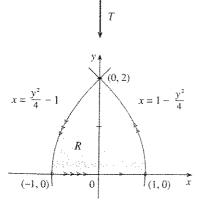


FIGURA 2

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Comecemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto  $(u_0, v_0)$  e cujas dimensões são  $\Delta u$  e  $\Delta v$  (veja a Figura 3).

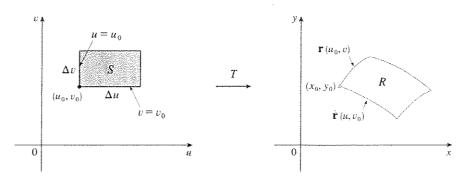


FIGURA 3

A imagem de S é a região R do plano xy, onde em um dos pontos da fronteira está  $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ . O vetor

$$\mathbf{r}(u,v) = g(u,v)\mathbf{i} + h(u,v)\mathbf{j}$$

é o vetor de posição da imagem do ponto (u, v). A equação do lado inferior de S é  $v = v_0$ , cuja curva imagem é dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(u, v_0)$ . O vetor tangente em  $(x_0, y_0)$  a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_{u} = g_{u}(u_{0}, v_{0}) \mathbf{i} + h_{u}(u_{0}, v_{0}) \mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em  $(x_0, y_0)$  à curva imagem do lado esquerdo de S  $(u=u_0)$  é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0) \,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0) \,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v} \,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \,\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem R = T(S) pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$
  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$ 

mostrados na Figura 4. Mas

Da mesma forma

$$\mathbf{r}_{u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

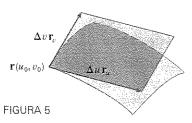
e então 
$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u$$

Isso significa que podemos aproximar 
$$R$$
 por um paralelogramo determinado pelos vetores  $\Delta u \mathbf{r}_u e \Delta v \mathbf{r}_v$  (veja a Figura 5). Portanto podemos aproximar a área de  $R$  pela área

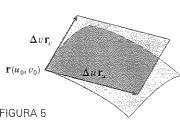
 $|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$ 

 $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$ 

desse paralelogramo, que da Seção 12.4 é



 $\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0)$ 



 $\mathbf{r}(u_0,v_0+\Delta v)$ 

FIGURA 4

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

O jacobiano recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Apesar de o matemático francês Cauchy ter usado esse determinante especial envolvendo derivadas parciais antes, Jacobi usou-os no método para calcular as integrais múltiplas.

[7] Definição O jacobiano da transformação 
$$T$$
 dada por  $x=g(u,v)$  e  $y=h(u,v)$  é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área  $\Delta A$  de R:

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em  $(u_0, v_0)$ .

Em seguida dividimos a região S do plano uv em retângulos  $S_{ij}$  e chamamos suas imagens no plano xy de  $R_{ij}$  (veja a Figura 6).

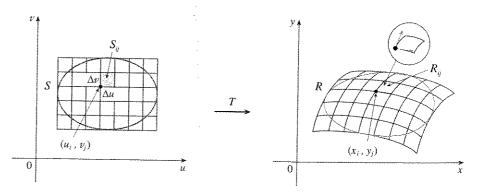


FIGURA 6

Aplicando a aproximação (8) a cada  $R_{ij}$ , apro-ximamos a integral dupla de f sobre R como se segue:

$$\iint\limits_{R} f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{i}, y_{j}) \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(g(u_{i}, v_{j}), h(u_{i}, v_{j})) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em  $(u_i, v_j)$ . Note que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint\limits_{\mathcal{L}} f(g(u,v),h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \ dv$$

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro. (Uma prova completa é dada em livros de cálculo avançado.)

Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla Suponha que T seja uma transformação  $C^1$  cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy. Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja um a um, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S. Então

$$\iint\limits_{R} f(x, y) dA = \iint\limits_{S} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e y e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Note a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du, temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja,  $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ .

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial desta. Aqui a transformação T do plano  $r\theta$  para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta$$
  $y = h(r, \theta) = r \sin \theta$ 

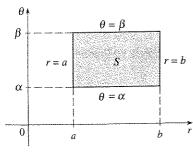
e a geometria das transformações é mostrada na Figura 7. T mapeia um retângulo ordinário do plano  $r\theta$  no retângulo polar do plano xy. O jacobiano de T é

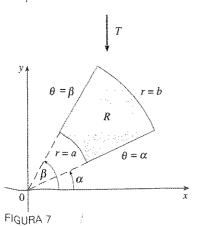
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

Logo, o Teorema 9 nos leva a

$$\iint_{R} f(x, y) dx dy = \iint_{S} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$
$$= \int_{S}^{\beta} \int_{0}^{b} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2.





Transformação para as coordenadas Polares

**EXEMPLO 2** Utilize a mudança de variáveis  $x = u^2 - v^2$ , y = 2uv, para calcular a integral  $\iint_R y \, dA$ , onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas  $y^2 = 4 - 4x$   $y^2 = 4 + 4x$ .

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2. No Exemplo 1 descobrimos que T(S) = R, onde S é o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R. Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\iint_{R} y \, dA = \iint_{S} 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (2uv)4(u^{2} + v^{2}) \, du \, dv$$

$$= 8 \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (u^{3}v + uv^{3}) \, du \, dv = 8 \int_{0}^{1} \left[ \frac{1}{4}u^{4}v + \frac{1}{2}u^{2}v^{3} \right]_{u=0}^{u=1} \, dv$$

$$= \int_{0}^{1} (2v + 4v^{3}) \, dv = \left[ v^{2} + v^{4} \right]_{0}^{1} = 2$$

NOTA  $\square$  O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se f(x, y) é difícil de integrar, então a forma de f(x, y) pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é desajeitada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

**EXEMPLO** 3  $\Box$  Calcule a integral  $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA$ , onde R é a região trapezoidal com vértices (1,0),(2,0),(0,-2) e (0,-1).

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar  $e^{(x+y)/(x-y)}$ , vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

$$10 u = x + y v = x - y$$

Essas equações definem a transformação  $T^{-1}$  do plano xy para o plano uv. O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy. Esta é obtida resolvendo-se as Equações 10 para x e y:

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

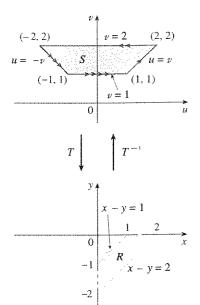


FIGURA 8

Para determinar a região S do plano uv correspondente a R, notamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

e das Equações 10 ou 11 as retas imagem do plano uv são

$$u=v$$
  $v=2$   $u=-v$   $v=1$ 

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices (1, 1), (2, 2), (-2, 2) e (-1, 1) mostrada na Figura 8. Como

$$S = \{(u, v) \mid 1 \le v \le 2, -v \le u \le v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\iint_{R} e^{(x+y)/(x-y)} dA = \iint_{S} e^{u/v} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv$$

$$= \int_{1}^{2} \int_{-v}^{v} e^{u/v} (\frac{1}{2}) du \, dv = \frac{1}{2} \int_{1}^{2} \left[ v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{1}^{2} (e - e^{-1}) v \, dv = \frac{3}{4} (e - e^{-1})$$

### **Integrals Triplas**

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja T a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w)$$
  $y = h(u, v, w)$   $z = k(u, v, w)$ 

O **jacobiano** de T é o seguinte determinante  $3 \times 3$ :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Das hipóteses semelhantes àquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) \ dV = \iiint\limits_{S} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \ du \ dv \ dw$$

EXEMPLO 4 

Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = \rho \cos \phi$ 

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi (-\rho^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta)$$

$$= \cos \phi (\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta)$$

$$= -\rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \sin \phi \sin^2 \phi = -\rho^2 \sin \phi$$

Como  $0 \le \phi \le \pi$ , temos sen  $\phi \ge 0$ . Portanto

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \left| -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) \, dV = \iiint\limits_{S} f(\rho \, \text{sen} \, \phi \, \text{cos} \, \theta, \rho \, \text{sen} \, \phi \, \text{sen} \, \phi, \rho \, \text{cos} \, \phi) \, \rho^{2} \, \text{sen} \, \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$
que equivale à Fórmula 15.8.4.

### 15.9 Exercícios

1-6 
Determine o jacobiano da transformação.

1. 
$$x = u + 4v$$
,  $y = 3u - 2v$ 

$$x = u^2 - v^2$$
,  $y = u^2 + v^2$ 

$$3. \ \ x = \frac{u}{u+v}, \quad y = \frac{v}{u-v}$$

4. 
$$x = \alpha \sin \beta$$
,  $y = \alpha \cos \beta$ 

$$5. x = uv, y = vw, z = uw$$

**6.** 
$$x = e^{u-v}$$
,  $y = e^{u+v}$ ,  $z = e^{u+v+w}$ 

7-10  $\square$  Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

$$S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3, \ 0 \le v \le 2\};$$
  
$$x = 2u + 3v, \ y = u - v$$

8. Sé o quadrado limitado pelas retas 
$$u = 0$$
,  $u = 1$ ,  $v = 0$ ,  $v = 1$ ;  $x = v$ ,  $y = u(1 + v^2)$ 

**9.** Sé a região triangular com vértices 
$$(0, 0)$$
,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ;  $x = u^2$ ,  $y = v$ 

**10.** 
$$S \notin o$$
 disco dado por  $u^2 + v^2 \le 1$ ;  $x = au$ ,  $y = bv$ 

11-18 
Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. 
$$\iint_R (x - 3y) dA$$
, onde  $R$  é a região triangular de vértices  $(0, 0), (2, 1), e(1, 2); \quad x = 2u + v, \quad y = u + 2v$ 

12. 
$$\iint_R (4x + 8y) dA$$
, onde  $R \notin O$  paralelogramo com vértices  $(-1, 3), (1, -3), (3, -1), e(1, 5);$   
 $x = \frac{1}{4}(u + v), y = \frac{1}{4}(v - 3u)$ 

**13.** 
$$\iint_R x^2 dA$$
, onde  $R$  é a região limitada pela elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$ ;  $x = 2u$ ,  $y = 3v$ 

**14.** 
$$\iint_R (x^2 - xy + y^2) dA$$
, onde  $R$  é a região limitada pela elipse  $x^2 - xy + y^2 = 2$ ;  $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$ ,  $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$ 

15. 
$$\iint_R xy \, dA$$
, onde  $R$  é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas  $y = x$  e  $y = 3x$  e pelas hipérboles  $xy = 1$ ,  $xy = 3$ ;  $x = u/v$ ,  $y = v$ 

- **16.**  $\iint_R y^2 dA$ , onde R é a região limitada pelas curvas xy = 1, xy = 2,  $xy^2 = 1$ ,  $xy^2 = 2$ ; u = xy,  $v = xy^2$ . Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.
  - 17. (a) Calcule  $\iiint_E dV$ , onde E é o sólido contido pelo elipsóide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ . Utilize a transformação x = au, y = bv, z = cw.
    - (b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação os pólos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsóide com a = b = 6378 km e c = 6356 km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra
  - **18.** Calcule  $\iiint_E x^2 y \ dV$ , onde E é o sólido do Exercício 17(a).

 $19-23 \ \Box$  Calcule a integral, fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

19.  $\iint_{R} \frac{x-2y}{3x-y} dA$ , onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas x-2y=0, x-2y=4, 3x-y=1, e 3x-y=8

- **20.**  $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$ , onde  $R \notin o$  retângulo delimitado pelas retas x-y=0, x-y=2, x+y=0 e x+y=3
- **21.**  $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ , onde R é a região trapezoidal com vértices (1,0), (2,0), (0,2) e (0,1)
- 22.  $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) dA$ , onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse  $9x^2 + 4y^2 = 1$
- 23.  $\iint_R e^{x+y} dA$ , onde R é dada pela inequação  $|x| + |y| \le 1$
- 24. Seja f uma função contínua sobre [0, 1] e seja R a região triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1). Mostre que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}} f(x+y) dA = \int_{0}^{1} u f(u) du$$

### 15

### Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- 1. Suponha que f seja uma função contínua definida sobre um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ .
  - (a) Escreva uma expressão para a soma dupla de Riemann de f. Se  $f(x, y) \ge 0$ , o que essa soma representa?
  - (b) Escreva a definição de  $\iint_R f(x, y) dA$  como um limite.
  - (c) Qual é a interpretação geométrica de  $\iint_R f(x, y) dA$  se  $f(x, y) \ge 0$ ? E se f tiver valores positivos e valores negativos?
  - (d) Como calcular  $\iint_{R} f(x, y) dA$ ?
  - (e) O que a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas diz?
  - (f) Escreva uma expressão para o valor médio de f.
- **2.** (a) Como você define  $\iint_D f(x, y) dA$  se D é uma região limitada que não é retangular?
  - (b) O que é uma região do tipo I? Como calcular  $\iint_D f(x, y) dA$  se D for uma região do tipo I?
  - (c) O que é uma região do tipo II? Como calcular  $\iint_D f(x, y) dA \text{ se } D \text{ for uma região do tipo II?}$
  - (d) Quais as propriedades de uma integral dupla?
- 3. Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral em coordenadas polares? Por que você faria isso?
- **4.** Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade  $\rho(x, y)$ , escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.
  - (a) A massa
  - (b) Os momentos em relação aos eixos
  - (c) O centro de massa
  - (d) Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem

- 5. Seja f uma função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y.
  - (a) Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d.
  - (b) Que propriedades f possui?
  - (c) Quais são os valores esperados de X e Y?
- **6.** Escreva uma expressão para a área de uma superfície com a equação  $z = f(x, y), (x, y) \in D$ .
- (a) Escreva a definição da integral tripla sobre uma caixa retangular B.
  - (b) Como calcular  $\iiint_B f(x, y, z) dV$ ?
  - (c) Como definir  $\iiint_E f(x, y, z) dV$  se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?
  - (d) O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular  $\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV \text{ se } E \text{ for tal região?}$
  - (e) O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular  $\iiint_E f(x,y,z) \ dV \text{ se } E \text{ for tal região?}$
  - (f) O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular  $\iiint_E f(x, y, z) \ dV \text{ se } E \text{ for tal região?}$
- **8.** Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade  $\rho(x, y, z)$ . Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.
  - (a) A massa

- (b) Os momentos em relação aos planos coordenados
- (c) As coordenadas do centro de massa
- (d) Os momentos de inércia em relação aos eixos
- 9. (a) Como, em uma integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para cilíndricas?
  - (b) Como, em uma integral tripla, trocar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?
- (c) Em que situações você deve trocar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?

1047

- 10. (a) Se uma transformação T é dada por x = g(u, v), y = h(u, v), qual é o jacobiano de T?
  - (b) Como você muda de variáveis em uma integral dupla?
  - (c) Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

#### **TESTES FALSO-VERDADEIRO**

Determine se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações. Se verdadeiras explique por quê. Se falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo

1. 
$$\int_{-1}^{2} \int_{0}^{6} x^{2} \sin(x - y) \, dx \, dy = \int_{0}^{6} \int_{-1}^{2} x^{2} \sin(x - y) \, dy \, dx$$

2. 
$$\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x + y^2} \, dy \, dx = \int_0^x \int_0^1 \sqrt{x + y^2} \, dx \, dy$$

3. 
$$\int_{1}^{2} \int_{3}^{4} x^{2} e^{y} dy dx = \int_{1}^{2} x^{2} dx \int_{3}^{4} e^{y} dy$$

4. 
$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} e^{x^{2}+y^{2}} \sin y \, dx \, dy = 0$$

5. Se D é um disco dado por  $x^2 + y^2 \le 4$ , então

$$\iint\limits_{D} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA = \frac{16}{3} \, \pi$$

**6.** 
$$\int_{1}^{4} \int_{0}^{1} (x^{2} + \sqrt{y}) \operatorname{sen}(x^{2}y^{2}) dx dy \leq 9$$

7. 5. A integral

**5.**  $\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \cos(x^{2}) dy dx$ 

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz \, dr \, d\theta$$

representa um volume contido pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e pelo plano z=2.

**6.**  $\int_0^1 \int_0^{e^x} 3xy^2 dy dx$ 

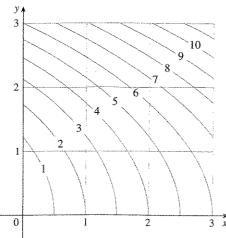
**8.** A integral  $\iiint_E kr^3 dz dr d\theta$  representa o momento de inércia em torno do eixo z de um sólido E com densidade constante k.

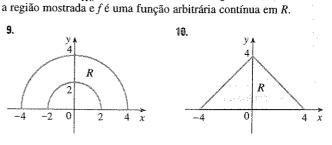
7.  $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \sin x \, dz \, dy \, dx$  8.  $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz \, dz \, dx \, dy$ 

9-10  $\Box$  Escreva  $\iint_R f(x, y) dA$  como uma integral iterada, onde R é

#### **EXERCÍCIOS**

1. A figura mostra um mapa de contornos de uma função f sobre o quadrado  $R = [0, 3] \times [0, 3]$ . Utilize a soma de Riemann com nove termos para estimar o valor de  $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dA$ . Tome os pontos amostra como sendo o canto superior direito dos quadrados.





2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.

3-8 □ Calcule a integral iterada.

**3.** 
$$\int_{1}^{2} \int_{0}^{2} (y + 2xe^{y}) dx dy$$
 **4.**  $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} ye^{xy} dx dy$ 

4. 
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} y e^{xy} dx dx$$

11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_{\theta}^{\pi/2} \int_{0}^{\text{sen}} r \, dr \, d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$$

e calcule essa integral.

#### 1048 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

13-14 🗆 Calcule a integral iterada primeiro invertendo a ordem de

**13.** 
$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2) \, dy \, dx$$

**14.** 
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y e^{x^2}}{x^3} dx \, dy$$

15-28 □ Calcule o valor da integral múltipla.

**15.** 
$$\iint_R y e^{xy} dA$$
, onde  $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 3\}$ 

**16.** 
$$\iint_D xy \, dA$$
, onde  $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y + 2\}$ 

17. 
$$\iint_D \frac{y}{1+x^2} dA$$
, onde  $D$  é limitada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ 

**18.** 
$$\iint_{D} \frac{1}{1+x^2} dA$$
, onde D é a região triangular de vértices  $(0,0)$   $(1,1)$ , e  $(0,1)$ 

**19.** 
$$\iint_D y \, dA$$
, onde  $D$  é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas  $x = y^2$  e  $x = 8 - y^2$ 

**20.** 
$$\iint_D y \, dA$$
, onde  $D$  é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole  $xy = 1$  e da reta  $y = x$  e abaixo da reta  $y = 2$ 

21. 
$$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$$
, onde  $D$  é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas  $y = 0$  e  $y = \sqrt{3}x$  e pelo círculo  $x^2 + y^2 = 9$ 

22. 
$$\iint_D x \, dA$$
, onde  $D$  é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 2$ 

**23.** 
$$\iiint_E xy \, dV$$
, onde  $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le x, 0 \le z \le x + y\}$ 

**24.** 
$$\iiint_T xy \, dV$$
, onde T é o tetraedro sólido com vértices em  $(0, 0, 0), (\frac{1}{3}, 0, 0), (0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ 

**25.** 
$$\iiint_E y^2 z^2 dV$$
, onde  $E$  é limitado pelo parabolóide  $x = 1 - y^2 - z^2$  e pelo plano  $x = 0$ 

**26.** 
$$\iiint_E z \, dV$$
, onde  $E$  é limitado pelos planos  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$  e pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 1$  no primeiro octante

27. 
$$\iiint_E yz \, dV$$
, onde  $E$  está acima do plano  $z = 0$ , abaixo do plano  $z = y$  e dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ 

**28.** 
$$\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$$
, onde  $H$  é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano  $xy$ 

29-34 □ Determine o volume do sólido dado

**29.** Abaixo do parabolóide 
$$z = x^2 + 4y^2$$
 e acima do retângulo  $R = [0, 2] \times [1, 4]$ 

**30.** Abaixo da superfície 
$$z = x^2y$$
 e acima do triângulo do plano  $xy$  com vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(4, 0)$ 

32. Limitado pelo cilindro 
$$x^2 + y^2 = 4$$
 e pelos planos  $z = 0$  e  $y + z = 3$ 

33. Da cunha obtida pelo corte do cilindro  $x^2 + 9y^2 = a^2$  pelos planos z = 0 e z = mx

**34.** Acima do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e abaixo do semicone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola  $x = 1 - y^2$  e pelos eixos coordenados, com função densidade  $\rho(x, y) = y$ .

(a) Determine a massa da lâmina.

(b) Determine o centro de massa.

(c) Determine os momentos de inércia e raio de rotação em relação aos eixos x e y.

**36.** Uma lâmina ocupa a parte do disco  $x^2 + y^2 \le a^2$  que está no primeiro quadrante.

(a) Determine o centróide da lâmina.

(b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for  $\rho(x, y) = xy^2$ .

37. (a) Determine o centróide de um cone circular reto com altura h e raio da base a. (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z.)

(b) Determine o momento de inércia do cone em relação a seu eixo (eixo z).

**38.** Determine a área da parte do cone  $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$  entre os planos z = 1 e z = 2.

**39.** Determine a área da parte da superfície  $z = x^2 + y$  que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2).

**40.** Trace o gráfico da superfície  $z = x \operatorname{sen} y$ ,  $-3 \le x \le 3$ ,  $-\pi \le y \le \pi$ , e determine sua área com precisão até a quarta casa decimal.

41. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2) \, dy \, dx.$$

42. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dx \, dy$$

**43.** Se D é uma região limitada pelas curvas  $y = 1 - x^2$  e  $y = e^x$ , determine o valor aproximado da integral  $\iint_{\mathbb{R}} y^2 dA$ . (Utilize um dispositivo gráfico para estimar os pontos de interseção das curvas.)

44. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) e função densidade  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 

A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 2\\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.

- (b) Determine  $P(X \le 2, Y \ge 1)$ .
- (c) Determine  $P(X + Y \le 1)$ .
- 46. Uma lâmpada tem três bulbos, cada um de um tipo, com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha dos bulbos por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade dos três bulbos virem a falhar dentro de um intervalo de 1000 horas.
- 47. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

como uma integral iterada na ordem dx dy dz.

48. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

- **49.** Utilize a transformação u = x y, v = x + y para calcular  $\iint_R (x y)/(x + y) dA$ , onde  $R \notin O$  quadrado com vértices  $(0, 2), (1, 1), (2, 2) \in (1, 3)$ .
- **50.** Utilize a transformação  $x = u^2$ ,  $y = v^2$ ,  $z = w^2$  para determinar o volume da região limitada pela superfície  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  e pelos planos coordenados.
- **51.** Utilize a fórmula de mudança de variáveis e a transformação apropriada para calcular  $\iint_{\mathbb{R}} xy \, dA$ , onde  $R \notin O$  quadrado com vértices (0, 0), (1, 1), (2, 0) e (1, -1).
- 52. O Teorema do Valor Médio para as Integrais Duplas diz que, se f é uma função contínua em uma região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto  $(x_0, y_0)$  em D, tal que

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D)$$

1049

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para provar esse teorema. (Use a prova da versão unidimensional da Seção 6.5 do Volume I como guia.)

**53.** Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b). Seja D, um disco fechado com centro em (a, b) e raio r. Utilize o Teorema do Valor Médio para as integrais duplas (veja o Exercício 52) para mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y) \, dA = f(a, b)$$

**54.** (a) Calcule  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} dA$ , onde  $n \notin \text{um inteiro } eD$ 

é a região limitada por círculos com centro na origem e raios  $r \in R$ , 0 < r < R.

- (b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando  $r \rightarrow 0^+$ ?
- (c) Determine  $\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} dV$ , onde E é a região

limitada pelas esferas com centro na origem e raios  $r \in R$ , 0 < r < R.

(d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando r → 0<sup>+</sup>?

### Problemas Quentes

1. Se [x] denota o maior inteiro contido em x, calcule a integral

$$\iint\limits_{R} [x + y] dA$$

onde  $R = \{(x, y) | 1 \le x \le 3, 2 \le y \le 5\}.$ 

2. Calcule a integral

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} e^{\max\{x^{2}, y^{2}\}} dy dx$$

onde máx  $\{x^2, y^2\}$  significa o maior dos números  $x^2$  e  $y^2$ .

- 3. Determine o valor médio da função  $f(x) = \int_{x}^{1} \cos(t^2) dt$  no intervalo [0, 1].
- Se a, b e c são vetores constantes, r é o vetor de posição x i + y j + z k, e E é dado pelas inequações 0 ≤ a · r ≤ α, 0 ≤ b · r ≤ β, 0 ≤ c · r ≤ γ, mostre que

$$\iiint\limits_{F} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, dV = \frac{(\alpha \beta \gamma)^{2}}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

**5.** A integral dupla  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$  é uma integral imprópria e pode ser definida como limite da integral dupla sobre o retângulo  $[0, t] \times [0, t]$  quando  $t \to 1^-$ . Mas, se expandirmos o integrando como uma série geométrica, podemos exprimir a integral como a soma de uma série infinita. Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx \, dy = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

Leonhard Euler determinou o valor exato da soma das séries do Problema 5. Em 1736, ele provou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nesse problema, pedimos para você provar esse fatos calculando a integral dupla do Problema 5. Comece fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

Isso corresponde a uma rotação em torno da origem de um ângulo de  $\pi/4$ . Você precisa esboçar a região correspondente no plano uv.

[Dica: se, calculando a integral, você encontrar uma das expressões  $(1 - \sin \theta)/\cos \theta$  ou  $(\cos \theta)/(1 + \sin \theta)$ , deve usar a identidade  $\cos \theta = \sin((\pi/2) - \theta)$  e a identidade correspondente para sen  $\theta$ .]

7. (a) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz} \, dx \, dy \, dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$$

(Ninguém jamais foi capaz de determinar o valor exato da soma dessa série.)

(b) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz} \, dx \, dy \, dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use essa equação para calcular a integral tripla com precisão de duas casas decimais.

8. Mostre que

$$\int_0^{\pi} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

primeiro escrevendo a integral como uma integral iterada.

9. Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t) \, dt \, dz \, dy = \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 f(t) \, dt$$

10. (a) Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R. Utilize a Lei de Newton da Gravitação (veja a Seção 13.4) para mostrar que a grandeza da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto (0, 0, d) sobre o lado positivo do eixo z é

$$F = 2\pi Gm\rho d \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right)$$

[Dica: divida o disco como na Figura 4 da Seção 15.4 e calcule primeiro o componente vertical da força exercida pelo sub-retângulo polar  $R_{ij}$ .]

(b) Mostre que a grandeza da força de atração da lâmina com densidade  $\rho$  que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi G m \rho$$

Note que essa expressão não depende de d.

# 16

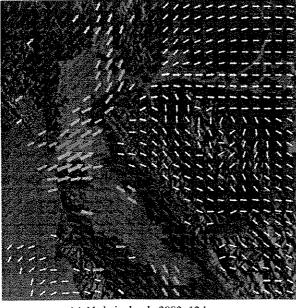
# Cálculo Vetorial

Os vetores podem representar campos de velocidade, como correntes oceânicas, velocidade do vento durante um tornado ou o fluxo de ar passando por um aerofólio inclinado.

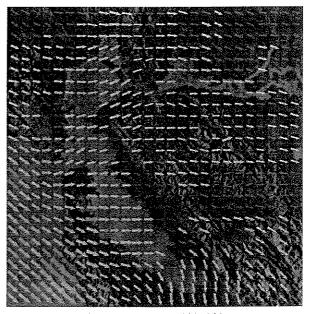
Neste capítulo estudaremos o cálculo de campos vetoriais. (Esses campos são funções que associam vetores a pontos do espaço.) Em particular, definimos a integral de linha (que pode ser utilizada para determinar o trabalho efetuado por um campo de força agindo sobre um objeto que se move ao longo de uma curva). Definimos a integral de superfície (que pode ser usada para determinar a taxa de vazão de um fluido através de uma superfície). As conexões entre esses tipos novos de integrais e as integrais de funções de uma variável real, duplas e triplas, que já vimos, são dadas por versões de maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo: Teorema de Green, Teorema de Stokes e Teorema da Divergência.

### **16.1** Campos Vetoriais

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a rapidez, a direção e o sentido em pontos 10 m acima da superfície na área da baía de São Francisco. Dando uma olhada nas setas maiores da parte (a) vemos que a maior rapidez dos ventos naquele instante ocorre quando os ventos entram na baía através da ponte Golden Gate. A parte (b) mostra um aspecto bastante diferente em uma época posterior. Associado a cada ponto no ar podemos imaginar o vetor velocidade do vento. Esse é um exemplo de um campo de vetores velocidade.



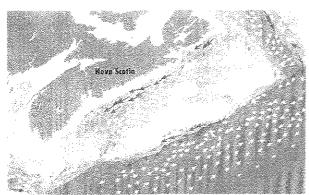
(a) 11 de junho de 2002, 12 horas



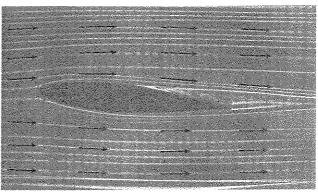
(b) 30 de junho de 2002, 16 horas

FIGURA 1 Campo de vetores velocidade mostrando aspectos do vento na baía de São Francisco

Outros exemplos de campos de vetores velocidade estão ilustrados na Figura 2: correntes oceânicas e o fluxo por um aerofólio.



(a) correntes oceânicas em frente à costa de Nova Scotia



(a) Fluxo do ar passando por um aerofólio inclinado

FIGURA 2 Campos de vetores velocidade

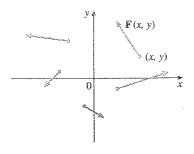


FIGURA 3 Campo vetorial no  $\mathbb{R}^2$ 

Outro tipo de campo vetorial, chamado campo de força, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional mostrado no Exemplo 4.

Geralmente um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) e cuja imagem é um conjunto de vetores em  $V_2$  (ou  $V_3$ ).

The finiçãe Seja D um conjunto em  $\mathbb{R}^2$  (uma região plana). Um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^2$  é uma função F que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional F(x, y).

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores  $\mathbf{F}(x, y)$  começando em um ponto (x, y). É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y), mas podemos visualizar  $\mathbf{F}$  fazendo isso para alguns pontos representativos em D, como na Figura 3. Como  $\mathbf{F}(x, y)$  é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes**  $P \in Q$ , como segue:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou, simplificando,

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + O \mathbf{i}$$

Note que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, campos escalares, para distinguir dos campos vetoriais.

**2** Definição Seja E um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$ . Um campo vetorial sobre o  $\mathbb{R}^3$  é uma função  $\mathbb{F}$  que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional  $\mathbb{F}(x, y, z)$ .

Um campo vetorial F sobre  $\mathbb{R}^3$  está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

Como para funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir continuidade de campos vetoriais e mostrar que  $\mathbf{F}$  é contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R são contínuas

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor de posição  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  e escrevemos  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  em vez de  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Então  $\mathbf{F}$  é uma função que associa um vetor  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ao vetor  $\mathbf{x}$ .

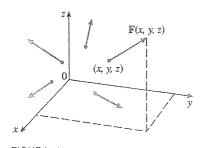


FIGURA 4 Campo vetorial no  $\mathbb{R}^3$ 

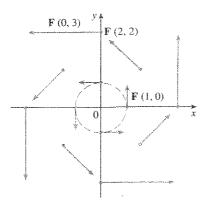


FIGURA 5  $\mathbf{F}(x, y) = -y \, \mathbf{i} + x \, \mathbf{j}$ 

EXEMPLE 1 = Um campo vetorial em R2 é definido por

$$\mathbb{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

Descreva  $\mathbf{F}$  desenhando alguns de seus vetores  $\mathbf{F}(x, y)$ , como na Figura 3.

SOLUÇÃO Como  $\mathbf{F}(1,0)=\mathbf{j}$ , desenhamos o vetor  $\mathbf{j}=\langle 0,1\rangle$  começando no ponto (1,0) na Figura 5. Como  $\mathbf{F}(0,1)=-\mathbf{i}$ , desenhamos o vetor  $\langle -1,0\rangle$  iniciando no ponto (0,1). Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 5.

| (8, 7) | $\mathfrak{T}(x,y)$ | $\langle x, y \rangle$ | Stayo   |
|--------|---------------------|------------------------|---------|
| (1.0)  | (0, 1)              | (-1,0)                 | (01)    |
| (2.2)  | ⟨-2,2⟩              | (-2, -2)               | (22)    |
| (3.0)  | (0, 3)              | (-3.0)                 | (0, -3) |
| (0.17  | (-1.0)              | (0, -1)                | (1.0)   |
| 1-2,2) | ⟨ +2, -2⟩           | (22)                   | ⟨2, 2⟩  |
| (0, 3) | ⟨-3.0⟩              | (0, -3)                | (3.0)   |

Na Figura 5 parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmar isso, vamos tomar o produto escalar do vetor de posição  $\mathbf{x} = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j}$  com o vetor  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$ :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x \,\mathbf{i} + y \,\mathbf{j}) \cdot (-y \,\mathbf{i} + x \,\mathbf{j})$$
$$= -xy + yx = 0$$

Isso mostra que  $\mathbf{F}(x, y)$  é perpendicular ao vetor de posição  $\langle x, y \rangle$  e portanto tangente ao círculo com centro na origem e raio  $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Note também que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

e o comprimento do vetor F(x, y) é igual ao raio do círculo.

Alguns sistemas algébricos computacionais são capazes de plotar o campo vetorial em duas ou três dimensões. Eles fornecem melhor visualização do campo que aquela que fazemos manualmente, pois o computador pode desenhar grande número de vetores representativos. A Figura 6 apresenta uma saída de computador para o campo vetorial do Exemplo 1; as Figuras 7 e 8 mostram outros dois campos vetoriais. Note que o computador faz uma mudança de escala no comprimento do vetor de forma que ele não seja muito comprido, mantendo entretanto proporcionalidade com seu verdadeiro comprimento.

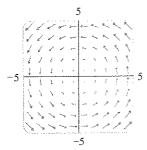


FIGURA 6  $\mathbb{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$ 

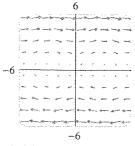


FIGURA 7  $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \text{ sen } x \rangle$ 

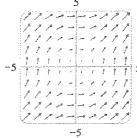
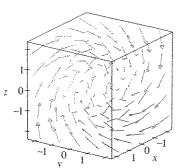


FIGURA 8  $\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$ 

FIGURA 9  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{k}$ 



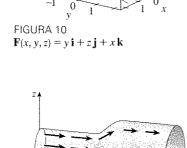
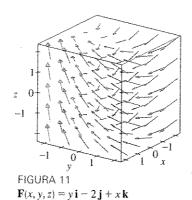


FIGURA 13 Campo de velocidade de escoamento de um líquido

EXEMPLO 2  $\Box$  Desenbe o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{k}$ .

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Note que todos os vetores são verticais apontando para cima, quando acima do plano xy, e para baixo, quando abaixo do plano xy. O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy.

Somos capazes de desenhar o campo vetorial do Exemplo 2 à mão, pois ele é especialmente simples. Entretanto, é impossível desenhar à mão a maioria dos campos vetoriais tridimensionais, e assim precisamos do auxílio de um sistema algébrico computacional. Exemplos estão ilustrados nas Figuras 10, 11 e 12. Note que os campos vetoriais das Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes, mas todos os vetores da Figura 11 apontam na direção negativa do eixo y, porque seu componente y vale -2. Se o campo vetorial da Figura 12 representa um campo de velocidade, então uma partícula seria levada para cima em uma espiral em torno do eixo z na direção dos ponteiros do relógio quando visto de cima.



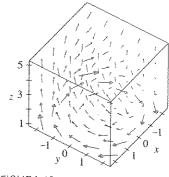


FIGURA 12  $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z} \mathbf{i} - \frac{x}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{4} \mathbf{k}$ 

**EXEMPLO 3**  $\odot$  Imagine um líquido fluindo uniformemente em um cano e seja  $\mathbf{V}(x,y,z)$  o vetor velocidade em um ponto (x,y,z). Então  $\mathbf{V}$  associa um vetor a cada ponto (x,y,z) de um certo domínio E (interior do cano), e assim  $\mathbf{V}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  chamado **campo de velocidade**. Um campo de velocidade possível está ilustrado na Figura 13. A rapidez em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física. Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido horário de uma roda. Vimos outros exemplos de campo de velocidade nas Figuras 1 e 2.

EXEMPLO 4  $\Box$  A Lei Gravitacional de Newton estabelece que a amplitude da força gravitacional entre dois objetos com massa m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional. (Esse é um exemplo de uma lei de um inverso ao quadrado.) Vamos admitir que o objeto com massa M esteja localizado na origem no  $\mathbb{R}^3$ . (Por exemplo, M poderia ser a massa da Terra e a origem seria seu centro.) Seja  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  o vetor de posição do objeto com massa m. Então

FIGURA 14 Campo gravitacional

 $r = |\mathbf{x}|$  ou  $r^2 = |\mathbf{x}|^2$ . A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem, e seu versor é

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

[Físicos freqüentemente utilizam a notação  ${\bf r}$  em vez de  ${\bf x}$  para o vetor posição, de modo que você possa conhecer a Fórmula 3 escrita como  ${\bf F}=-(mMG/r^3){\bf r}$ .] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo de velocidade, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força  ${\bf F}({\bf x})$ ] a todo ponto  ${\bf x}$  do espaço.

A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes usando o fato de que  $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \mathbf{e} |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

O campo gravitacional F está ilustrado na Figura 14.

EXEMPLO 8  $\square$  Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica  $F(\mathbf{x})$  exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante (que depende da unidade usada). Para cargas iguais utilizamos qQ>0 e a força é repulsiva; para cargas diferentes temos qQ<0 e a força é atrativa. Note a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Em vez de considerar a força elétrica F, os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

Então E é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  chamado campo elétrico de Q.

### **Campos Gradientes**

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente  $\nabla f$  (ou grad f) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

Portanto,  $\nabla f$  é realmente um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  e é denominado **campo do vetor gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{i} + f_y(x, y, z) \mathbf{j} + f_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

EXEMPLO S  $\Box$  Determine o vetor gradiente de  $f(x, y) = x^2y - y^3$ . Desenhe o campo de vetores gradientes juntamente com um mapa de contorno de f. Como estão relacionados? SOLUÇÃO O campo de vetor gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2) \mathbf{j}$$

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo de vetor gradiente. Note que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Note também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação do gráfico.

Um campo vetorial  $\mathbf{F}$  é dito ser um **campo vetorial conservativo** se ele é o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existe uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Nessa situação f é dita ser uma **função potencial** de  $\mathbf{F}$ .

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional F do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{F}(x, y, z)$$

Nas Seções 16.3 e 16.5 aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

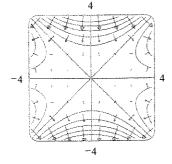


FIGURA 15

1-19 Esboce o campo vetorial F, desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. 
$$F(x, y) = \frac{1}{2}(i + j)$$

**2.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x \, \mathbf{j}$$

3. 
$$\mathbf{F}(x, y) = y \, \mathbf{i} + \frac{1}{2} \, \mathbf{j}$$

4. 
$$F(x, y) = (x - y)i + xj$$

**5.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**6.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{y \, \mathbf{i} - x \, \mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

7. 
$$F(x, y, z) = j$$

**8.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \, \mathbf{j}$$

**9.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{j}$$

10. 
$$F(x, y, z) = j - i$$

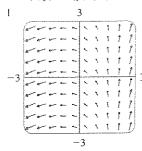
11-14 © Case o campo vetorial F com a figura rotulada de I-IV. Dê razões para suas escolhas.

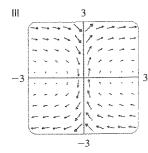
**11.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$$

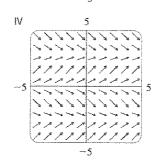
12. 
$$\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \text{sen } y \rangle$$

**13.** 
$$F(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$$

14. 
$$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$$







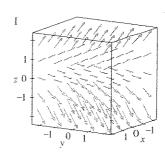
15-18  $\Box$  Case o campo vetorial F em  $\mathbb{R}^3$  com a figura rotulada de I-IV. Dê razões para suas escolhas.

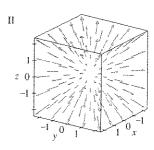
**15.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

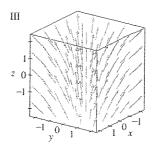
**16.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

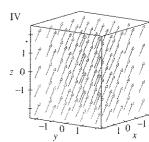
**17.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$$

**18.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k}$$









19. Se você dispõe de um CAS que plota campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é o "fieldplot" e no Mathematica é o "PlotVectorField"), use-o para plotar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que F(x, y) = 0.

**20.** Seja  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$  e  $r = |\mathbf{x}|$ . Use um CAS para plotar esse campo vetorial com vários domínios até conseguir ver o que está acontecendo. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

21-24  $\square$  Determine o campo do vetor gradiente de f.

**21.** 
$$f(x, y) = \ln(x + 2y)$$

**22.** 
$$f(x, y) = x^{\alpha} e^{-\beta x}$$

y & & u

**23.** 
$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**24.** 
$$f(x, y, z) = x \cos(y/z)$$

25-26  $\Box$  Determine o campo do vetor gradiente  $\nabla f$  de f e o desenhe.

**25.** 
$$f(x, y) = xy - 2x$$

**26.** 
$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2$$

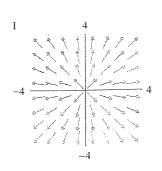
27-28  $\square$  Plote o campo do vetor gradiente de f junto com o mapa de contorno de f. Explique como eles estão relacionados.

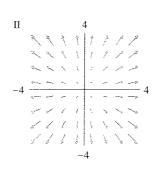
**27.** 
$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$

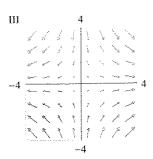
z s a a

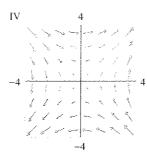
**28.** 
$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

29–32  $\Box$  Case as funções f com os desenhos de seus campos de vetor gradiente (rotulados de I-IV). Dê razões para suas escolhas.









- **29.** f(x, y) = xy
- **30.**  $f(x, y) = x^2 y^2$
- **31.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$
- **32.**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 33. As linhas de fluxo (ou linhas de correnteza) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de fluxo.
  - (a) Use um esboço do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y) = x \mathbf{i} y \mathbf{j}$  para desenhar algumas linhas de fluxo. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de fluxo?
  - (b) Se as equações paramétricas de uma linha de fluxo são x = x(t), y = y(t), explique por que essas funções satisfazem a equação diferencial dx/dt = x e dy/dt = -y. Em seguida resolva as equações diferenciais para determinar uma equação para as linhas de fluxo que passe pelo ponto (1, 1).
- **34.** (a) Esboce o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x \mathbf{j}$  e algumas linhas de fluxo. Qual é o formato que essas linhas de fluxo parecem ter?
  - (b) Se as equações paramétricas das linhas de fluxo são x = x(t), y = y(t), que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que dy/dx = x.
  - (c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por F, determine uma equação para a trajetória percorrida.

## **16.2** Integrais de Linha

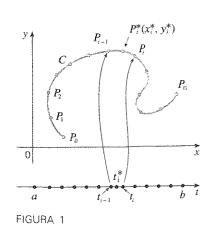
Nesta seção definimos uma integral que é semelhante a uma integral de uma função de uma variável real, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo [a, b], integraremos sobre uma curva C. Tais integrais são chamadas integrais de linha, apesar de a expressão "integrais curvas" ser a mais adequada. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de líquidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)$   $\mathbf{i} + y(t)$   $\mathbf{j}$ , e admitiremos que C seja uma curva lisa. [Isso significa que  $\mathbf{r}'$  é contínua e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Veja a Seção 13.2.] Se dividirmos o intervalo do parâmetro [a, b] em n subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de igual tamanho e se fizermos  $x_i = x(t_i)$  e  $y_i = y(t_i)$ , então os pontos correspondentes  $P_i(x_i, y_i)$  dividem C em n subarcos de comprimento  $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$  (veja a Figura 1). Escolhemos um ponto qualquer  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  no i-ésimo subarco. (Isso corresponde a um ponto  $t_i^*$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ .) Se f é uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C, calculamos f no ponto  $(x_i^*, y_i^*)$ , multiplicamos pelo comprimento  $\Delta s_i$  do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \, \Delta s_i$$

o que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição por analogia com a integral de função de uma variável real.



1061

 $\fbox{2}$  Definição Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas Equações 1, então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.3 achamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}} dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que cada ponto da curva seja atingido uma única vez quando t cresce de a para b.

Se s(t) é o comprimento de C entre  $\mathbf{r}(a)$  e  $\mathbf{r}(t)$ , então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de guardar a Fórmula 3 é escrever tudo, em termos do parâmetro t. Usando a parametrização para exprimir x e y em termos de t, temos ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

No caso especial onde C é um segmento de reta unindo (a,0) a (b,0), tomando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C assim:  $x=x, y=0, a \le x \le b$ . A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, 0) \, dx$$

e nesse caso a integral de linha se reduz a uma integral de função de uma variavél real.

Assim como para as integrais de funções de uma variável real, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se  $f(x, y) \ge 0$ ,  $\int_C f(x, y) ds$  representa a área de um lado da "cerca" ou "cortina" da Figura 2 cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é f(x, y).

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Calcule  $\int_C (2 + x^2 y) ds$ , onde C é a metade superior do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ .

□ A função comprimento de arco s está ilustrada na Seção 13.3.

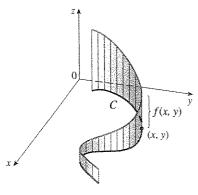


FIGURA 2

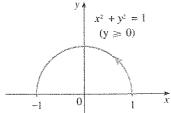


FIGURA 3

curva C. Como já vimos, o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações  $x = \cos t$  $y = \operatorname{sen} t$ 

> e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro  $0 \le t \le \pi$  (veja a Figura 3). Logo, da Fórmula 3, temos

SOLUÇÃO Para usar a Fórmula 3 precisamos de equações paramétricas que representem a

$$\int_{C} (2 + x^{2}y) ds = \int_{0}^{\pi} (2 + \cos^{2}t \operatorname{sen}t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}} dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} (2 + \cos^{2}t \operatorname{sen}t) \sqrt{\operatorname{sen}^{2}t + \cos^{2}t} dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} (2 + \cos^{2}t \operatorname{sen}t) dt = \left[2t - \frac{\cos^{3}t}{3}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= 2\pi + \frac{2}{3}$$

Suponha agora que C seja uma curva lisa por trechos; ou seja, C é a união de um número finito de curvas lisas  $C_1, C_2, \ldots, C_n$ , onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de  $C_{i+1}$  é o ponto terminal de  $C_i$ . Então, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho liso de C:

$$\int_{C} f(x, y) \, ds = \int_{C_{1}} f(x, y) \, ds + \int_{C_{2}} f(x, y) \, ds + \cdots + \int_{C_{n}} f(x, y) \, ds$$

EXEMPLO 2  $\ \, \Box$  Calcule  $\int_C 2x\ ds$ , onde C é formada pelo arco  $C_1$  da parábola  $y=x^2$  de (0,0) a (1,1) seguido pelo segmento de reta vertical  $C_2$  de (1,1) a (1,2).

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5.  $C_1$  é o gráfico de uma função de x; então podemos escolher x como parâmetro e as equações de  $C_1$  se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$

Portanto

$$\int_{C_1} 2x \, ds = \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$= \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Em  $C_2$  escolhemos y como parâmetro, e as equações de  $C_2$  são

x = 1 y = y  $1 \le y \le 2$  $\int_{C_1} 2x \, ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} \, dy = \int_1^2 2 \, dy = 2$  $\int_{C} 2x \, ds = \int_{C} 2x \, ds + \int_{C} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$ Então 24:5 24:5

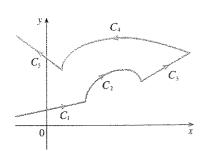


FIGURA 4 Curva lisa por trechos

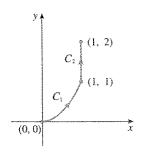


FIGURA 5  $C = C_1 \cup C_2$ 

1063

Qualquer interpretação física da integral de linha  $\int_C f(x, y) ds$  depende da interpretação física da função f. Suponha que  $\rho(x, y)$  represente a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com o formato de uma curva C. A massa da parte do arame do ponto  $P_{i-1}$  até  $P_i$  na Figura 1 é aproximadamente  $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ , e então a massa total do arame terá valor aproximado de  $\sum \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ . Tomando mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** m do arame como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*) \, \Delta s_i = \int_{C} \rho(x, y) \, ds$$

[Por exemplo: se  $f(x, y) = 2 + x^2y$  representa a densidade de um arame semicircular, então a integral do Exemplo 1 representa a massa do arame.] O **centro de massa** do arame com função densidade  $\rho$  está localizado no ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) \, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) \, ds$$

Outra interpretação física da integral de linha será discutida adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3  $\Box$  Um arame com o formato de um semicírculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \ge 0$ , é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto é proporcional à sua distância à reta y = 1.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \le t \le \pi$ , e determinamos que ds = dt. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante, e então a massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y) \, ds = \int_0^{\pi} k(1 - \sin t) \, dt$$
$$= k[t + \cos t]_0^{\pi} = k(\pi - 2)$$

Das Equações 4, temos

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_{C} y \rho(x, y) \, ds = \frac{1}{k(\pi - 2)} \int_{C} y k(1 - y) \, ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2} \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^{2} t) \, dt = \frac{1}{\pi - 2} \left[ -\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

Por simetria vemos que  $\bar{x} = 0$ , e o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right) \approx (0, 0.38)$$
 (Veja a Figura 6.)

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se  $\Delta s_i$  por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ou  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  na Definição 2. Elas são chamadas **integrais de linha de f ao longo de C com** relação a  $x \in y$ :

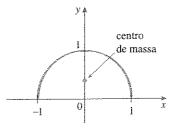


FIGURA 6

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y) \, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \, \Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original  $\int_C f(x, y) ds$  das Equações 5 e 6, chamamos a mesma de integral de linha com relação ao comprimento do arco.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t: x = x(t), y = y(t), dx = x'(t) dt, dy = y'(t) dt.

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Frequentemente ocorre de as integrais de linha com relação a x e y aparecerem juntas. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_{C} P(x, y) \, dx + \int_{C} Q(x, y) \, dy = \int_{C} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$

Quando estamos nos organizando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar em uma representação paramétrica para uma curva cuja descrição geométrica é dada. Em particular, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta, e portanto é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em  ${\bf r}_0$  e termina em  ${\bf r}_1$  é dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4  $\Box$  Calcule  $\int_C y^2 dx + x dy$ , onde (a)  $C = C_1$  é o segmento de reta de (-5, -3) a (0, 2) e (b)  $C = C_2$  é o arco de parábola  $x = 4 - y^2$  de (-5, -3) a (0, 2) (veja a Figura 7).

SOLUÇÃO

(a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5$$
  $y = 5t - 3$   $0 \le t \le 1$ 

(Use a Equação 8 com  $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$  e  $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$ .) Assim dx = 5 dt, dy = 5 dt, e a Fórmula 7 nos dá

$$\int_{C_1} y^2 dx + x dy = \int_0^1 (5t - 3)^2 (5 dt) + (5t - 5)(5 dt)$$

$$= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt$$

$$= 5 \left[ \frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

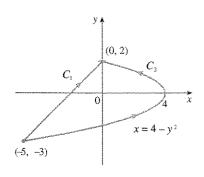


FIGURA 7

(b) Como a parábola é dada em função de y, vamos usar y como parâmetro e escrever  $C_2$ 

1065

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \le y \le 2$$

Então dx = -2y dy, e pela Fórmula 7, temos

$$\int_{C_2} y^2 dx + x dy = \int_{-3}^2 y^2 (-2y) dy + (4 - y^2) dy$$
$$= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy$$
$$= \left[ -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6}$$

Note que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Assim, em geral, o valor de uma integral de linha depende não somente dos pontos extremos da curva, como também da própria trajetória (veja a Seção 16.3 para condições nas quais a integral independe da trajetória).

Note também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se  $-C_1$  representa o segmento de reta que vai de (0, 2) a (-5, -3), você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \le t \le 1$$

que

como

$$\int_{-C_1} y^2 dx + x \, dy = \frac{5}{6}$$

Em geral, uma parametrização dada x = x(t), y = y(t),  $a \le t \le b$ , determina uma **orientação** de uma curva C, com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a t = b).

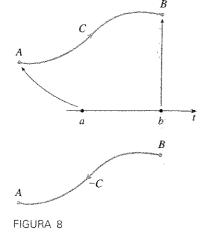
Se -C denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C, mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-c} f(x, y) \, dx = -\int_{c} f(x, y) \, dx \qquad \int_{-c} f(x, y) \, dy = -\int_{c} f(x, y) \, dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não mudará quando revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y) \, ds = \int_{C} f(x, y) \, ds$$

Isso é porque  $\Delta s_i$  é sempre positivo, enquanto  $\Delta x_i$  e  $\Delta y_i$  mudam de sinal quando revertemos a orientação de C.



## Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t)$$
  $y = y(t)$   $z = z(t)$   $a \le t \le b$ 

ou pela equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$ . Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito para curvas planas:

$$\int_{C} f(x, y, z) ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}) \Delta s_{i}$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto com notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial quando f(x, y, z) = 1, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (ver a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C com relação a  $x, y \in z$ . Por exemplo,

$$\int_{C} f(x, y, z) dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}) \Delta z_{i}$$
$$= \int_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano podemos calcular integrais da forma

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Calcule  $\int_C y \sec z \, ds$ , onde C é a hélice circular dada pelas equações  $x = \cos t$ ,  $y = \sec t$ , z = t,  $0 \le t \le 2\pi$  (veja a Figura 9).

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi$$

EXEMPLO 6  $\Box$  Calcule  $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$ , onde C consiste no segmento de reta  $C_1$  que une (2, 0, 0) a (3, 4, 5) seguido pelo segmento de reta vertical  $C_2$  de (3, 4, 5) a (3, 4, 0).

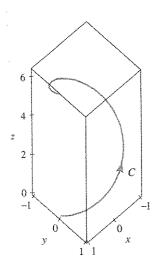


FIGURA 9

Yelen-

 $\begin{array}{c} (2,0,0) \\ (2,0,0) \\ \end{array}$ 

FIGURA 10

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a curva C. Usando a Equação 8, escrevemos  $C_1$  como

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2+t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t$$
  $y = 4t$   $z = 5t$   $0 \le t \le 1$ 

Então

$$\int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^1 (4t) \, dt + (5t)4 \, dt + (2+t)5 \, dt$$
$$= \int_0^1 (10+29t) \, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \bigg|_0^1 = 24,5$$

Da mesma maneira,  $C_2$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

ου

$$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \le t \le 1$$

Então dx = 0 = dy, logo

$$\int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^1 3(-5) \, dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_{C} y \, dx + z \, dy + x \, dz = 24.5 - 15 = 9.5$$

## Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se da Seção 6.4 do Volume I em que o trabalho feito por uma força f(x) que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é  $W = \int_a^b f(x) \, dx$ . Depois, na Seção 12.3, achamos que o trabalho feito por uma força constante  $\mathbf{F}$  para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$ , onde  $\mathbf{D} = PQ$  é o vetor deslocamento.

Suponha agora que  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$  é um campo de força contínuo no  $\mathbb{R}^3$ , tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1. (Um campo de força em  $\mathbb{R}^2$  pode ser visto como um caso especial onde R = 0 e P e Q dependem só de x e y.) Queremos calcular o trabalho exercido por essa força movimentando uma partícula ao longo de uma curva lisa C.

Dividimos C em subarcos  $P_{i-1}P_i$  com comprimentos  $\Delta s_i$  dividindo o intervalo do parâmetro [a, b] em subintervalos de mesmo tamanho (veja a Figura 1 para o caso bidimensional ou a Figura 11 para o caso tridimensional). Escolha  $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  no i-ésimo subarco correspondendo ao valor do parâmetro  $t_i^*$ . Se  $\Delta s_i$  é pequeno, o movimento da partícula de  $P_{i-1}$  para  $P_i$  na curva se processa aproximadamente na direção de  $T(t_i^*)$ , versor tangente a  $P_i^*$ . Então, o trabalho feito pela força F para mover a partícula de  $P_{i-1}$  para  $P_i$  é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

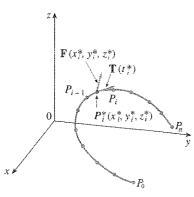


FIGURA 11

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ \mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \right] \Delta s_i$$

onde T(x, y, z) é o versor tangente ao ponto (x, y, z) sobre C. Intuitivamente podemos ver que essas aproximações devem ficar melhores quando n aumenta muito. Portanto definimos o **trabalho** W feito por um campo de força F como o limite da soma de Riemann dada por (11), ou seja,

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

A Equação 12 nos diz que o trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Se a curva C é dada pela equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , então  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ , e da Equação 9 podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  e ocorre também em outras áreas da física. Portanto podemos definir a integral de linha para um campo vetorial contínuo qualquer.

Tesinição Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t), a \le t \le b$ . Então a **integral de linha de F ao longo de** C é

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Quando usamos a Definição 13, devemos nos lembrar de que  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  é uma abreviação para  $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$ , e calculamos  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  tomando x = x(t), y = y(t) e z = z(t) na expressão de  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Note também que podemos formalmente escrever que  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$ 

EXEMPLO 7  $\circ$  Determine o trabalho feito pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} - xy \mathbf{j}$  para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ ,  $0 \le t \le \pi/2$ .

SOLUÇÃO Como  $x = \cos t e y = \sin t$ , temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \,\mathbf{i} - \cos t \, \sin t \,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t) dt$$
$$= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

☐ A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

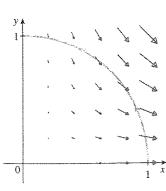


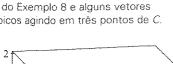
FIGURA 12

NOTA • Apesar de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocarem de sinal quando a orientação do carminho é invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque o versor tangente T é substituído por seu negativo quando C é trocado por -C.

☐ A Figura 13 mostra a cúbica torcida C do Exemplo 8 e alguns vetores típicos agindo em três pontos de C



EXEMPLO 8  $\Box$  Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x,y,z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$  e C é a cúbica retorcida dada por x = t  $y = t^2$   $z = t^3$   $0 \le t \le 1$ 

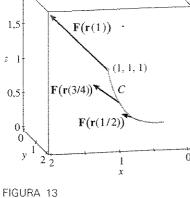
SOLUÇÃO Temos

Então

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3 \mathbf{i} + t^5 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$$



 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$  $= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{27}{28}$ 

Finalmente, notamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que um campo vetorial F em R3 seja dado sob a forma de componentes pela equação  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ . Usamos a Definição 13 para calcular sua integral de linha ao longo de C:

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_{a}^{b} (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot (x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}) dt$$

$$= \int_{a}^{b} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

Mas essa última integral é precisamente a integral de linha de (10). Portanto, temos

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} P \, dx + Q \, dy + R \, dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P \, \mathbf{i} + Q \, \mathbf{j} + R \, \mathbf{k}$$

Por exemplo: a integral  $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$  do Exemplo 6 poderia ser expressa como  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

## 16.2

#### Exercícios

1-16  $\Box$  Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. 
$$\int_C y \, ds$$
,  $C: x = t^2$ ,  $y = t$ ,  $0 \le t \le 2$ 

**2.** 
$$\int_C (y/x) ds$$
,  $C: x = t^4$ ,  $y = t^3$ ,  $\frac{1}{2} \le t \le 1$ 

3. 
$$\int_C xy^4 ds$$
, C é a metade direita do círculo  $x^2 + y^2 = 16$ 

**4.** 
$$\int_C ye^x ds$$
, C é o segmento de reta que liga (1, 2) a (4, 7)

5. 
$$\int_C (xy + \ln x) dy$$
,  
 $C \in \text{ o arco de parábola } y = x^2 \det(1, 1) \text{ a } (3, 9)$ 

6. 
$$\int_C xe^y dx,$$
C \(\epsilon\) o arco de curva  $x = e^y$  de  $(1, 0)$  a  $(e, 1)$ 

$$\int_C xy \, dx + (x - y) \, dy, \ C \text{ consiste nos segmentos de reta de } (0, 0) \text{ a } (2, 0) \text{ e de } (2, 0) \text{ a } (3, 2).$$

8. 
$$\int_C \sin x \, dx + \cos y \, dy$$
, C consiste na metade superior da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  de  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$  e o segmento de reta de  $(-1, 0)$  a  $(-2, 3)$ .

**9.** 
$$\int_C xy^3 ds$$
,  $C: x = 4 \sin t$ ,  $y = 4 \cos t$ ,  $z = 3t$ ,  $0 \le t \le \pi/2$ 

**10.** 
$$\int_C x^2 z \, ds$$
, C é o segmento de reta de  $(0, 6, -1)$  a  $(4, 1, 5)$ 

11. 
$$\int_C xe^{yz} ds$$
, C é o segmento de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 2, 3)$ 

**12.** 
$$\int_C (2x + 9z) ds$$
,  $C: x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**13.** 
$$\int_C x^2 y \sqrt{z} dz$$
,  $C: x = t^3$ ,  $y = t$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \le t \le 1$ 

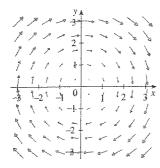
**14.** 
$$\int_C z \, dx + x \, dy + y \, dz$$
,  $C: x = t^2$ ,  $y = t^3$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**15.** 
$$\int_C (x + yz) dx + 2x dy + xyz dz$$
, C consiste nos segmentos de reta de  $(1, 0, 1)$  a  $(2, 3, 1)$  e de  $(2, 3, 1)$  a  $(2, 5, 2)$ 

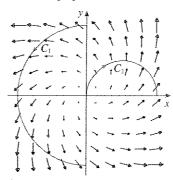
**16.** 
$$\int_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$$
, C consiste nos segmentos de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 2, -1)$ , e de  $(1, 2, -1)$  a  $(3, 2, 0)$ 

#### 17. Seja F o campo vetorial mostrado na figura.

(b) Se 
$$C_2$$
 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se  $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é positivo, negativo ou zero.



# **18.** A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas, $C_1$ e $C_2$ . As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre $C_1$ e $C_2$ são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19-22 ☐ Calcule a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde C é dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ .

**19.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = x^2 y^3 \mathbf{i} - y \sqrt{x} \mathbf{j}$$
,  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - t^3 \mathbf{j}$ ,  $0 \le t \le 1$ 

**20.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \, \mathbf{i} + xz \, \mathbf{j} + xy \, \mathbf{k},$$
  
 $\mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{i} + t^2 \, \mathbf{j} + t^3 \, \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$ 

**21.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + xz \mathbf{k},$$
  
  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$ 

22. 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} - x \mathbf{k},$$
  
 $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$ 

**23.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$
,  $C \in \mathbf{o}$  arco de círculo  $x^2 + y^2 = 4$  percorrido no sentido anti-horário de  $(2, 0)$  a  $(0, -2)$ 

**24.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$$
,  $C$  é a parábola de  $(-1, 2)$  a  $(1, 2)$ 

**25.** (a) Calcule a integral de linha 
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
, onde  $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\mathbf{i} + xy\mathbf{j} \in C \in \text{dado por } \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ,  $0 \le t \le 1$ .

(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar 
$$C$$
 e os vetores do campo vetorial correspondentes a  $t = 0$ ,  $1/\sqrt{2}$  e 1 (como na Figura 13).

**26.** (a) Calcule a integral de linha 
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
, onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{j} + y \mathbf{k} \in C$  é dado por  $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}, -1 \le t \le 1$ .

72 Z

(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a  $t = \pm 1$  e  $\pm \frac{1}{2}$  (como na Figura 13).

<sup>(</sup>a) Se  $C_1$  é o segmento de reta vertical de (-3, -3) a (-3, 3), determine se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é positivo, negativo ou zero.

- 27. Determine o valor exato de  $\int_C x^3 y^5 ds$ , onde C é a parte da astróide  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$  no primeiro quadrante.
- **28.** Determine o valor exato de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 e^y \mathbf{i} + \ln z \mathbf{j} + \sqrt{y^2 + z^2} \mathbf{k}$  e C é o segmento de reta entre (1, 2, 1) a (6, 4, 5).
  - **29.** Se  $C \notin$  a curva com equações paramétricas  $x = \ln t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $1 \le t \le 2$ , use uma calculadora ou CAS para calcular a integral de linha  $\int_C x \sec y \, ds$  com precisão até a terceira casa decimal.
  - **30.** (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$  sobre uma partícula que dá uma volta no círculo  $x^2 + y^2 = 4$  no sentido anti-horário.
    - (b) Utilize um sistema algébrico computacional para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta da parte (a).
  - **31.** Um arame fino é entortado no formato de uma semicircunferência  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \ge 0$ . Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.
  - **32.** Determine a massa e o centro de massa de um arame fino no formato de um quarto de círculo  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $x \ge 0$ ,  $y \ge 0$ , se a função densidade for  $\rho(x, y) = x + y$ .
  - **33.** (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  de um arame fino com função densidade  $\rho(x, y, z)$  e forma da curva espacial C.
    - (b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice x = 2 sen t,  $y = 2 \cos t$ , z = 3t,  $0 \le t \le 2\pi$ , se a densidade for uma constante k.
  - **34.** Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice x = t,  $y = \cos t$ ,  $z = \sin t$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ , se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da distância do ponto à origem.
  - **35.** Se um arame com densidade linear  $\rho(x, y)$  está sobre uma curva plana C, seu **momento de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos como

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) \, ds \qquad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) \, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

**36.** Se um arame com densidade linear  $\rho(x, y, z)$  está sobre uma curva espacial C, seu **momento de inércia** em relação aos eixos x, y e z são definidos como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, ds$$

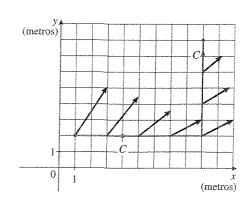
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 33.

Determine o trabalho realizado pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = x \mathbf{i} + (y + 2) \mathbf{j}$  para movimentar um objeto sobre um arco da ciclóide  $\mathbf{r}(t) = (t - \sec t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j}$ ,  $0 \le t \le 2\pi$ .

- **38.** Determine o trabalho realizado pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = x \operatorname{sen} y \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  para movimentar um objeto sobre a parábola  $y = x^2 \operatorname{de} (-1, 1)$  a (2, 4).
- **39.** Determine o trabalho realizado pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x + z, x + y \rangle$  sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta (1, 0, 0) a (3, 4, 2).
- 40. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição r = ⟨x, y, z⟩ é F(r) = Kr/|r|³, onde K é uma constante (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1). Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de (2, 0, 0) a (2, 1, 5).
- 21. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de pintura de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é feito pelo homem contra a gravidade para chegar ao topo?
- **42.** Suponha que haja um furo na lata de pintura do Exercício 41 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?
- 43. (a) Mostre que um campo de força constante realiza um trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência x² + y² = 1
  (b) Isso também é verdadeiro para um campo de força, F(x) = kx onde k é uma constante e x = (x, y)?
- 44. A base de uma cerca de raio 10 m é dada por x = 10 cos t, y = 10 sen t. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função h(x, y) = 4 + 0.01(x² y²), portanto a altura varia de 3m a 5m. Suponha que 1L de tinta cubra 100 m². Faça um esboço da cerca e determine quanto de tinta você necessitará para pintar os dois lados da cerca.
- 45. Um objeto se move sobre a curva C mostrada na figura de (1, 2) a (9, 8). Os comprimentos dos vetores do campo de força F são medidos em newtons pela escala dos eixos. Estime o trabalho realizado por F sobre o objeto.

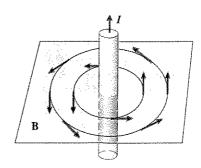


46. Experimentos mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético B que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio e cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e estabelece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e  $\mu_0$  é uma constante chamada permeabilidade do espaço livre. Tomando C como um círculo com raio r, mostre que a amplitude  $B = |\mathbf{B}|$  do campo magnético à distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



## **16.3** Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

Lembre-se da Seção 5.3 do Volume I em que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\int_a^b F'(x) \ dx = F(b) - F(a)$$

onde F' é contínua em [a, b]. A Equação 1 também é chamada Teorema da Variação Total: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente  $\nabla f$  da função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

[2] Teorema Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \le t \le b$ . Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente  $\nabla f$  é contínuo em C. Então

$$\int_{C} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

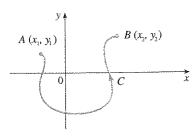
NOTA  $\Box$  O Teorema 2 nos diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) sabendo apenas o valor de f nos pontos terminais de C. De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de  $\nabla f$  é a variação total de f. Se f é uma função de duas variáveis e C, uma curva plana com início em  $A(x_1, y_1)$  e término em  $B(x_2, y_2)$ , como na Figura 1, o Teorema 2 fica

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C, uma curva espacial ligando o ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$  ao ponto  $B(x_2, y_2, z_2)$ , então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vamos provar o Teorema 2 nesse caso.



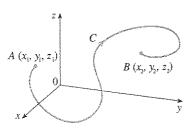


FIGURA 1

Prova de Teorama 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\int_{C} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_{a}^{b} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt \qquad \text{pela Regra da Cadeia}$$

$$= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1).

Apesar de termos provado o Teorema 2 para curvas lisas, ele também vale para curvas lisa por trecho. Isso pode ser visto subdividindo-se C em um número finito de curvas lisas e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 = Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

ao mover uma partícula com massa m do ponto (3, 4, 12) para o ponto (2, 2, 0) ao longo da curva lisa por trechos C (veja o Exemplo 4 da Seção 16.1).

SOLUÇÃO Da Seção 16.1 sabemos que  ${\bf F}$  é um campo vetorial conservativo e, de fato,  ${\bf F}=\nabla f$ , onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$W = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^{2} + 2^{2}}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^{2} + 4^{2} + 12^{2}}} = mMG \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$

## Independência do Caminho

Suponha que  $C_1$  e  $C_2$  sejam curvas lisas por trecho (chamadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto terminal B. Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral,  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que  $\nabla f$  for contínuo. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial conservativo depende somente dos pontos extremos da curva.

Em geral, se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho se  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  para quaisquer



FIGURA 2 Um curva fechada

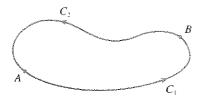


FIGURA 3

dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho.

Úma curva é dita **fechada** se seu ponto terminal coincide com seu ponto inicial, ou seja,  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$  (veja a Figura 2). Se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho  $C_1$  de A a B seguido de um caminho  $C_2$  de B a A (veja a Figura 3). Então

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_{2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_{2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que  $C_1$  e  $-C_2$  têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Por outro lado, se é verdade que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho, como segue. Tome quaisquer dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  de A a B em D e defina C como a curva constituída por  $C_1$  seguida por  $C_2$ . Então

$$0 = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_{2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_{2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Assim, provamos o seguinte teorema.

[3] Teorema  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em D se e somente se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todo caminho fechado C em D.

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo  $\mathbf{F}$  é independente do caminho, segue-se que  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir fata que *somente* campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele está estabelecido e provado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admitiremos que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existe uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, admitiremos que D seja **conexo**. Isso significa que quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em D.

[4] **Teorema** Suponha que  $\mathbf{F}$  seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D. Se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  for independente do caminho em D, então  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

Prova Seja A(a, b) um ponto fixo em D. Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para qualquer ponto (x, y) em D. Como  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho, não interessa qual o caminho de integração utilizado entre (a, b) e (x, y) para definir f(x, y). Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y). Escolha qualquer ponto  $(x_1, y)$  na bola aberta com  $x_1 < x$  e considere C como qualquer caminho  $C_1$  de (a, b) a  $(x_1, y)$  seguido pelo segmento de reta horizontal  $C_2$  de  $(x_1, y)$  a (x, y) (veja a Figura 4). Então

$$f(x,y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

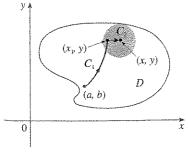


FIGURA 4

Note que a primeira dessas integrais não depende de x, e assim

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevermos  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ , então

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P \, dx + Q \, dy$$

Sobre  $C_2$ , y é constante, dy = 0. Usando t como parâmetro, onde  $x_1 \le t \le x$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_1} P \, dx + Q \, dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) \, dt = P(x, y)$$

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3 no Volume I). Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_1} P \, dx + Q \, dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t) \, dt = Q(x, y)$$

Então

$$\mathbf{F} = P \,\mathbf{i} + Q \,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x} \,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \,\mathbf{j} = \nabla f$$

que mostra que F é conservativo.

Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial é conservativo ou não? Suponha que saibamos que  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$  seja conservativo, onde  $P \in Q$  tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}$$
 e  $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ 

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

**5 Teorema** Se  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y) \mathbf{i} + Q(x,y) \mathbf{j}$  é um campo vetorial conservativo, onde  $P \in Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

O recíproco do Teorema 5 só é verdadeiro para um tipo especial de região. Para explicar isso precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se intercepta em nenhum ponto entre os pontos terminais. [Veja a Figura 6;  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$  para uma curva simples fechada, mas  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$  quando  $a < t_1 < t_2 < b$ .]

No Teorema 4 precisamos de região conexa. Para o próximo teorema precisaremos de uma condição mais forte. Uma região simplesmente conexa em um plano é uma região

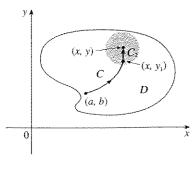


FIGURA 5

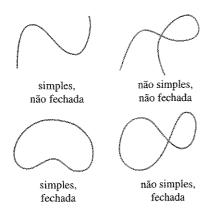
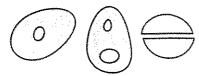


FIGURA 6
Tipos de curvas



região simplesmente conexa



regiões que não são simplesmente conexas

FIGURA 7

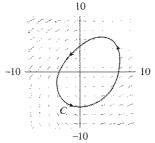


FIGURA 8

As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar basicamente para a mesma direção que C. Assim parece que  $[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$  e portanto  $\mathbf{F}$  não é conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C1 e C2 na Figura 9 anontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam 0. O Exemplo 3 mostra que de fato F é conservativo.

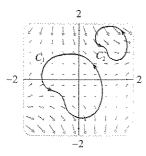


FIGURA 9

conexa *D* tal que toda curva simples fechada em *D* contorna somente pontos que estão em *D*. Note que, da Figura 7, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Para regiões simplesmente conexas podemos estabelecer o recíproco do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção como conseqüência do Teorema de Greens.

Seja  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$  um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
 por toda a região D

Então F é conservativo.

EXEMPLO 2 - Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja P(x, y) = x - y e Q(x, y) = x - 2. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como  $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ , pelo Teorema 5, **F** não é conservativo.

EXEMPLO 3 

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja P(x, y) = 3 + 2xy e  $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$ . Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de  $\mathbf{F}$  é o plano inteiro  $(D = \mathbb{R}^2)$ , que é aberto e simplesmente conexo. Portanto podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que  $\mathbf{F}$  é conservativo.

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que  $\mathbf{F}$  é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . A prova do Teorema 4 dá indícios de como encontrar f. Usamos "integração parcial", como no exemplo a seguir.

FYFMPIOAC

- (a) Se  $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 3y^2)\mathbf{j}$ , determine uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .
- (b) Calcule a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde C é a curva dada por
- $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}, \ 0 \le t \le \pi.$

SOLUÇÃO

(a) Do Exemplo 3 sabemos que  $\mathbf{F}$  é conservativo, e assim existe uma função f com  $\nabla f = \mathbf{F}$ , ou seja,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

$$f_{\nu}(x,y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando (7) com relação a x, obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Note que a constante de integração é uma constante em relação a x, ou seja, uma função de y, que chamamos g(y). Em seguida diferenciamos ambos os lados de (9) em relação a y:

$$f_{v}(x, y) = x^{2} + g'(y)$$

Comparando (8) e (10), vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em (9), temos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicar o Teorema 2 devemos conhecer os pontos inicial e final de C, ou seja,  $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$  e  $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$ . Na expressão para f(x, y) da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos K = 0. Assim temos

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1)$$
$$= e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2.

Um critério para determinar se um campo vetorial  $\mathbf{F}$  em  $\mathbb{R}^3$  é ou não conservativo será dado na Seção 16.5. Enquanto isso, o próximo exemplo mostra que a técnica para achar funções potenciais é muito semelhante à utilizada para campos vetoriais em  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + (2xy + e^{3z}) \mathbf{j} + 3ye^{3z} \mathbf{k}$ , determine uma função f tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

SOLUÇÃO Se existe tal função f, então

$$f_x(x, y, z) = y^2$$

$$f_{y}(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Integrando (11) em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

onde g(y, z) é uma constante em relação a x. Então, diferenciando (14) em relação a y, temos

$$f_{v}(x, y, z) = 2xy + g_{v}(y, z)$$

e, comparando com (12), vem

$$g_{\nu}(y,z)=e^{3z}$$

Então,  $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$  e reescrevemos (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, diferenciando em relação a z e comparando com (13), obtemos h'(z) = 0 e, portanto, h(z) = K, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

## Conservação de Energia

Vamos aplicar as idéias deste capítulo para um campo de forças contínuo  $\mathbf{F}$  que move um objeto ao longo de uma trajetória C dada por  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \le t \le b$ , onde  $\mathbf{r}(a) = A$  é o ponto inicial e  $\mathbf{r}(b) = B$  é o ponto terminal de C. Pela Segunda Lei do Movimento de Newton (veja a Seção 13.4), a força  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  em um ponto de C está relacionada com a aceleração  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$  pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$W = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_{a}^{b} m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \right] dt \qquad \text{(Teorema 13.2.3, Formula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} \left| \mathbf{r}'(t) \right|^{2} dt$$

$$= \frac{m}{2} \left[ \left| \mathbf{r}'(t) \right|^{2} \right]_{a}^{b} \qquad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2} \left( \left| \mathbf{r}'(b) \right|^{2} - \left| \mathbf{r}'(a) \right|^{2} \right)$$

Portanto

$$W = \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m |\mathbf{v}(a)|^2$$

onde  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$  é a velocidade.

A quantidade  $\frac{1}{2}m |\mathbf{v}(t)|^2$ , ou seja, metade da massa vezes o quadrado da rapidez, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto podemos reescrever a Equação 15 como

$$W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nos pontos terminais de C.

Agora vamos admitir que  $\mathbf{F}$  seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é definida como P(x, y, z) = -f(x, y, z), e temos  $\mathbf{F} = -\nabla P$ . Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \nabla P \cdot d\mathbf{r}$$
$$= -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))]$$
$$= P(A) - P(B)$$

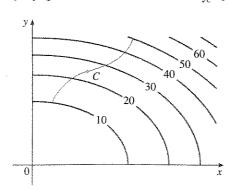
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

## 16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ .



É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine ∫<sub>C</sub> ∇f · dr, onde C tem equações paramétricas x = t² + 1, y = t³ + t, 0 ≤ t ≤ 1.

| x y | 0 | 1 | 2 |
|-----|---|---|---|
| 0   | 1 | 6 | 4 |
| 1   | 3 | 5 | 7 |
| 2   | 8 | 2 | 9 |

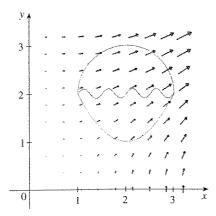
3-10  $\Box$  Determine se **F** é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

- **3.**  $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y)\mathbf{i} + (5x + 4y)\mathbf{j}$
- **4.**  $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\mathbf{i} + (4xy y^3)\mathbf{j}$
- 5.  $F(x, y) = xe^{y}i + ye^{x}j$
- **6.**  $\mathbf{F}(x, y) = e^{y} \mathbf{i} + x e^{y} \mathbf{j}$
- 7.  $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y y \cos x) \mathbf{i} + (-x^2 \sin y \sin x) \mathbf{j}$
- 8.  $\mathbf{F}(x, y) = (1 + 2xy + \ln x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

**9.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \sin y) \mathbf{i} + (e^x + x \cos y) \mathbf{j}$$

**10.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \sinh xy) \mathbf{i} + (x^2 \cosh xy) \mathbf{j}$$

- 11. A figura mostra o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$  e três curvas que começam em (1, 2) e terminam em (3, 2).
  - (a) Explique por que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  tem o mesmo valor para as três curvas.
  - (b) Qual é esse valor comum?



12-18  $\equiv$  (a) Determine uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$  e (b) use a parte (a) para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  sobre a curva C dada.

- 12.  $\mathbf{F}(x, y) = y \mathbf{i} + (x + 2y) \mathbf{j}$ ,  $C \notin$  a semicircunferência superior que começa em (0, 1) e termina em (2, 1)
- **13.**  $\mathbf{F}(x, y) = x^3 y^4 \mathbf{i} + x^4 y^3 \mathbf{j},$   $C: \mathbf{r}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + (1 + t^3) \mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
- **14.**  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y^2}{1 + x^2} \mathbf{i} + 2y \arctan x \mathbf{j},$ C:  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
- **15.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \, \mathbf{i} + xz \, \mathbf{j} + (xy + 2z) \, \mathbf{k}$ , C é o segmento de reta de (1, 0, -2) a (4, 6, 3)
- **16.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\mathbf{k}$ , C:  $x = t^2$ , y = t + 1, z = 2t - 1,  $0 \le t \le 1$
- 17.  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z \, \mathbf{i} + 2xy \cos z \, \mathbf{j} xy^2 \sin z \, \mathbf{k}$ , C:  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
- **18.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y}\mathbf{i} + xe^{y}\mathbf{j} + (z + 1)e^{z}\mathbf{k}$ , C:  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ,  $0 \le t \le 1$

13-28  $\Box$  Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

- 19.  $\int_C \operatorname{tg} y \, dx + x \sec^2 y \, dy$ , C é qualquer caminho de (1,0)a  $(2, \pi/4)$
- **20.**  $\int_C (1 ye^{-x}) dx + e^{-x} dy$ , C é qualquer caminho de (0, 1)

23-22 Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força F movendo um objeto de P a Q.

**21.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\mathbf{j}; P(1, 1), Q(2, 4)$$

**22.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2/x^2)\mathbf{i} - (2y/x)\mathbf{j}; P(1, 1), Q(4, -2)$$

23. O campo vetorial mostrado na figura é conservativo? Explique.

 $24-25 \square$  A partir do gráfico de F você diria que ele é conservativo? Verifique se seu palpite estava correto.

**24.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy + \sin y) \mathbf{i} + (x^2 + x \cos y) \mathbf{j}$$

**25.** 
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(x - 2y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

**26.** Seja  $\mathbf{F} = \nabla f$ , onde  $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$ . Determine as curvas  $C_1$  e  $C_2$  que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

(a) 
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$
 (b)  $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$ 

(b) 
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$$

27. Mostre que, se um campo vetorial  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k} \in$ conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

28. Use o Exercício 27 para mostrar que a integral de linha  $\int_C y \, dx + x \, dy + xyz \, dz$  não é independente do caminho.

29-32 □ Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo e (c) simplesmente conexo.

**29.** 
$$\{(x,y) | x > 0, y > 0\}$$

- **30.**  $\{(x,y) | x \neq 0\}$
- **31.**  $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
- **32.**  $\{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1 \text{ ou } 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$

**33.** Seja  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y \, \mathbf{i} + x \, \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ .

- (a) Mostre que  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ .
- (b) Mostre que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  não é independente do caminho. [Dica: Calcule  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $C_1 = C_2$  são as metades superior e inferior do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  de (1, 0) a (-1, 0).] Isso contraria o Teorema 6?

**34.** (a) Suponha que **F** seja um campo vetorial quadrado inverso, ou seja,

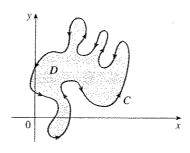
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c, onde  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ . Determine o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  ao mover um objeto de um ponto  $P_1$  por um caminho para um ponto  $P_2$  em termos da distância  $d_1$  e  $d_2$  desses pontos à origem.

- (b) Um exemplo de um campo quadrado inverso é o campo gravitacional F = −(mMG)r/|r|³ discutido no Exemplo 4 da Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move
- do afélio (em uma distância máxima em relação ao Sol de  $1,52\times10^8$  km) ao periélio (em uma distância mínima
- de 1.47,  $\times$  10<sup>8</sup> km). (Use os valores  $m = 5.97 \times 10^{24}$  kg,  $M = 1.99 \times 10^{30}$  kg, e  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.)
- (c) Outro exemplo de um campo quadrado inverso é o campo elétrico E = εqQr/| r | 3 discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de -1,6 × 10<sup>-19</sup> C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10<sup>-12</sup> m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor ε = 8,985 × 10<sup>10</sup>.)

## **16.4** Teorema de Green

D O FIGURA 1 O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região D do plano cercada por C. (Veja a Figura 1. Admitiremos que D consiste em todos os pontos dentro de C além dos pontos sobre C.) Para enunciar o Teorema de Green usaremos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C se refere a percorrer C no sentido anti-horário apenas uma vez. Assim, se C for dado como uma função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \le t \le b$ , então a região D está à esquerda quando o ponto  $\mathbf{r}(t)$  percorrer C (veja a Figura 2).



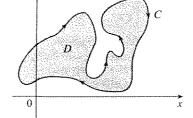


FIGURA 2

(a) Orientação positiva

(b) Orientação negativa

 $\square$  Recorde-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ .

Teoreme de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_{C} P \, dx + Q \, dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

NOTA □ A notação

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy \qquad \text{ou} \qquad \oint_C P \, dx + Q \, dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada *C*. Outra notação da orientação positiva da curva fronteira de

D é  $\partial D$ , assim a equação no Teorema de Green pode ser escrita como

$$\iint\limits_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como a contrapartida do Teorema Fundamental do Cálculo para de integrais duplas. Compare a Equação 1 com o estabelecido pelo Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x) \ dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas  $(F', \partial Q/\partial x e \partial P/\partial y)$  do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos o lado direito envolve valores da função original (F, Q e P) somente sobre a *fronteira* da região. (No caso unidimensional, a região é um intervalo [a, b] cuja fronteira é constituída apenas pelos dois pontos a e b.)

O Teorema de Green não é fácil de provar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma prova para o caso especial onde a região é tipo I ou tipo II (veja a Seção 15.3). A essas regiões, vamos chamar **regiões simples**.

Prova do Teorema de Green no Caso Onde D É uma Região Simples Note que o Teorema de Green estará provado se mostrarmos que

$$\int_{C} P \, dx = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} \, dA$$

 $\int_{C} Q \, dy = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA$ 

Vamos provar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_{a}^{b} \int_{g_{1}(x)}^{g_{2}(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_{a}^{b} \left[ P(x, g_{2}(x)) - P(x, g_{1}(x)) \right] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união de quatro curvas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  mostradas na Figura 3. Sobre  $C_1$  tomamos como parâmetro x e escrevemos as equações paramétricas como x = x,  $y = g_1(x)$ ,  $a \le x \le b$ . Assim

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que  $C_3$  vai da direita para a esquerda, mas  $-C_3$  vai da esquerda para a direita, e podemos escrever as equações paramétricas de  $-C_3$  como x = x,  $y = g_2(x)$ ,  $a \le x \le b$ . Portanto

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = -\int_{-C_1} P(x, y) dx = -\int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

O Teorema de Green recebeu esse nome em homenagem ao cientista inglês autodidata George Green (1793-1841), que trabalhava período integral na padaria do pai desde os 9 anos e aprendeu matemática em livros de biblioteca. Em 1828, Green publicou An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, com 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) localizou uma cópia dos ensaios de Green, compreendeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu trabalho serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

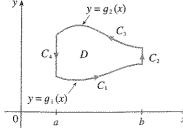


FIGURA 3

1083

53

Sobre  $C_2$  ou  $C_4$  (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante, e assim dx = 0 e

$$\int_{C_2} P(x, y) \, dx = 0 = \int_{C_3} P(x, y) \, dx$$

Portanto

$$\int_{C} P(x, y) dx = \int_{C_{1}} P(x, y) dx + \int_{C_{2}} P(x, y) dx + \int_{C_{3}} P(x, y) dx + \int_{C_{4}} P(x, y) dx$$

$$= \int_{a}^{b} P(x, g_{1}(x)) dx - \int_{a}^{b} P(x, g_{2}(x)) dx$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_{C} P(x, y) dx = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

A Equação 3 pode ser provada de forma semelhante, exprimindo *D* como região do tipo II (veja o Exercício 28). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green.

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Calcule  $\int_C x^4 dx + xy dy$ , onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1) e de (0, 1) a (0, 0).

SOLUÇÃO Apesar de essa integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, o que envolveria estabelecer três integrais separadas sobre os três lados do triângulo, vamos, em vez disso, usar o Teorema de Green. Note que a região D cercada por C é simples e C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos  $P(x, y) = x^4$  e Q(x, y) = xy, então teremos

$$\int_{C} x^{4} dx + xy \, dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} (y - 0) \, dy \, dx$$
$$= \int_{0}^{1} \left[ \frac{1}{2} y^{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (1 - x)^{2} dx$$
$$= -\frac{1}{6} (1 - x)^{3} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

EXEMPLO 2  $\Box$  Calcule  $\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$ , onde C é o círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo  $x^2 + y^2 \le 9$ , então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen}x}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$$

$$= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( 7x + \sqrt{y^4 + 1} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( 3y - e^{\operatorname{sen}x} \right) \right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \, dr = 36\pi$$

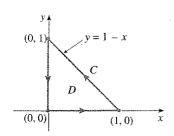


FIGURA 4

☐ Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que *D* é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_{D} 4 \, dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

Nos Exemplos 1 e 2 consideramos que a integral dupla era mais facilmente calculada como uma integral de linha. (Tente escrever a integral de linha do Exemplo 2 e você ficará convencido rapidamente!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesse caso, usamos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo: se sabemos que P(x, y) = Q(x, y) = 0 sobre uma curva C, então o Teorema de Green nos dá

$$\iint\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C} P \, dx + Q \, dy = 0$$

não interessando os valores das funções P e Q em D.

Outra aplicação da direção reversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região  $D \in \iint_D 1 \, dA$ , desejamos escolher  $P \in Q$  de modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0$$
  $P(x, y) = -y$   $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$   
 $Q(x, y) = x$   $Q(x, y) = 0$   $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ 

Então, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D:

$$A = \oint_C x \, dy = -\oint_C y \, dx = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx$$

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Determine a área delimitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas  $x = a \cos t$  e  $y = b \sin t$ , onde  $0 \le t \le 2\pi$ . Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$A = \frac{1}{2} \int_{C} x \, dy - y \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t) \, dt - (b\sin t)(-a\sin t) \, dt$$

$$= \frac{ab}{2} \int_{0}^{2\pi} dt = \pi ab$$

Fred Sock

Apesar de termos provado o Teorema de Green somente no caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo: se D é uma região como mostrado na Figura 5, então podemos escrever  $D = D_1 \cup D_2$ , onde  $D_1$  e  $D_2$  são ambas simples. A fronteira de  $D_1$  é  $C_1 \cup C_3$  e a fronteira de  $D_2$  é  $C_2 \cup (-C_3)$ . Assim, aplicando o Teorema de Green para  $D_1$  e  $D_2$  separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P \, dx + Q \, dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_3 \cup (-C_3)} P \, dx + Q \, dy = \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

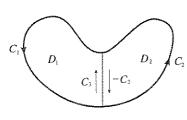


FIGURA 5

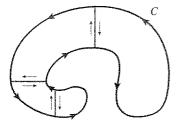


FIGURA 6

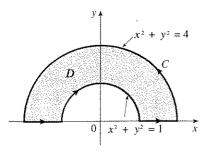


FIGURA 7

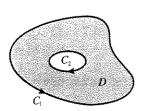


FIGURA 8

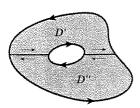


FIGURA 9

Se somarmos essas duas equações, a integral de linha sobre  $C_3$  e  $-C_3$  se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P \, dx + Q \, dy = \iint_{S} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para  $D = D_1 \cup D_2$ , uma vez que sua fronteira é  $C = C_1 \cup C_2$ . O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples (veja a Figura 6).

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Calcule  $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$ , onde C é a fronteira da região semi-anular D contida no semiplano superior entre os círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

SOLUÇÃO Note que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide-a em duas regiões simples (veja a Figura 7). Com coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le \pi\}$$

Portanto o Teorema de Green fornece

$$\int_C y^2 dx + 3xy \, dy = \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (3xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA$$

$$= \iint_D y \, dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_1^2 r^2 dr = \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3}$$

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 8 é constituída por duas curvas fechadas simples  $C_1$  e  $C_2$ . Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região D esteja à esquerda quando percorremos a curva C. Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa  $C_1$  mas é horária na curva interna  $C_2$ . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' pela introdução das retas mostradas na Figura 9 e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'', obteremos

$$\iint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$
$$= \int_{\partial D'} P \, dx + Q \, dy + \int_{\partial D'} P \, dx + Q \, dy$$

Como a integral de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P \, dx + Q \, dy + \int_{C_2} P \, dx + Q \, dy = \int_{C} P \, dx + Q \, dy$$

que é o Teorema de Green para a região D.

**EXEMPLO 5**  $\Box$  Se  $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ , mostre que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$  para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado arbitrário contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Vamos então considerar um círculo,

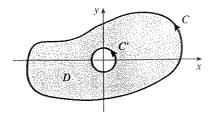


FIGURA 10

percorrido no sentido anti-horário C' com centro na origem e raio a, onde a é escolhido pequeno o suficiente para que C' esteja inteiramente contido em C (veja a Figura 10). Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva da fronteira é  $C \cup (-C')$  e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\int_{C} P \, dx + Q \, dy + \int_{-C} P \, dx + Q \, dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_{D} \left[ \frac{y^{2} - x^{2}}{(x^{2} + y^{2})^{2}} - \frac{y^{2} - x^{2}}{(x^{2} + y^{2})^{2}} \right] dA$$

$$= 0$$

Portanto

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_{C'} P \, dx + Q \, dy$$

ou seja,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \mathbf{i} + a \sin t \, \mathbf{j}, \, 0 \le t \le 2\pi$ . Então

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0}^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^{2} \cos^{2} t + a^{2} \operatorname{sen}^{2} t} dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado que foi afirmado na seção anterior.

Esboço da Prova do Teorema 16.3.6 Estamos admitindo que  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$  é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D, que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
 em todo o D

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C, o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 \, dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se intercepta em um ou mais pontos e pode ser quebrada em um certo número de curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de  $\mathbf{F}$  sobre essas curvas simples são todas 0, e somando essas integrais podemos ver que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para qualquer curva fechada C. Portanto,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue-se então que  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial conservativo.

## 164

#### Exercícios

1-4 🗆 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

- $1. \oint_C xy^2 dx + x^3 dy,$ C é o retângulo com vértices (0, 0), (2, 0), (2, 3) e (0, 3)
- $2. \oint_C y \, dx x \, dy,$ C é o círculo com centro na origem e raio 1
- C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)
  - **4.**  $\oint_C x \, dx + y \, dy$ , C consiste nos segmentos de reta de (0, 1) a (0, 0) e de (0, 0) a (1, 0) e na parábola  $y = 1 - x^2$  de (1, 0) a (0, 1)

5-6 □ Verifique o Teorema de Green, usando um sistema algébrico computacional para calcular tanto a integral de linha como a

- **5.**  $P(x, y) = x^4 y^5$ ,  $Q(x, y) = -x^7 y^6$ , C é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$
- **6.**  $P(x, y) = y^2 \sin x$ ,  $Q(x, y) = x^2 \sin y$ , C é formado pelo arco da parábola  $y = x^2$  de (0, 0) a (1, 1)seguido do segmento de reta de (1, 1) a (0, 0)

7-12 
Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

- 7.  $\int_C e^y dx + 2xe^y dy,$  $\widetilde{C}$  é o quadrado de lados x = 0, x = 1, y = 0 e y = 1
- **8.**  $\int_C x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$ , C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 3) e (0, 3)

2 4 8 4 2 3

- **9.**  $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$ , C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas  $y = x^2$  e
- 10.  $\int_C xe^{-2x} dx + (x^4 + 2x^2y^2) dy,$ C é a fronteira da região entre as circunferências  $x^2 + y^2 = 1$
- $\int_C y^3 dx x^3 dy, \quad C \notin \text{ o círculo } x^2 + y^2 = 4$
- 12.  $\int_{C} \sin y \, dx + x \cos y \, dy$ ,  $C \notin \text{a elipse } x^2 + xy + y^2 = 1$

13-16  $\square$  Use o teorema de Green para calcular  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

- **13.**  $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$ , C consiste no arco de curva  $y = \operatorname{sen} x \operatorname{de} (0, 0) \operatorname{a} (\pi, 0) \operatorname{e} \operatorname{do}$ segmento de reta  $(\pi, 0)$  a (0, 0)
- **14.**  $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \sin x \rangle$ , C é o triângulo de (0, 0) a (2, 6) a (2, 0) a (0, 0)

**15.**  $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2y, e^y - xy^2 \rangle$ ,  $C \notin \text{a circunferência}$  $x^2 + y^2 = 25$  orientada no sentido horário

**16.**  $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2 \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \rangle$ ,  $C \in a$ circunferência  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$  orientada no sentido anti-horário

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$  ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até (1,0), em seguida ao longo de um segmento de reta até (0, 1), e então de volta à origem ao longo do eixo y.

**18.** Uma partícula inicialmente no ponto (-2, 0) se move ao longo do eixo x até (2, 0), e então ao longo da semicircunferência  $y = \sqrt{4 - x^2}$  até o ponto inicial. Utilíze o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$ .

19. Use uma das fórmulas em (5) para achar a área sob um arco da ciclóide  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ .

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência  $x^2 + y^2 = 16$ , um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada epiciclóide, com equações paramétricas  $x = 5 \cos t - \cos 5t$ ,  $y = 5 \sin t - \sin 5t$ . Faça o gráfico da epiciclóide e use (5) para calcular a área da região que ela envolve.

(a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto  $(x_1, y_1)$  ao ponto  $(x_2, y_2)$ , mostre que

$$\int_C x \, dy - y \, dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$  mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

- (c) Determine a área do pentágono com vértices (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) e (-1, 1).
- **22.** Seja D a região limitada por um caminho simples fechado Cno plano xy. Utilize o Teorema de Green para provar que as coordenadas do centróide  $(\bar{x}, \bar{y})$  de D são

$$\overline{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy \qquad \overline{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$
 onde  $A \notin a$  área de  $D$ .

- 23. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide do triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1).
- 24. Utilize o Exercício 22 para achar o centrójde de uma região semicircular de raio a.
- **25.** Uma lâmina plana com densidade constante  $\rho(x, y) = \rho$  ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy$$

- **26.** Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante  $\rho$  em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)
- Se **F** é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todo caminho fechado simples que não passa nem contém a origem.
- 28. Complete a prova do Teorema de Green provando a Equação 3.
- 29. Utilize o Teorema de Green para provar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.9.9) para o

caso onde f(x, y) = 1:

$$\iint\limits_{R} dx \, dy = \iint\limits_{S} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$$

Aquí R é a região do plano xy que corresponde à região S do plano uv sob a transformação dada por x = g(u, v), y = h(u, v).

[Dica: note que o lado esquerdo é A(R) e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre  $\partial R$  para uma integral sobre  $\partial S$  e aplique o Teorema de Green no plano uv.]

## 16.5

### Rotacional e Divergência

Nesta seção definimos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais que são básicas nas aplicações de cálculo vetorial à mecânica dos fluidos e à eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma diferenciação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.



Se  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  definido por

1 rot 
$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Como ajuda à nossa memória, vamos reescrever a Equação 1, usando notação de operador. Introduziremos o operador diferencial vetorial  $\nabla$  ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Ele tem a propriedade de, quando operando sobre uma função escalar, produzir o gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i} \, \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \, \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se pensarmos em  $\nabla$  como um vetor com componentes  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  e  $\partial/\partial z$ , podemos considerar o produto vetorial formal de  $\nabla$  pelo campo vetorial F, como segue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$
$$= \text{rot } \mathbf{F}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

EXEMPLO 1  $\subseteq$  Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$ , determine o rotacional de  $\mathbf{F}$ . SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

rot 
$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial y} (-y^2) - \frac{\partial}{\partial z} (xyz) \right] \mathbf{i} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-y^2) - \frac{\partial}{\partial z} (xz) \right] \mathbf{j}$$

$$+ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xyz) - \frac{\partial}{\partial y} (xz) \right] \mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy) \mathbf{i} - (0 - x) \mathbf{j} + (yz - 0) \mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$$

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é  $\mathbf{0}$ .

 $\fbox{3}$  Teorema Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$rot^{-}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

Prova Temos

$$\operatorname{rot} (\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$
$$= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}$$
$$= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

pelo Teorema de Clairaut.

Como um campo vetorial conservativo é tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ , o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Se  $\mathbf{F}$  conservativo, então rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

E acabamos de obter um modo de verificar se um campo vetorial é conservativo ou não.

☐ A maioria dos sistemas algébricos computacionais tem um comando para calcular rotacional e divergente de campos vetoriais. Se você tem acesso a um CAS, use esses comandos para verificar as respostas dos exemplos e exercícios desta seção.

□ Compare isso com o Exercício 27 da

Seção 16.3.

 $\square$  Note a semelhança com o que sabemos da Seção 12.4:  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  para todo vetor tridimensional  $\mathbf{a}$ .

EXEMPLO 2  $\subseteq$  Mostre que o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$  não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1 mostramos que

rot 
$$\mathbf{F} = -y(2+x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$  e portanto, pelo Teorema 3,  $\mathbf{F}$  não é conservativo.

Em geral, o recíproco do Teorema 3 não é verdadeiro, mas o próximo teorema estabelece que, se F for definido em todo o espaço, o recíproco vale. (Mais especificamente, o recíproco vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".) O Teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua prova requer o Teorema de Stokes, e um esboço dela será apresentado no final da Seção 16.8.

il Teorema Se  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial definido sobre todo  $\mathbb{R}^3$  cujas funções componentes têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial conservativo.

#### EXEMPLO 3 =

- (a) Mostre que  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$  é um campo vetorial conservativo.
- (b) Determine uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

#### SOLUÇÃO

(a) Calculemos o rotacional de F:

rot 
$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix}$$
  
=  $(6xyz^2 - 6xyz^2)\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k}$   
=  $\mathbf{0}$ 

Como rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  e o domínio de  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$  e um campo vetorial conservativo pelo Teorema 4.

(b) A técnica para achar f foi dada na Seção 16.3. Temos

$$f_x(x, y, z) = y^2 z^3$$

$$f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

$$f_c(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Integrando (5) em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = xy^{2}z^{3} + q(y, z)$$

Diferenciando (8) em relação a y obtemos  $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$ , e comparando com (6) temos  $g_y(y, z) = 0$ . Então, g(y, z) = h(z) e

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

200

Então, de (7) temos h'(z) = 0. Portanto

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

A razão para o nome rotacional é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão está explicada no Exercício 35. Outra ocorre quando  $\mathbf{F}$  representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (ver Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot  $\mathbf{F}$  (x, y, z), e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  no ponto P, então o fluido não gira em P e  $\mathbf{F}$  é chamado **irrotacional** em P. Em outras palavras, não existe redemoinho ou sorvedouro em P. Se rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , uma pequena roda com pás deslizaria com o fluido, mas não rodaria em redor de seu eixo. Se rot  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ , a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Damos mais detalhes dessa explanação na Seção 16.8 como consequência do Teorema de Stokes.

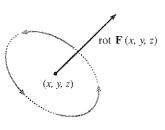


FIGURA 1

## Divergência

Se  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e existem  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial Q/\partial y$  e  $\partial R/\partial z$ , então a **divergência de F** é a função de três variáveis definida por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que rot  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial, mas div  $\mathbf{F}$  é um campo escalar. Em termos do operador gradiente  $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$ , a divergência de  $\mathbf{F}$  pode ser escrita simbolicamente como o produto escalar de  $\nabla$  e  $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$ , ache div  $\mathbf{F}$ .

SOLUÇÃO Pela definição de divergência (Equação 9 ou 10), temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (xz) + \frac{\partial}{\partial y} (xyz) + \frac{\partial}{\partial z} (-y^2)$$
$$= z + xz$$

Se  ${\bf F}$  é um campo vetorial sobre  ${\mathbb R}^3$ , então rot  ${\bf F}$  também é um campo vetorial sobre  ${\mathbb R}^3$ . Como tal, podemos calcular sua divergência. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

**Teorema** Se  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

div rot 
$$\mathbf{F} = 0$$

Prova Usando as definições de divergência e rotacional ternos

□ Note a analogia com o produto misto  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ .

div rot 
$$\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$
  

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}$$

$$= 0$$

porque os termos se cancelam aos pares pelo Teorema de Clairaut.

**EXEMPLO 5**  $\square$  Mostre que o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} - y^2 \mathbf{k}$  não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja,  $\mathbf{F} \neq \text{rot } \mathbf{G}$ .

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = z + xz$$

e portanto div  $\mathbf{F} \neq 0$ . Se fosse verdade que  $\mathbf{F} = \mathrm{rot} \; \mathbf{G}$ , pelo Teorema 11, teríamos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$$

que contradiz div  $\mathbf{F} \neq 0$ . Portanto  $\mathbf{F}$  não é o rotacional de outro campo vetorial.

Novamente, a razão para o nome divergência pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se  $\mathbf{F}(x, y, z)$  é a velocidade de um líquido (ou gás), então div  $\mathbf{F}(x, y, z)$  representa a taxa líquida de variação (com relação ao tempo) da massa do líquido (ou gás) fluindo no ponto (x, y, z) por unidade de volume. Em outras palavras, div  $\mathbf{F}(x, y, z)$  mede a tendência de o fluido diferir do ponto (x, y, z). Se div  $\mathbf{F} = 0$ , então  $\mathbf{F}$  é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos a divergência do gradiente de um campo vetorial  $\nabla f$ . Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão freqüentemente que vamos abreviá-la como  $\nabla^2 f$ . Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado operador de Laplace ou laplaciano, por sua relação com a equação de Laplace

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano  $\nabla^2$  a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + O\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

em termos de seus componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P \, \mathbf{i} + \nabla^2 O \, \mathbf{i} + \nabla^2 R \, \mathbf{k}$$

□ A razão para essa interpretação de div F será explicada no final da Seção 16.9 como conseqüência do Teorema da Divergência.

## Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergência e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil em nosso trabalho. Suponha uma região plana D, sua curva fronteira C e as funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Então podemos considerar o campo vetorial  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ . Sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P \, dx + Q \, dy$$

e seu rotacional é

rof 
$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k}$$

Portanto

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

A Equação 12 expressa a integral de linha do componente tangencial de **F** ao longo de *C* como uma integral dupla do componente vertical de rot **F** sobre a região *D* delimitada por *C*. Vamos derivar agora uma fórmula semelhante, envolvendo o componente *normal* de **F**. Se *C* é dado pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$
  $a \le t \le b$ 

então o versor tangente (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

Você pode verificar que o versor normal a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2.) Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{a}^{b} \left( \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \right)(t) \, | \, \mathbf{r}'(t) \, | \, dt$$

$$= \int_{a}^{b} \left[ \frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{| \, \mathbf{r}'(t) \, |} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{| \, \mathbf{r}'(t) \, |} \right] | \, \mathbf{r}'(t) \, | \, dt$$

$$= \int_{a}^{b} P(x(t), y(t))y'(t) \, dt - Q(x(t), y(t))x'(t) \, dt$$

$$= \int_{C} P \, dy - Q \, dx = \iint_{a} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

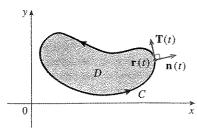


FIGURA 2

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é a divergência de F. Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha do componente normal de  $\mathbf{F}$  ao longo de C é igual à integral dupla da divergência de  $\mathbf{F}$  sobre a região D delimitada por C.

## 16.5 Exercícios

1-8 Determine (a) o rotacional e (b) a divergência do campo vetorial.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \,\mathbf{i} - x^2 y \,\mathbf{k}$$

**2.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 yz \, \mathbf{i} + xy^2 z \, \mathbf{j} + xyz^2 \, \mathbf{k}$$

**3.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\mathbf{k}$$

4. 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \cos xz \mathbf{j} - \sin xy \mathbf{k}$$

**5.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x} \sin y \mathbf{i} + e^{x} \cos y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

**6.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k}$$

7. 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$$

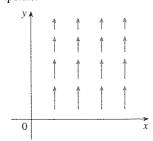
**8.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xe^{-y}, xz, ze^{y} \rangle$$

9-11  $\square$  O campo vetorial **F** é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais. (Em outras palavras, **F** é independente de z e seu componente z é 0.)

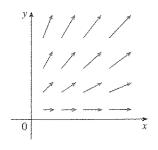
(a) O div F será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se o rot F = 0. Se não, em que direção rot F aponta?

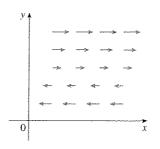




10



11.



12. Seja f um campo escalar e F um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f

(b)  $\operatorname{grad} f$ 

(c) div F

(d) rot(grad f)

(e) grad F

(f) grad(div F)

(g) div(grad f)

(h) grad(div f)

(i) rot(rot F)

(j) div(div F)

(k)  $(\text{grad } f) \times (\text{div } \mathbf{F})$ 

(1) div(rot(grad f))

13-18  $\Box$  Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se conservativo, determine uma função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

**13.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \, \mathbf{i} + xz \, \mathbf{j} + xy \, \mathbf{k}$$

**14.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3z^2 \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$$

**15.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy \, \mathbf{i} + (x^2 + 2yz) \, \mathbf{j} + y^2 \, \mathbf{k}$$

**16.** 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \mathbf{i} + \mathbf{j} + x e^z \mathbf{k}$$

17. 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

18. 
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos xy \,\mathbf{i} + x \cos xy \,\mathbf{j} - \sin z \,\mathbf{k}$$

Existe um campo vetorial G em  $\mathbb{R}^3$  tal que rot  $G = xy^2 \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}$ ? Explique.

**20.** Existe um campo vetorial **G** em 
$$\mathbb{R}^3$$
 tal que rot  $\mathbf{G} = yz \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

$$F(x, y, z) = f(y, z) i + g(x, z) j + h(x, y) k$$

é incompressível.

23-29 Prove a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas. Se f for um campo escalar e  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  forem campos vetoriais, então  $f\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$  e  $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$  são definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

- 23.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$
- 24.  $rot(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = rot \cdot \mathbf{F} + rot \cdot \mathbf{G}$
- **25.**  $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
- **26.**  $rot(f\mathbf{F}) = f$  rot  $\mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
- 27.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$
- **28.**  $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
- **29.** rot (rot **F**)  $\mathbf{F} = \text{grad } (\text{div } \mathbf{F}) \nabla^2 \mathbf{F}$ 4 4 t t t t

30-32 
$$\square$$
 Seja  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} e r = |\mathbf{r}|$ .

- **30.** Verifique as identidades.
  - (a)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
- (b)  $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$
- (c)  $\nabla^2 r^3 = 12r$
- **31.** Verifique as identidades.
  - (a)  $\nabla r = \mathbf{r}/r$
- (b)  $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
- (c)  $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
- (d)  $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se  $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$ , ache div  $\mathbf{F}$ . Existe um valor de p para o qual  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para provar a primeira identidade de Green:

$$\iint_{\Omega} f \nabla^2 g \, dA = \oint_{C} f(\nabla g) \cdot \mathbf{n} \, ds - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade  $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}} g$  aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal n e é chamada derivada normal de g.)

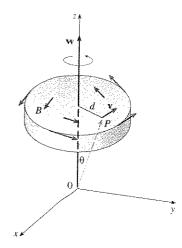
34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para provar a segunda identidade de Green:

$$\iint\limits_{D} (f\nabla^{2}g - g\nabla^{2}f) dA = \oint_{C} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n} ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. 35. Este exercício demonstra a conexão entre vetor rotacional e rotações. Seja B um corpo rígido girando em torno do eixo z. A rotação pode ser descrita pelo vetor  $\mathbf{w} = \omega \mathbf{k}$ , onde  $\omega$  é a rapidez angular de B, ou seja, a rapidez tangencial de qualquer ponto P em B dividido pela distância d do eixo de rotação. Seja  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$  o vetor posição de P.

1095

- (a) Considerando o ângulo  $\theta$  da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ .
- (b) Mostre que  $\mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} y \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} x \mathbf{j}$ .
- (c) Mostre que rot v = 2w.



36. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico E e o campo magnético H quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \qquad \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

rot 
$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$$

onde c é a rapidez da luz. Use essas equações para provar o

(a) 
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

(b) 
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

(c) 
$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$
 [Dica: Use o Exercício 29.]  
(d)  $\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$ 

(d) 
$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

37. Temos visto que todos os campos de vetores da forma  $\mathbf{F} = \nabla q$ satisfazem a equação rot F = 0 e que todos os campos de vetores da forma  $\mathbf{F} = \text{rot. } \mathbf{G}$  satisfazem a equação div  $\mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isso sugere a pergunta: existem algumas equações que todas as funções da forma  $f = \text{div } \mathbf{G}$  devem satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é "não", provando que toda função contínua f em  $\mathbb{R}^3$  é o divergente de algum campo de vetores. [Dica: Tome  $G(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0 \rangle$ , onde  $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z) dt$ .].]

## Superfícies Paramétricas e Suas Áreas

Na Seção 8.2 (Volume I), descobrimos como calcular a área de uma superfície de revolução, e na Seção 15.6 determinamos a área de uma superfície com equação z = f(x, y). Aqui discutiremos superfícies mais gerais, chamadas *superfícies paramétricas*, e calcularemos suas áreas.

### Superfícies Paramétricas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial  $\mathbf{r}(t)$  de um parâmetro único t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$  de dois parâmetros u e v. Suponhamos que

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$$

seja uma função com valor vetorial definida sobre uma região D do plano uv. Então x, y e z, componentes de  $\mathbf{r}$ , são funções das duas variáveis u e v com domínio D. O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em  $\mathbb{R}^3$  tais que

e (u, v) variando sobre D, é denominado **superfície paramétrica** S, e as Equações 2 são chamadas **equações paramétricas** de S. Cada escolha de u e v dá um ponto sobre S; ao fazermos todas as escolhas, obtemos todo o S. Em outras palavras, a superfície S é traçada pela ponta do vetor posição  $\mathbf{r}(u, v)$  quando (u, v) se move na região D (veja a Figura 1).

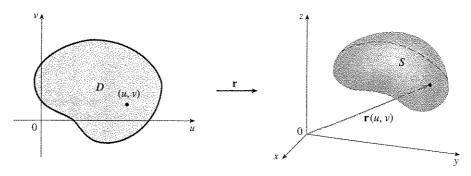


FIGURA 1 Uma superfície paramétrica

EXEMPLO 1 

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + 2\sin u \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u$$
  $y = v$   $z = 2 \sin u$ 

Para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como y = v e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

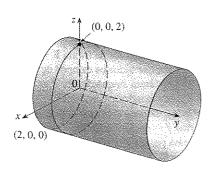
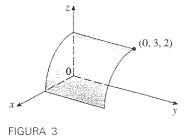


FIGURA 2



No Exemplo 1 não existiam restrições sobre os parâmetros u e v, e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v, escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \le u \le \pi/2$$
  $0 \le v \le 3$ 

então  $x \ge 0$ ,  $z \ge 0$ ,  $0 \le y \le 3$ , e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

Se uma superfície paramétrica S é dada por uma função vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$ , então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S, uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv. Se mantivermos u constante impondo  $u = u_0$ , então  $\mathbf{r}(u_0, v)$  se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva  $C_1$  sobre S (veja a Figura 4).

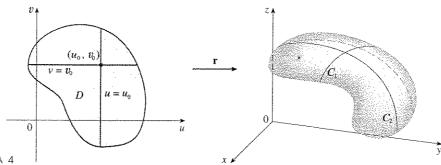


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando  $v=v_0$ , obteremos a curva  $C_2$  dada por  $\mathbf{r}(u,v_0)$  contida em S. A essa curva chamaremos **curva da grade**. (No Exemplo 1, as curvas da grade obtidas tomando u constante são retas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências.) De fato, quando um computador traça o gráfico de uma superfície paramétrica, ele geralmente retrata a superfície plotando essas curvas da grade, como veremos no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 

Use um sistema algébrico computacional para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

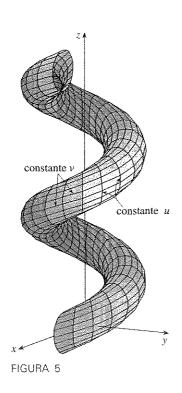
Quais são as curvas da grade com u constante? E com v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o gráfico do pedaço da superfície correspondente à janela de inspeção com os parâmetros delimitados por  $0 \le u \le 4\pi$ ,  $0 \le v \le 2\pi$ , na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificar as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \operatorname{sen} v) \cos u$$
  $y = (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u$   $z = u + \cos v$ 

Se v é constante, então sen v e cos v são constantes, e as equações paramétricas lembram as da hélice do Exemplo 4 da Seção 13.1. Assim as curvas da grade com v constante são as curvas espirais da Figura 5. Deduzimos que as curvas da grade com u constante precisam ser aquelas que parecem circunferência na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u fixo,  $u = u_0$ , então as equações  $z = u_0 + \cos v$  mostram que os valores de z variam de  $u_0 - 1$  até  $u_0 + 1$ .

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície paramétrica correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiante de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, com freqüência teremos de fazer exatamente isso.



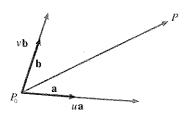


FIGURA 6

 $\Box$  Um dos usos de superfícies paramétricas está em fazer gráficos com computador. A Figura 7 mostra o resultado de tentar grafar a esfera  $x^2+y^2+z^2=1$  resolvendo a equação separadamente para z e grafando o topo e a base do hemisfério separadamente. Parte da esfera parece estar perdida por causa do sistema retangular de grades usado pelo computador. A Figura 8, muito melhor, foi produzida por um computador que usa as equações paramétricas encontradas no Exemplo 4.

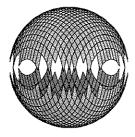


FIGURA 7

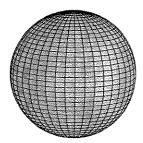


FIGURA 8

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto  $P_0$  com vetor posição  $\mathbf{r}_0$  e que contenha dois vetores não paralelos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

SOLUÇÃO Se P é um ponto qualquer do plano, podemos ir de  $P_0$  até P andando uma distância orientada na direção do vetor  $\mathbf{a}$  e outra distância orientada na direção do  $\mathbf{b}$ . Portanto existem escalares u e v tais que  $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ . (A Figura 6 ilustra como isso acontece, por meio da Regra do Paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 38 da Seção 12.2). Se  $\mathbf{r}$  é o vetor de posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

A equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ ,  $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ ,  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , podemos escrever as equações paramétricas do plano através do ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1$$
  $y = y_0 + ua_2 + vb_2$   $z = z_0 + ua_3 + vb_3$ 

EXEMPLO 4 🗆 Determine uma representação paramétrica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples  $\rho=a$  em coordenadas esféricas, e então vamos escolher ângulos  $\phi$  e  $\theta$  em coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 12.7). Tomando  $\rho=a$  nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 12.7.3), obtemos

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = a \cos \phi$ 

como equações paramétricas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

Temos  $0 \le \phi \le \pi$  e  $0 \le \theta \le 2\pi$ , de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo  $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . As curvas da grade com  $\phi$  constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com  $\theta$  constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os pólos norte e sul.

EXEMPLO 5 

Determine uma representação paramétrica do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \le z \le 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação r=2 em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros  $\theta$  e z em coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2\cos\theta$$
  $y = 2\sin\theta$   $z = z$ 

onde  $0 \le \theta \le 2\pi e \ 0 \le z \le 1$ .

**EXEMPLO 6**  $\Box$  Determine uma função vetorial que represente o parabolóide elíptico  $z = x^2 + 2y^2$ .

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + 2y^2) \mathbf{k}$$

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y, ou seja, com equação da forma z = f(x, y), pode sempre ser olhada como uma superfície paramétrica tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x$$
  $y = y$   $z = f(x, y)$ 

Representações paramétricas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 🗆 Determine uma representação paramétrica para a superfície  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ , ou seja, a metade superior do cone  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ .

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha como parâmetro das coordenadas polares  $r \in \theta$ . Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , e  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$ . Assim uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + 2r \mathbf{k}$$

onde  $r \ge 0$  e  $0 \le \theta \le 2\pi$ .

Para alguns propósitos as representações paramétricas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano z = 1, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

> $0 \le r \le \frac{1}{2}$  $0 \le \theta \le 2\pi$



## Superfícies de Revolução

Superfícies de revolução podem ser representadas na forma paramétrica e seus gráficos podem então ser desenhados, usando-se um computador. Por exemplo: vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva y = f(x),  $a \le x \le b$ , em torno do eixo x, onde  $f(x) \ge 0$ . Seja  $\theta$  o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 9. Se (x, y, z) é um ponto de S, então

3 
$$x = x$$
  $y = f(x) \cos \theta$   $z = f(x) \sin \theta$ 

Portanto, tomamos x e  $\theta$  como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S. O domínio do parâmetro é dado por  $a \le x \le b$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ .

EXEMPLO 8 

Determine as equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva y = sen x,  $0 \le x \le 2\pi$ , em torno do eixo x. Use essas equações para traçar o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x$$
  $y = \sin x \cos \theta$   $z = \sin x \sin \theta$ 

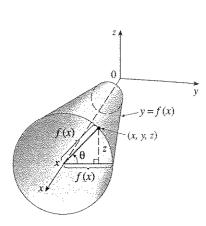


FIGURA 9

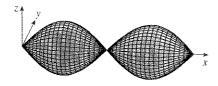
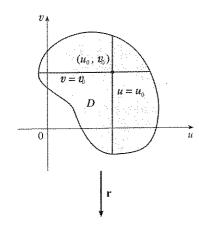


FIGURA 10



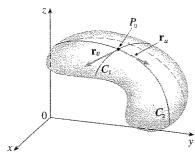


FIGURA 11

☐ A Figura 12 mostra a superfície que se auto-intercepta do Exemplo 9 e seu plano tangente em (1, 1, 3).

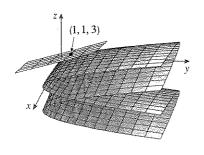


FIGURA 12

e o domínio do parâmetro é  $0 \le x \le 2\pi$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ . Usando um computador para plotar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 10.

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo *x* ou do eixo *y* (veja o Exercício 28).

#### Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície paramétrica S traçada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

em um ponto  $P_0$  com vetor posição  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ . Se mantivermos u constante tomando  $u = u_0$ , então  $\mathbf{r}(u_0, v)$  se torna uma função vetorial de um único parâmetro v e define uma curva da grade  $C_1$  sobre S (veja a Figura 11). O vetor tangente a  $C_1$  em  $P_0$  é obtido tomando-se a derivada parcial de  $\mathbf{r}$  em relação a v:

$$\mathbf{r}_{v} = \frac{\partial x}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{k}$$

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando  $v = v_0$ , obteremos a curva da grade  $C_2$  dada por  $\mathbf{r}(u, v_0)$  que está sobre S, e cujo vetor tangente em  $P_0$  é

$$\mathbf{r}_{u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_{0}, v_{0})\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_{0}, v_{0})\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_{0}, v_{0})\mathbf{k}$$

Se  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  não é  $\mathbf{0}$ , então a superfície S é dita **lisa** (sem "bicos"). Para uma superfície lisa, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$ , e o vetor  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  é normal ao plano tangente.

EXEMPLO 9  $\Box$  Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas  $x = u^2$ ,  $y = v^2$ , z = u + 2v no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_{u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} = 2v \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

ou

$$\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v \, \mathbf{i} - 4u \, \mathbf{j} + 4uv \, \mathbf{k}$$

Note que o ponto (1, 1, 3) corresponde ao valor dos parâmetros u = 1 e v = 1. Assim o vetor normal lá é

$$-2i - 4j + 4k$$

Portanto uma equação do plano tangente em (1, 1, 3) é

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$$

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

## Área de Superfície

Definiremos agora a área de superfície de uma superfície paramétrica genérica dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos  $R_{ij}$ . Vamos escolher  $(u_i^*, v_j^*)$  como o canto inferior esquerdo do retângulo  $R_{ij}$  (veja a Figura 13). O pedaço  $S_{ij}$  da superfície S que corresponde a  $R_{ij}$  é chamado de *retalho* e tem um ponto  $P_{ij}$  com vetor posição  $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$  como um de seus cantos. Seja

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*)$$
 e  $\mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$ 

os vetores tangentes em  $P_{ij}$  calculados pelas Equações 5 e 4.

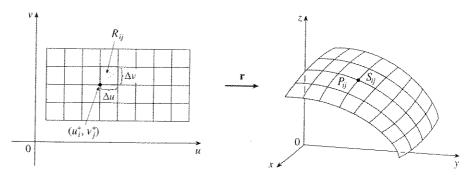
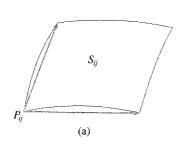


FIGURA 13 A imagem do sub-retângulo  $R_{ii}$  é o retalho  $S_{ii}$ 



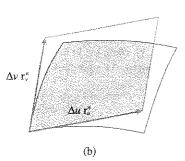


FIGURA 14 Aproximando um retalho por um paralelogramo

A Figura 14(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em  $P_{ij}$  podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores  $\Delta u \mathbf{r}_u^* \in \Delta v \mathbf{r}_v^*$  porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos  $S_{ij}$  pelo paralelogramo determinado pelos vetores  $\Delta u \mathbf{r}_v^* \in \Delta v \mathbf{r}_v^*$ . Esse paralelogramo está representado na Figura 14(b) e está contido no plano tangente a S em  $P_{ij}$ . A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_{u}^{*} \times \mathbf{r}_{v}^{*}| \Delta u \, \Delta v$$

Nossa intuição nos diz que essa aproximação fica melhor quando aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla  $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \ du \ dv$ . Isso motiva a definição seguinte:

6 Definição Se uma superfície paramétrica lisa S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

e S é coberto uma única vez quando (u,v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a **área de superfície** de S é

$$A(S) = \iint\limits_{D} |\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}| dA$$

onde  $\mathbf{r}_{u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$   $\mathbf{r}_{v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$ 

EXEMPLO 10  $\Box$  Determine a área de superfície da esfera de raio a.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 achamos a representação paramétrica

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = a \cos \theta$ 

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{ (\phi, \theta) \mid 0 \le \phi \le \pi, \ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

Vamos calcular o produto vetorial dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

= 
$$a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Então

$$|\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \operatorname{sen}^4 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + a^4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi}$$
$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4 \phi + a^4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = a^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi} = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

uma vez que sen  $\phi \ge 0$  para  $0 \le \phi \le \pi$ . Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$A = \iint\limits_{D} |\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}| dA = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} a^{2} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$
$$= a^{2} \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = a^{2} (2\pi) 2 = 4\pi a^{2}$$

Q

## Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação z = f(x, y), onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x y = y z = f(x, y)$$

$$\mathbf{r}_{x} = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathbf{k} \mathbf{r}_{y} = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathbf{k}$$

е

$$\mathbf{r}_{x} \times \mathbf{r}_{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Ü

Então, temos

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área de superfície na Definição 6 fica

$$A(S) = \iint_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}} dA$$

**EXEMPLO 11** Determine a área da parte do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que está abaixo do plano z = 9.

SOLUÇÃO O plano intercepta o parabolóide na circunferência  $x^2 + y^2 = 9$ , z = 9. Portanto a superfície dada está acima do disco D com centro na origem e raio 3 (veja a Figura 15). Usando a Fórmula 9, temos

$$A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA$$
$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

Convertendo para as coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right)\frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2} \int_0^3 = \frac{\pi}{6} \left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície (6) é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva y = f(x),  $a \le x \le b$ , em torno do eixo x, onde  $f(x) \ge 0$  e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x$$
  $y = f(x)\cos\theta$   $z = f(x)\sin\theta$   $a \le x \le b$   $0 \le \theta \le 2\pi$ 

Para calcular a área da superfície S, precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_{x} = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\sin\theta\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{\theta} = -f(x)\sin\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Então

$$\mathbf{r}_{x} \times \mathbf{r}_{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta \\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= f(x)f'(x)\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\mathbf{j} - f(x)\sin\theta\mathbf{k}$$

☐ Note a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

da Seção 8.1 do Volume I

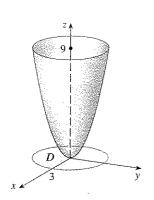


FIGURA 15

e então 
$$|\mathbf{r}_{x} \times \mathbf{r}_{\theta}| = \sqrt{[f(x)]^{2}[f'(x)]^{2} + [f(x)]^{2}\cos^{2}\theta + [f(x)]^{2}\sin^{2}\theta}$$
$$= \sqrt{[f(x)]^{2}[1 + (f'(x))^{2}]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^{2}}$$

porque  $f(x) \ge 0$ . Portanto, a área de S é

$$A = \iint\limits_{D} |\mathbf{r}_{x} \times \mathbf{r}_{\theta}| dA = \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} dx d\theta$$
$$= 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} dx$$

Isso é precisamente a fórmula que foi usada para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

## 16.6 Exercícios

1-4 🗆 Identifique a superfície com equação vetorial dada.

$$\mathbf{1}, \ \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \, \mathbf{i} + u \sin v \, \mathbf{j} + u^2 \, \mathbf{k}$$

**2.** 
$$\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2u)\mathbf{i} + (-u + 3v)\mathbf{j} + (2 + 4u + 5v)\mathbf{k}$$

3. 
$$\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}(x, \theta) = \langle x, x \cos \theta, x \sin \theta \rangle$$

s 2 3 4 5 3

5-10 Use um computador para traçar o gráfico da superfície paramétrica. Imprima o resultado e indique sobre ele quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

5. 
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2 + 1, v^3 + 1, u + v \rangle,$$
  
 $-1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$ 

**6.** 
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2, v^2 \rangle, -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$$

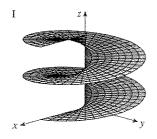
7. 
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle,$$
  
 $0 \le u \le \pi, \ 0 \le v \le 2\pi$ 

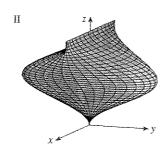
**8.** 
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos u \sec v, \sec u \sec v, \cos v + \ln \lg (v/2) \rangle, 0 \le u \le 2\pi, 0, 1 \le v \le 6, 2$$

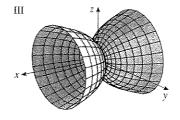
**9.** 
$$x = \cos u \sin 2v$$
,  $y = \sin u \sin 2v$ ,  $z = \sin v$ 

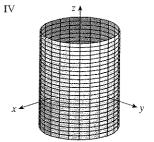
**10.** 
$$x = u \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v$$
,  $y = u \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v$ ,  $z = u \operatorname{sen} v$ 

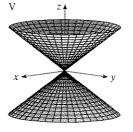
11-16  $\Box$  Case as equações com os gráficos identificados por I-VI e dê razões para sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

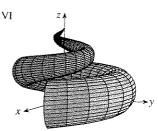












11. 
$$\mathbf{r}(u, v) = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

12. 
$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

13 
$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

**14.** 
$$x = u^3$$
,  $y = u \operatorname{sen} v$ ,  $z = u \cos v$ 

**15.** 
$$x = (u - \sin u) \cos v$$
,  $y = (1 - \cos u) \sin v$ ,  $z = u$ 

**16.** 
$$x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u$$
,  
 $y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u$ ,  
 $z = 3u + (1 - u) \sin v$ 

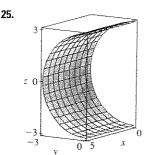
17-24 🗆 Determine uma representação paramétrica para a superfície.

O plano que passa pelo ponto 
$$(1, 2, -3)$$
 e contém os vetores  $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \in \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

**18.** A metade inferior 
$$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

- **20.** A parte do parabolóide elíptico  $x + y^2 + 2z^2 = 4$  que está em frente ao plano x = 0
- 21. A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 22. A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  que está entre os planos z = -2 e z = 2
- 23. A parte do cilindro  $y^2 + z^2 = 16$  que está entre os planos x = 0 e x = 5
- A parte do plano z = x + 3 que está dentro do cilíndro  $x^2 + y^2 = 1$

25-26 Use um sistema algébrico computacional para produzir um gráfico que se pareça com o que está dado.



26.

**27.** Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva  $y = e^{-x}$ ,  $0 \le x \le 3$ , em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.

**28.** Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva  $x = 4y^2 - y^4$ ,  $-2 \le y \le 2$ , em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.

**29.** (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos cos *u* por sen *u* e sen *u* por cos *u*?

(b) O que acontecerá se substituirmos  $\cos u$  por  $\cos 2u$  e sen u por  $\sin 2u$ ?

30. A superfície com as equações paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
  

$$y = 2\sin\theta + r\cos(\theta/2)$$
  

$$z = r\sin(\theta/2)$$

onde  $-\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$  e  $0 \le \theta \le 2\pi$ , é chamada **Tira de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície com vários pontos de vista. O que há de estranho ne**I**a?

31-34 Determine uma equação do plano tangente à superfície paramétrica dada no ponto específico. Se você tiver um programa que trace o gráfico de superfícies paramétricas, use um computador para traçar a superfície e o plano tangente.

- **31** x = u + v,  $y = 3u^2$ , z = u v; (2, 3, 0)
- **32.**  $x = u^2$ ,  $y = v^2$ , z = uv; u = 1, v = 1
- **33.**  $\mathbf{r}(u, v) = u^2 \mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + u \cos v \mathbf{k}; \quad u = 1, v = 0$
- **34.**  $\mathbf{r}(u, v) = uv \, \mathbf{i} + u \, \text{sen} \, v \, \mathbf{j} + v \, \text{cos} \, u \, \mathbf{k}; \quad u = 0, v = \pi$

35-45 🗆 Determine a área da superfície.

- **35.** A parte do plano x + 2y + z = 4 que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$
- **36.** A parte do plano com equação vetorial  $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + v, u 2v, 3 5u + v \rangle$  que é dada por  $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$
- 31. A parte da superfície z = xy que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$
- **38.** A parte da superfície  $z = 1 + 3x + 2y^2$  que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (0, 1), e(2, 1)
- **39.** A parte do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 x^2$  que está entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$
- **40.** A parte do parabolóide  $x = y^2 + z^2$  que está dentro do cilindro  $y^2 + z^2 = 9$
- **41.** A parte da superfície  $y = 4x + z^2$  que está entre os planos x = 0, x = 1, z = 0 e z = 1
- **42.** A parte do cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$
- **43.** A parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = ax$
- **44.** A helicóide (ou rampa espiral) com equação vetorial  $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$
- A superfície com equações paramétricas x = uv, y = u + v, z = u v,  $u^2 + v^2 \le 1$

46-47 □ Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral de função de uma variável real e usando sua calculadora para estimar a integral.

- **46.** A parte da superfície  $z = \cos(x^2 + y^2)$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
- **47.** A parte da superfície  $z = e^{-x^2 y^2}$  que está acima do círculo  $x^2 + y^2 \le 4$

**48.** Determine, com precisão até a quarta casa decimal, a área da parte da superfície  $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$  que está acima do quadrado  $|x| + |y| \le 1$ . Ilustre, traçando o gráfico dessa porção de superfície.

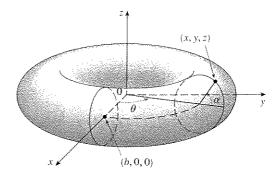
#### 1106 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

- **49.** (a) Use a Regra do Ponto Médio para as integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área de superfície da parte do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que está acima do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
  - (b) Use um sistema algébrico computacional para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta da parte (a).
- **50.** Determine a área da superfície de equação vetorial  $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^2 v, \sin^3 v \rangle, 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi$ . Estabeleça sua resposta com precisão de quatro casas decimais.
- **51.** Determine com exatidão a área da superfície  $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$ ,  $1 \le x \le 4$ ,  $0 \le y \le 1$ .

ZΣ

- **52.** (a) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas  $x = au \cos v$ ,  $y = bu \operatorname{sen} v$ ,  $z = u^2$ ,  $0 \le u \le 2$ ,  $0 \le v \le 2\pi$ .
  - (b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um parabolóide elíptico e estabeleça outra integral dupla que fornece sua área.
  - (c) Use as equações paramétricas da parte (a) com a = 2 e b = 3 para traçar o gráfico da superfície.
  - (d) Para o caso a = 2, b = 3, use um sistema algébrico computacional para achar a área de superfície com precisão até a quarta casa decimal.
- **53.** (a) Mostre que as equações paramétricas  $x = a \operatorname{sen} u \cos v$ ,  $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ ,  $z = c \cos u$ ,  $0 \le u \le \pi$ ,  $0 \le v \le 2\pi$ , representam um elipsóide.
  - (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsóide para o caso a = 1, b = 2, c = 3.
  - (c) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsóide da parte (b).

- 54. (a) Mostre que as equações paramétricas x = a cosh u cos v, y = b cosh u sen v, z = c senh u, representam um hiperbolóide de uma folha.
  - (b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperbolóide para o caso a = 1, b = 2, c = 3.
  - (c) Estabeleça, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperbolóide da parte (b) que está entre os planos z = -3 e z = 3.
- 55. Determine a área da superfície do Exercício 7 com precisão até a quarta casa decimal.
  - **56.** (a) Determine a representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo z o círculo do plano xz com centro em (b, 0, 0) e raio a < b. [Dica: tome como parâmetros os ângulos  $\theta \in \alpha$  mostrados na figura.]
    - (b) Use as equações paramétricas achadas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de *a* e *b*.
    - (c) Use a representação paramétrica da parte (a) para achar a área de superfície do toro.



# 16.7

## Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S. Dividimos S em retalhos  $S_{ij}$  com área  $\Delta S_{ij}$ . Calculamos f em um ponto  $P_{ij}^*$  de cada retalho, multiplicamos por  $\Delta S_{ij}$  e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \, \Delta S_{ij}$$

Então tomamos o limite quando o tamanho dos retalhos se aproxima de 0 e definimos a integral de superfície de f sobre a superfície S como

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^{*}) \Delta S_{ij}$$

Note a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição da integral dupla (15.1.5).

1107

 $\Delta S_{ij}$   $P_{ij}^*$   $\Delta T_{ij}$  S  $R_{ij}$   $\Delta A$ 

FIGURA 1

Para calcular a integral de superfície da Equação 1 aproximamos a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  pela área  $\Delta T_{ij}$  de um paralelogramo aproximante no plano tangente, e o limite é a integral dupla. Explicaremos agora detalhes para dois tipos de superfícies: gráficos e superfícies paramétricas.

Gráficos Se a superfície S é o gráfico de uma função de duas variáveis, então ela tem uma equação da forma  $z=g(x,y), (x,y)\in D$ , ilustrada na Figura 1. Vamos inicialmente assumir que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividir esse retângulo em sub-retângulos pequenos  $R_{ij}$  todos com o mesmo tamanho. O retalho  $S_{ij}$  está diretamente acima do retângulo  $R_{ij}$ , e o ponto  $P_{ij}^*$  de  $S_{ij}$  é da forma  $(x_i^*, y_j^*, g(x_i^*, y_j^*))$ . Como para a área de superfície na Seção 15.6, aproximamos

$$\Delta S_{ij} \approx \Delta T_{ij} = \sqrt{[g_x(x_i, y_j)]^2 + [g_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

De fato, pode ser provado que, se f é contínua sobre S e g tem derivadas parciais contínuas, então a Definição 1 fica

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{i}^{*}, y_{j}^{*}, g(x_{i}^{*}, y_{j}^{*})) \sqrt{[g_{x}(x_{i}, y_{j})]^{2} + [g_{y}(x_{i}, y_{j})]^{2} + 1} \Delta A$$

$$= \iint_{D} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{[g_{x}(x, y)]^{2} + [g_{y}(x, y)]^{2} + 1} dA$$

Essa fórmula, válida mesmo quando D não é retangular, é geralmente escrita da seguinte maneira:

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS = \iint_{D} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2} + 1} dA$$

Fórmulas semelhantes se aplicam quando é mais conveniente projetar S sobre o plano yz ou o plano xz. Por exemplo, se S for uma superfície com equação y = h(x, z) e D for sua projeção no plano xz, então

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{D} f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{2} + 1} dA$$

EXEMPLO 1  $\Box$  Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde S é a superfície  $z = x + y^2$ ,  $0 \le x \le 1$ ,  $0 \le y \le 2$  (veja a Figura 2).

SOLUÇÃO Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$
 e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ 

a Fórmula 2 dá

$$\iint_{S} y \, dS = \iint_{D} y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}} \, dA$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} y \sqrt{1 + 1 + 4y^{2}} \, dy \, dx$$

$$= \int_{0}^{1} dx \, \sqrt{2} \int_{0}^{2} y \sqrt{1 + 2y^{2}} \, dy$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2}_{3} (1 + 2y^{2})^{3/2} \right]_{0}^{2} = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àquelas das integrais consideradas previamente. Por exemplo: se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tem o formato de uma superfície S e a densidade (massa por unidade de área) em um ponto (x, y, z) for  $\rho(x, y, z)$ , então a massa total da folha será

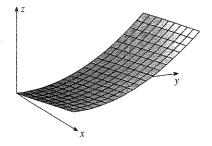


FIGURA 2

$$m = \iint\limits_{S} \rho(x, y, z) \, dS$$

e o centro de massa será  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_{S} x \rho(x, y, z) dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_{S} y \rho(x, y, z) dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_{S} z \rho(x, y, z) dS$$

Momentos de inércia também podem ser definidos como anteriormente (veja o Exercício 37).

Superfícies Paramétricas Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos  $R_{ij}$  com dimensões  $\Delta u$  e  $\Delta v$ . Então a superfície ficará dividida em retalhos correspondentes  $S_{ij}$  com áreas  $\Delta S_{ij}$ , como na Figura 3.

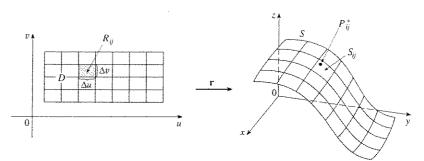


FIGURA 3

Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \, \Delta v$$

$$\mathbf{r}_{u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_{v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de  $S_{ij}$ . Se os componentes são contínuos e  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$  são não nulos e não paralelos no interior de D, pode ser mostrado da Definição 1, mesmo quando D não seja retangular, que

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS = \iint_{D} f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}| dA$$

Isso deve ser comparado com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Observe também que

$$\iint\limits_{S} 1 dS = \iint\limits_{S} |\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}| dA = A(S)$$

A Fórmula 3 nos permite calcular a integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio dos parâmetros D. Quando usamos essa fórmula, precisamos lembrar que  $f(\mathbf{r}(u, v))$  deve ser calculada escrevendo-se x = x(u, v), y = y(u, v) e z = z(u, v) na fórmula de f(x, y, z).

Admitimos que a superfície é coberta somente uma vez quando (u, v) varia em D. O valor da integral de superfície não depende da parametrização usada.

Qualquer superfície S com equação z = g(x, y) pode ser olhada como uma superfície paramétrica com equações paramétricas

$$x = x$$
  $y = y$   $z = q(x, y)$ 

e da Equação 16.6.8 temos

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Portanto, nesse caso, a Fórmula 3 se transforma na Fórmula 2.

**EXEMPLO 2**  $\square$  Calcule a integral de superfície  $\iint_S x^2 dS$ , onde S é a esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação paramétrica

$$x = \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
  $y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$   $z = \cos \phi$   $0 \le \phi \le \pi$   $0 \le \theta \le 2\pi$ 

ou seja, 
$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter

$$|\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}| = \operatorname{sen} \phi$$

Portanto, pela Fórmula 3,

$$\iint_{S} x^{2} dS = \iint_{D} (\operatorname{sen} \phi \cos \theta)^{2} |\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}| dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^{2} \phi \cos^{2} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \theta d\theta \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^{3} \phi d\phi$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi \cos^{2} \phi) d\phi$$

$$= \frac{1}{2} [\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta]_{0}^{2\pi} [-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^{3} \phi]_{0}^{\pi} = \frac{4\pi}{2}$$

Se S é uma superfície lisa por trechos, ou seja, uma união finita de superfícies lisas  $S_1$ ,  $S_2$ , ...,  $S_n$  que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{S_1} f(x, y, z) dS + \cdots + \iint\limits_{S_n} f(x, y, z) dS$$

**EXEMPLO 3**  $\Box$  Calcule  $\iint_S z \, dS$ , onde S é a superfície cujo lado  $S_1$  é dado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , cujo fundo  $S_2$  é o círculo  $x^2 + y^2 \le 1$  no plano z = 0, e cujo topo  $S_3$  é a parte do plano z = 1 + x que está acima de  $S_2$ .

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 4. (Trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S.) Para  $S_1$  usamos como parâmetros  $\theta$  e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = \cos \theta$$
  $y = \sin \theta$   $z = z$   
 $0 \le \theta \le 2\pi$  e  $0 \le z \le 1 + x = 1 + \cos \theta$ 

onde Portanto

e

$$\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j}$$
$$|\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{z}| = \sqrt{\cos^{2}\theta + \operatorname{sen}^{2}\theta} = 1$$

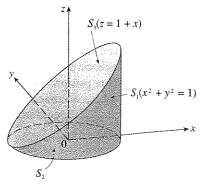


FIGURA 4

Então, a integral de superfície sobre  $S_1$  é

$$\iint_{S_1} z \, dS = \iint_{D} z \, |\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{z}| \, dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1 + \cos \theta} z \, dz \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^{2} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left[ 1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{0}^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Como  $S_2$  está no plano z = 0, temos

$$\iint\limits_{S_1} z \, dS = \iint\limits_{S_2} 0 \, dS = 0$$

A superfície do topo  $S_3$  está acima do círculo D e é parte do plano z=1+x. Portanto, tomando g(x, y)=1+x na Fórmula 2 e transformando para coordenadas polares, temos

$$\iint_{S_3} z \, dS = \iint_D (1+x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r\cos\theta) \sqrt{1+1+\theta} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r+r^2\cos\theta) \, dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta\right) \, d\theta = \sqrt{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$

$$\iint z \, dS = \iint z \, dS + \iint z \, dS + \iint z \, dS$$

Portanto

$$\iint_{S} z \, dS = \iint_{S_{1}} z \, dS + \iint_{S_{2}} z \, dS + \iint_{S_{3}} z \, dS$$
$$= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

# P

FIGURA 5 Uma faixa de Möbius

#### Superfícies Orientadas

Para definir as integrais de superfície de campos de vetores, precisamos desconsiderar as superfícies não-orientáveis, tais como a faixa de Möbius mostrada na Figura 5. [Ela recebeu esse nome em homenagem ao geômetra alemão August Möbius (1790-1868).] Você pode construir uma faixa sozinho, tomando uma tira de papel retangular e comprida, dando uma meia-volta (em uma de suas extremidades) e grudando os lados mais curtos, como na Figura 6. Se uma formiga resolvesse caminhar sobre a faixa de Möbius partindo de um ponto P, ela terminaria sobre o "outro lado" da faixa (isto é, com sua cabeça apontando na direção oposta à de sua partida). E, mais ainda, se prosseguisse sua caminhada, conforme

B A  $\begin{array}{ccc}
B & D \\
A & C
\end{array}$ 

8

А

FIGURA 6 Construção de uma faixa de Möbius

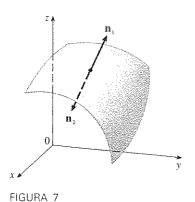
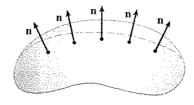


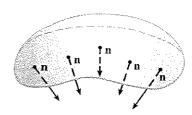
FIGURA 8

As duas orientações de uma superfície orientada

iniciara, ela retornaria ao mesmo ponto P sem nunca ter cruzado uma borda. (Se você construir uma faixa de Möbius, tente traçar com um lápis um caminho passando pelo meio dela.) Portanto, uma faixa de Möbius realmente tem um lado só. Você pode fazer o gráfico da faixa de Möbius usando as equações paramétricas do Exercício 30 da Seção 16.6.

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície S que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) sobre S (exceto nos pontos da fronteira). Em cada ponto (x, y, z) existem dois versores normais  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$  (veja a Figura 7). Se for possível escolher um versor normal  $\mathbf{n}$  em cada ponto (x, y, z) de modo que  $\mathbf{n}$  varie continuamente sobre S, então S é chamada superfície orientada, e a escolha dada de  $\mathbf{n}$  fornece a S uma orientação. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 8).





Para uma superfície z = g(x, y) dada como o gráfico de g, usamos a Equação 16.6.7 e vemos que a orientação induzida é dada pelo versor normal

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como a componente na direção de  $\mathbf{k}$  é positiva, isso fornece a orientação para cima da superfície.

Se S for uma superfície orientada lisa dada na forma paramétrica pela equação vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$ , então ela está automaticamente suprida com a orientação do versor normal.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por -n. Por exemplo: no Exemplo 4 da Seção 16.6 encontramos a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

para a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Então no Exemplo 10 da Seção 16.6 achamos que

$$\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta} = a^2 \mathrm{sen}^2 \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \mathrm{sen}^2 \phi \sin \theta \, \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

Assim a orientação induzida por  $\mathbf{r}(\phi, \theta)$  é definida pelo versor normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}}{|\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}|} = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{j} + \cos \phi \,\mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\phi, \,\theta)$$

Observe que n aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 9). A orientação oposta (para dentro) podia ser obtida (veja a Figura 10) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque  $\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\phi} = -\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}$ .

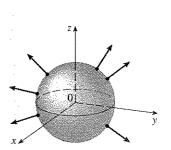


FIGURA 9 Orientação positiva

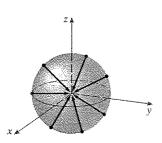
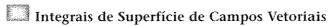
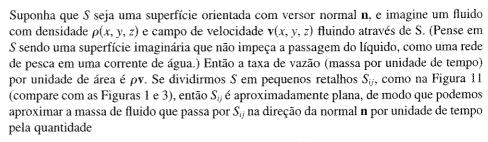


FIGURA 10 Orientação negativa

Z | GALCOLO EUI

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E, a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais apontam para fora de E, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (vejam as Figuras 9 e 10).





$$(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A(S_{ij})$$

onde  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{n}$  são calculados em algum ponto de  $S_{ij}$ . (Lembre-se de que o componente do vetor  $\rho \mathbf{v}$  na direção do versor  $\mathbf{n}$  é  $\rho \mathbf{v}$  ·  $\mathbf{n}$ .) Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função  $\rho \mathbf{v}$  ·  $\mathbf{n}$  sobre S:

$$\iint_{S} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S} \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

e é interpretada fisicamente como a taxa de vazão através de S.

Se escrevermos  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ , então  $\mathbf{F}$  é também um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e a integral da Equação 6 fica

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece freqüentemente em física, mesmo quando  $\mathbf{F}$  não é  $\rho \mathbf{v}$ , e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de  $\mathbf{F}$  sobre S.

[7] Definição Se F for um campo vetorial contínua definido sobre uma superfície orientada S com versor normal n, então a integral de superfície de F sobre S é

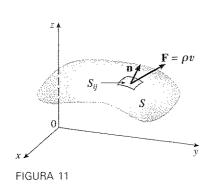
$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada fluxo de F através de S.

Em palavras, a Definição 7 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de seu componente normal sobre S (como definido previamente).

Gráficos No caso da superfície S ser dada por um gráfico z = g(x, y), podemos determinar n notando que S também é a superfície de nível f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0. Sabemos que o gradiente  $\nabla f(x, y, z)$  é normal a essa superfície em (x, y, z) e assim o versor normal é

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{-g_x(x, y) \mathbf{i} - g_y(x, y) \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1}}$$



Como o componente na direção **k** é positivo, o versor normal aponta para cima. Se usarmos agora a Fórmula 2 para calcular a integral de superfície (7) com

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

obteremos

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$= \iint_{D} (P \, \mathbf{i} + Q \, \mathbf{j} + R \, \mathbf{k}) \cdot \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \, \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{2} + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{2} + 1} \, dA$$

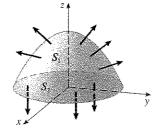
ou

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \left( -P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

Para um vetor normal apontando para baixo, multiplicamos por -1. Fórmulas semelhantes podem ser obtidas se S for dada por y = h(x, z) ou x = k(y, z) (veja os Exercícios 33 e 34).

**EXEMPLO 4**  $\Box$  Calcule  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  e S é a fronteira da região sólida E contida pelo parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  e pelo plano z = 0.

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica do topo  $S_1$  e pela superfície circular do fundo  $S_2$  (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que  $S_1$  é orientada para cima e podemos usar a Equação 8 com D sendo a projeção de  $S_1$  sobre o plano xy, ou seja, o círculo  $x^2 + y^2 \le 1$ . Como



$$P(x, y, z) = y$$
  $Q(x, y, z) = x$   $R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$   
sobre  $S_1$  e  $\frac{\partial g}{\partial x} = -2x$   $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$   
temos

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \left( -P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

$$= \iint_{D} \left[ -y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2 \right] dA$$

$$= \iint_{D} \left( 1 + 4xy - x^2 - y^2 \right) dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left( 1 + 4r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \right) r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left( r - r^3 + 4r^3 \cos \theta \sin \theta \right) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \cos \theta \sin \theta \right) \, d\theta = \frac{1}{4} (2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}$$

O círculo  $S_2$  é orientado para baixo, então seu versor normal é  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$  e temos

$$\iint_{S_{1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{2}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS = \iint_{D} (-z) \, dA = \iint_{D} 0 \, dA = 0$$

já que z = 0 sobre  $S_2$ . Finalmente, calculamos, pela definição,  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  como a soma das integrais de superfície de  $\mathbf{F}$  sobre  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Superfícies Paramétricas Se S é dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$ , então  $\mathbf{n}$  é dada pela Equação 5, e da Definição 7 e Equação 3, temos

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}}{|\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}|} dS$$

$$= \iint_{D} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}}{|\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}|} \right] |\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}| dA$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Então, temos

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{u} \times \mathbf{r}_{v}) dA$$

Note que, em vista da Equação 16.6.7, temos

$$\mathbf{r}_{x} \times \mathbf{r}_{y} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e a Fórmula 8 é um caso especial da Fórmula 9.

EXEMPLO 5  $\Box$  Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Usando a representação paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \, \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + \cos \phi \, \mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$
temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \,\mathbf{i} + \sin \phi \, \sin \theta \,\mathbf{j} + \sin \phi \cos \theta \,\mathbf{k}$$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta} = \operatorname{sen}^{2} \phi \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen}^{2} \phi \sin \theta \mathbf{j} + \operatorname{sen} \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Portanto

 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}) = \cos \phi \sin^2 \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta$ 

□ Compare a Equação 9 com a expressão semelhante para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

□ A Figura 13 mostra o campo vetorial F do Exemplo 5 em pontos da esfera unitária.

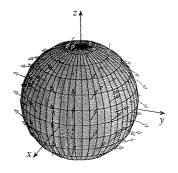


FIGURA 13

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{\phi} \times \mathbf{r}_{\theta}) dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} (2 \operatorname{sen}^{2} \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^{3} \phi \operatorname{sen}^{2} \theta) d\phi d\theta$$

$$= 2 \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^{2} \phi \cos \phi d\phi \int_{0}^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^{3} \phi d\phi \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^{2} \theta d\theta$$

$$= 0 + \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^{3} \phi d\phi \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^{2} \theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 2.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 5 é um campo de velocidade descrevendo o fluxo de um fluido de densidade 1, então a resposta  $4\pi/3$  representa a taxa de vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

Embora tenhamos usado como motivação para a integral de superfície de um campo de vetores o exemplo de mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo: se E é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint\limits_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

é chamada **fluxo elétrico** de **E** através da superfície *S*. Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga contida por uma superfície *S* é

$$Q = \varepsilon_0 \iint\limits_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde  $\varepsilon_0$  é uma constante (denominada permissividade do espaço livre) que depende das unidades usadas. (No sistema SI,  $\varepsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ .) Portanto, se o campo vetorial **F** do Exemplo 5 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é  $Q = 4\pi\varepsilon_0/3$ .

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja u(x, y, z). Então o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K \nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de fluxo de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint\limits_{S} \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EARRECLE a = 1 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de fluxo de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como a origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K \nabla u = -KC(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 5, observamos que o vetor normal para a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a} (x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k})$$

e então

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a} \left( x^2 + y^2 + z^2 \right)$$

Mas sobre S temos  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , e  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$ . Portanto, a taxa de fluxo de calor através de S é

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -2aKC \iint_{S} dS$$
$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^{2}) = -8KC\pi a^{3}$$

# 16.7

#### Exercícios

- Seja S o cubo com vértices (±1, ±1, ±1). Aproxime ∫∫<sub>S</sub> √x² + 2y² + 3z² dS usando as somas de Riemann como na Definição 1, tomando os retalhos S<sub>ij</sub> como os quadrados que são as faces do cubo e os centros desses quadrados como os pontos P<sup>\*</sup><sub>ij</sub>.
- 2. Uma superfície S é formada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1, -1 \le z \le 1$ , e por círculos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com  $f(\pm 1, 0, 0) = 2$ ,  $f(0, \pm 1, 0) = 3$  e  $f(0, 0, \pm 1) = 4$ . Estime o valor de  $\iint_S f(x, y, z) dS$  usando a soma de Riemann, tomando retalhos  $S_{ij}$  como os círculos do fundo e do topo, e a lateral dividida em quatro partes.
- 3. Seja H o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ ,  $z \ge 0$ , e suponha que f seja uma função contínua com f(3, 4, 5) = 7, f(3, -4, 5) = 8, f(-3, 4, 5) = 9 e f(-3, -4, 5) = 12. Dividindo H em quatro retalhos, estime o valor de  $\iint_H f(x, y, z) dS$ .
- Suponha que  $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ , onde  $g \in \text{uma}$  função de uma variável tal que g(2) = -5. Calcule  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , onde  $S \in \text{a esfera } x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

5-18 🗆 Calcule a integral de superfície.

- 5.  $\iint_S x^2yz \, dS$ , S é a parte do plano z = 1 + 2x + 3y que está acima do retângulo  $[0, 3] \times [0, 2]$ .
- **6.**  $\iint_S xy \, dS$ ,  $S \in$ a região triangular com vértices (1, 0, 0), (0, 2, 0) e (0, 0, 2).
- 7.  $\iint_S yz \, dS$ ,  $S \notin a$  parte do plano x + y + z = 1 que está no primeiro octante.
- **8.**  $\iint_S y \, dS$ ,  $S \in a$  superfície  $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2}), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
- 9.  $\iint_S x^2 z^2 dS$ , S é a parte do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  que está entre os planos z = 1 e z = 3
- 10.  $\iint_S z \, dS,$ S \(\epsilon\) a superfície  $x = y + 2z^2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$
- 11.  $\iint_S y \, dS$  $S \notin a$  parte do parabolóide  $y = x^2 + z^2$  que está no interior do cilindro  $x^2 + z^2 = 4$
- 12.  $\iint_S xy \, dS$ , S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  e pelos planos y = 0 e x + y = 2

- **13.**  $\iint_{S} (x^2z + y^2z) dS$ ,  $\vec{S}$  é o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \ge 0$
- **14.**  $\iint_S xyz dS$ ,  $\tilde{S}$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **15.**  $\iint_S (x^2y + z^2) dS$ , S é a parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  entre os planos z = 0 e
- **16.**  $\iint_{S} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$ S é formada pelo cilindro do Exercício 15, além dos círculos que compõem o fundo e o topo.
- 17.  $\iint_{S} yz dS$ , S é a superfície com equações paramétricas  $x = u^2$ , y = u sen v,  $z = u \cos v$ ,  $0 \le u \le 1$ ,  $0 \le v \le \pi/2$
- **18.**  $\iint_{S} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$ , S é o helicóide com equação vetorial  $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$
- 19-28  $\Box$  Calcule a integral de superfície  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  para o campo vetorial F e superfície orientada S. Em outras palavras, determine o fluxo de F através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação (para fora) positiva.
- **19.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ ,  $S \in a$  parte do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  que está acima do quadrado  $0 \le x \le 1$ ,  $0 \le y \le 1$ , com orientação para cima.
- **20.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + 4x^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$ ,  $S \in \text{a superficie } z = xe^y$ ,  $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ , com orientação para cima
- 21.  $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^{y}\mathbf{i} xze^{y}\mathbf{j} + z\mathbf{k},$ S é a parte do plano x + y + z = 1 no primeiro octante, com orientação para baixo
- **22.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z^4 \, \mathbf{k}$ , S é a parte do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  abaixo do plano z = 1 com orientação para baixo
- **23.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \, \mathbf{i} z \, \mathbf{j} + y \, \mathbf{k},$ S é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  no primeiro octante com orientação para a origem.
- 24.  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$  Sé o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $y \ge 0$ , orientado na direção do eixo y positivó
- **25.**  $F(x, y, z) = y \mathbf{j} z \mathbf{k}$ , S é formado pelo parabolóide  $y = x^2 + z^2$ ,  $0 \le y \le 1$ , e pelo círculo  $x^2 + z^2 \le 1$ , y = 1
- **26.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$ ,  $S \in a$  superfície do Exercício 12.
- **27.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$ , S é o cubo com vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
- **28.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \, \mathbf{i} + x \, \mathbf{j} + z^2 \, \mathbf{k},$ S é o helicóide do Exercício 18, com orientação para cima 0 2 T 4 4 5
- 29. Calcule ∫∫ xyz dS preciso até a quarta casa decimal, onde S é a superfície z = xy,  $0 \le x \le 1$ ,  $0 \le y \le 1$ .

- 30. Determine o valor exato de  $\iint_S x^2 yz dS$ , onde S é a superfície do Exercício 29.
- 31. Determine o valor de  $\iint_S x^2 y^2 z^2 dS$  correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do parabolóide  $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.
- 32. Determine o fluxo de  $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^2e^{x/5}\mathbf{k}$ através da parte do cilindro  $4y^2 + z^2 = 4$  que está acima do plano xy e entre os planos x = -2 e x = 2 com orientação para cima. Ilustre, usando um sistema algébrico computacional para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.
  - 33. Determine a fórmula para  $\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por y = h(x, z) e  $\mathbf{n}$  é o versor normal que aponta para a esquerda.
  - **34.** Determine a fórmula para  $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por x = k(y, z) e  $\mathbf{n}$  é o versor normal que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).
  - 35. Determine o centro de massa do hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \ge 0$ , se ele tiver densidade constante.
  - 36. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $1 \le z \le 4$ , se sua função densidade é  $\rho(x, y, z) = 10 - z.$
  - 37. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I. em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S, se a função densidade é  $\rho$ .
    - (b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 36.
  - **38.** A superfície cônica  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \le z \le a$  tem densidade constante k. Determine (a) o centro de massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z.
  - 39. Um fluido com densidade 1200 flui com velocidade  $\mathbf{v} = y \mathbf{i} + \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ . Determine a taxa de vazão do fluido através do parabolóide  $z = 9 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \le 36.$
  - 40. Um fluido com densidade 1500 e campo de velocidade  $\mathbf{v} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ . Determine a taxa de vazão do fluido saindo da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .
  - 41. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido  $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ ,  $z \ge 0$ , se o campo elétrico é  $\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}.$
  - 42. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  se o campo elétrico é  $\mathbf{E}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$
- **43.** A temperatura em um ponto (x, y, z) em uma substância com condutividade  $K = 6.5 \text{ é } u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$ . Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância através da superfície cilíndrica  $y^2 + z^2 = 6$ ,  $0 \le x \le 4$ .
- 44. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade Ké inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

## 16.8

#### O Teorema de Stokes

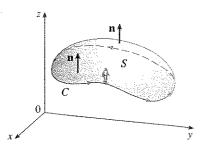


FIGURA 1

□ O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (de fato ele tinha a mesma posição que Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocès sir William Thompson (1824-1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes para prová-lo em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha ao redor de sua curva fronteira plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao redor da curva fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com seu versor normal  $\mathbf{n}$ . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira** C mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de  $\mathbf{n}$ , então a superfície estará sempre à sua esquerda.

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, lisa por trechos, cuja fronteira é formada por uma curva C simples, fechada, lisa por trechos, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém S. Então

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \qquad \mathbf{e} \qquad \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha ao redor da curva fronteira de S do componente tangencial de F é igual à integral de superfície do componente normal do rotacional de F.

A curva fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com freqüência denotada por  $\partial S$ , de modo que o Teorema de Stokes possa ser escrito como

$$\iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo as derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que o rot **F** é uma espécie de derivada de **F**) e do lado direito, envolvendo valores de **F**, calculados somente na *fronteira* de *S*.

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy com orientação para cima, o versor normal é  $\mathbf{k}$ , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Esta é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada pela Equação 16.5.12. Então vemos que o Teorema de Green é, realmente, um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de provar no caso geral, podemos fazer uma prova quando S for um gráfico e F, S e C forem bem comportados.

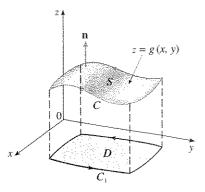


FIGURA 2

France de Sand Espansian de Teoressa de Stokes Admitiremos que a equação de S seja  $z = g(x, y), (x, y) \in D$ , onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja fronteira  $C_1$  corresponde a C. Se a orientação de S for para cima, então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de  $C_1$  (veja a Figura 2). É-nos dado que F = P i + Q j + R k, onde as derivadas parciais de P,  $Q \in R$  são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.8 com  ${\bf F}$  substituído por rot  ${\bf F}$ . O resultado é

$$\iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_{S} \left[ -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA$$

onde as derivadas parciais de P, Q e R são calculadas em (x, y, g(x, y)). Se

$$x = x(t)$$
  $y = y(t)$   $a \le t \le b$ 

é a representação paramétrica de  $C_1$ , então a representação paramétrica de C é

$$x = x(t)$$
  $y = y(t)$   $z = g(x(t), y(t))$   $a \le t \le b$ 

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a}^{b} \left( P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{a}^{b} \left[ P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt$$

$$= \int_{a}^{b} \left[ \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

$$= \int_{C_{1}} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

$$= \iint_{C_{1}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P, Q e R são funções de x, y e z e que z é, por sua vez, função de x e y, obtemos

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^{2} z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser arrumados para coincidir com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

 $\begin{array}{c|c} S & C \\ \hline D & 0 \\ \hline \end{array}$ 

FIGURA 3

**EXEMPLO 1**  $\Box$  Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  e C é a curva da interseção do plano y + z = 2 com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . (Oriente C para ter o sentido anti-horário quando visto de cima.)

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

rot 
$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k}$$

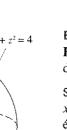
Apesar de haver muitas superfícies com fronteira C, a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano y+z=2 cuja fronteira é C. Se orientarmos S para cima, então a orientação induzida em C será positiva. A projeção D de S sobre o plano xy é o disco  $x^2+y^2 \le 1$ , e assim, usando a Equação 16.7.8 com z=g(x,y)=2-y, temos

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} (1 + 2y) dA$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} (1 + 2r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[ \frac{r^{2}}{2} + 2 \frac{r^{3}}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_{0}^{1} d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi) + 0 = \pi$$



 $x^2 + y^2 = 1$ 

FIGURA 4

**EXEMPLO 2**  $\Box$  Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S$  rot  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e S é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano xy (veja a Figura 4).

SOLUÇÃO Para achar a curva fronteira C resolvemos as equações  $x^2+y^2+z^2=4$  e  $x^2+y^2=1$ . Subtraindo, obtemos  $z^2=3$ , e assim  $z=\sqrt{3}$  (uma vez que z>0). Então, C é a circunferência dada pelas equações  $x^2+y^2=1$ ,  $z=\sqrt{3}$ . A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \,\mathbf{i} + \sin t \,\mathbf{j} + \sqrt{3} \,\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(r(t)) = \sqrt{3} \operatorname{sen} t \mathbf{i} + \sqrt{3} \cos t \mathbf{j} + \cos t \operatorname{sen} t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_{S} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0}^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \left( -\sqrt{3} \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t \cos t \right) dt$$
$$= \sqrt{3} \int_{0}^{2\pi} 0 dt = 0$$

Note que no Exemplo 2 calculamos a integral de superfície simplesmente sabendo os valores de  $\mathbf{F}$  na curva fronteira C. Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma curva fronteira C, obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies orientadas com mesma curva fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\iint_{S_{c}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_{c}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma superfície, mas é mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e v represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

e lembre-se de que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$  é o componente de  $\mathbf{v}$  na direção do versor tangente  $\mathbf{T}$ . Isso significa que, quanto mais próxima a direção de  $\mathbf{v}$  está da direção de  $\mathbf{T}$ , maior é o valor de  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ . Assim,  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  é a medida da tendência de o fluido se mover ao redor de C e é chamada circulação de  $\mathbf{v}$  ao redor de C (veja a Figura 5).

Seja agora  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  um ponto do fluido e seja  $S_a$  um pequeno círculo com raio a e centro  $P_0$ . Então (rot  $\mathbf{v}$ )(P)  $\approx$  (rot  $\mathbf{v}$ )( $P_0$ ) para todos os pontos P de  $S_a$ , porque rot  $\mathbf{v}$  é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação da circulação ao redor do círculo fronteira  $C_a$ :

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{ rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{ rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{ rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{ rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Essa aproximação se torna melhor quando  $a \rightarrow 0$  e temos

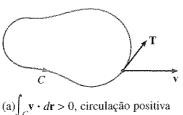
$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

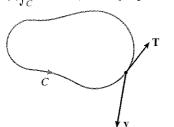
A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é a medida do efeito da rotação do fluido ao redor do eixo  $\mathbf{n}$ . O efeito de rotacionar é maior em um eixo paralelo a rot  $\mathbf{v}$ .

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para provar o Teorema 16.5.4 (que estabelece que, se rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  sobre  $\mathbb{R}^3$ , então  $\mathbf{F}$  é conservativo). De nosso trabalho prévio (Teoremas 16.3.3 e 16.3.4) sabemos que  $\mathbf{F}$  é conservativo se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todo caminho fechado C. Dado C, suponha que possamos achar uma superfície orientada S cuja fronteira seja C. (Isso pode ser feito, mas a prova requer técnicas avançadas.) Então o Teorema de Stokes fornece

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em um número finito de curvas simples, e as integrais ao redor dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para qualquer curva fechada C.





(b)  $\int_{C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$ , circulação negativa FIGURA 5

☐ Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P, como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a rot **v**.

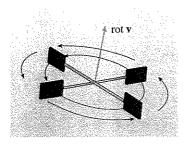
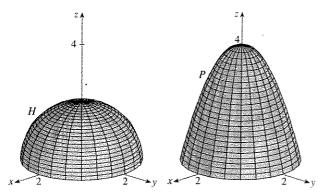


FIGURA 6

## 16.8 Exercícios

 Um hemisfério H e uma parte P de um parabolóide estão mostrados. Suponha que F seja um campo vetorial sobre R³ cujos componentes têm derivadas parciais contínuas. Explique por quê

$$\iint\limits_{H} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{P} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Use o Teorema de Stokes para calcular  $\iint_S$  rot  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ .

- F(x, y, z) = yz i + xz j + xy k,
   S é a parte do parabolóide z = 9 x² y² que está acima do plano z = 5, com orientação para cima.
- **3.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 e^{yz} \mathbf{i} + y^2 e^{xz} \mathbf{j} + z^2 e^{xy} \mathbf{k}$ ,  $S \in \text{o hemisfério } x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0$ , com orientação para cima
- **4.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y^3 z \mathbf{i} + \operatorname{sen}(xyz) \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$  $S \in \mathbf{i}$  a parte do cone  $y^2 = x^2 + z^2$  que está entre os planos, y = 0 e y = 3, orientado na direção positiva do eixo y
- 5. F(x, y, z) = xyz i + xy j + x²yz k, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices (±1, ±1, ±1), com orientação para fora. [Dica: use a Equação 3.]
- **6.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \cos z \, \mathbf{i} + x^2 z \, \mathbf{j} + xy \, \mathbf{k}$ ,  $S \in \text{o hemisfério } x = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \text{ orientado na direção positiva do eixo } x \, [Dica: use a Equação 3.]$

Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

- **F**(x, y, z) = ( $x + y^2$ ) **i** + ( $y + z^2$ ) **j** + ( $z + x^2$ ) **k**,  $C \in O$  triângulo com vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1).
- **8.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \mathbf{i} + e^{x} \mathbf{j} + e^{z} \mathbf{k}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  a fronteira da parte do plano 2x + y + 2z = 2 no primeiro octante.

- **9.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \, \mathbf{i} + 2xz \, \mathbf{j} + e^{xy} \, \mathbf{k}$ , C é a circunferência  $x^2 + y^2 = 16$ , z = 5
- **10.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 + y^2) \mathbf{k}$ , C é a fronteira da parte do parabolóide  $z = 1 x^2 y^2$  no primeiro octante
- 11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z \mathbf{i} + x y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

e C é a curva da interseção do plano x + y + z = 1 com o cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  com orientação no sentido antihorário quando visto de cima.

- (b) Trace o gráfico do plano e do cílindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).
- (c) Determine as equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.
- 12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular ∫<sub>C</sub> F · dr, onde F(x, y, z) = x²y i + ½x³ j + xy k e C é a curva da interseção do parabolóide hiperbólico z = y² x² com o cilindro x² + y² = 1 com orientação no sentido antihorário quando visto de cima.
  - (b) Trace o gráfico do parabolóide hiperbólico e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).
  - (c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado F e a superfície S.

- **13.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ S é a parte do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que está acima do plano z = 1, orientado para cima.
- **14.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$  $S \notin \text{a parte do plano } 2x + y + z = 2 \text{ que está no primeiro octante, orientada para cima.}$
- **15.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  $S \in \mathbf{i}$  o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \ge 0$ , orientado da direção positiva do eixo y.
- **16.** Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle ax^3 - 3xz^2, x^2y + by^3, cz^3 \rangle$$

Seja C a curva do Exercício 12 e considere todas as possíveis superfícies lisas S cuja curva fronteira é C. Ache os valores de a, b e c para os quais  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  é independente da escolha de S.

17. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^{x} + z^{2})\mathbf{i} + (y^{y} + x^{2})\mathbf{j} + (z^{z} + y^{2})\mathbf{k}$$

quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da

borda da parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está no primeiro octante, na direção anti-horária quando vista por cima.

- **18.** Calcule  $\int_C (y + \sin x) dx + (z^2 + \cos y) dy + x^3 dz$ , onde  $C \notin a \text{ curva } \mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin 2t \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ . [Dica: observe que C está na superfície z = 2xy.]
- **19.** Se S é uma esfera e  $\mathbf{F}$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que  $\iint_S$  rot  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ .
- 20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f, g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para mostrar o seguinte:

(a) 
$$\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$$

(b) 
$$\int_C (f\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

(c) 
$$\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

#### ingjeta Bests

#### Três Homens e Dois Teoremas

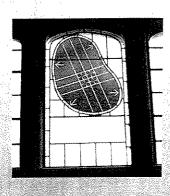
Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e predizer fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos. Os fatos básicos da história são dados nas páginas 1070 e 1106.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em fazê-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram de pesquisas em eletricidade e magnetismo e depois foram usados no estudo de uma variedade de outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes, e o livro de Thompson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem subsídios da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

- 1. CANNELL, D. M, George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841: The Background to His Life and Work. Filadelfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- GILLISPIE, C. C. (ed.), Dictionary of Scientific Biography. Nova York, Scribner's, 1974. Ver artigo sobre Green em P. J. Wallis, v. XV, artigo sobre Thompson em Jed Buchwald, e sobre Stokes em E. M. Parkinson, no v. XIII.
- 3. GRATTAN-GUINNESS, I., Why did George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism? *Amer. Math. Monthly: v.* 102 (1995), p. 387-96.
- 4. GRAY, J., There was a jolly miller. The New Scientist, v. 139 (1993), p. 24-7.
- 5. HUTCHINSON, G. E., *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport Conn.: Greenwood Press, 1978.
- KATZ, V., A History of Mathematics: An Introduction. Nova York, HarperCollins, 1993, p. 678-80.
- KLINE, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Nova York, Oxford University Press, 1972, p. 683-85.
- 8. THOMPSON, S.P., The Life of Lord Kelvin. Nova York, Chelsea, 1976.

☐ A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.



Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{D} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

onde C é a curva fronteira da região do plano D, orientada positivamente. Se quisermos estender esse teorema para campos vetoriais em  $\mathbb{R}^3$ , podemos apostar que

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{F} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E. A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas, e é chamada Teorema da Divergência. Note sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes no fato que ele relaciona a integral da derivada de uma função (div F, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original F sobre a fronteira da região.

Nesse estágio você pode fazer uma revisão dos vários tipos de regiões sobre os quais calculamos uma integral tripla na Seção 15.7. Estabeleceremos e provaremos o Teorema da Divergência para as regiões E que são simultaneamente dos tipos 1, 2 e 3 e às quais chamaremos regiões sólidas simples. (Por exemplo: regiões limitadas por elipsóides ou caixas retangulares são regiões sólidas simples.) A fronteira de F é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  está apontando para fora de E.

Teorema da Divergência Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja F um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Prova Seja  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ . Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

logo

$$\iiint_{E} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_{E} \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_{E} \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_{E} \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Se n é o versor da normal que sai de S, então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema da Divergência é

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S} (P \, \mathbf{i} + Q \, \mathbf{j} + R \, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$
$$= \iint_{S} P \, \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S} Q \, \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S} R \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

□ O Teorema da Divergência é algumas vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema da Divergência é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que publicou esse resultado em 1826.

Portanto, para provar o Teorema da Divergência, é suficiente provar as três seguintes equações:

$$\iint_{S} P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{E} \frac{\partial P}{\partial x} \, dV$$

$$\iint_{S} Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{E} \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV$$

$$\iint_{S} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{F} \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Para provar a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}\$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy. Pela Equação 15.7.6, temos

$$\iiint\limits_{E} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{D} \left[ \int_{u_{z}(x,y)}^{u_{z}(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} (x, y, z) dz \right] dA$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[ R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y)) \right] dA$$

A superfície fronteira S é formada por três peças: a superfície do fundo  $S_1$ , a superfície do topo  $S_2$  e possivelmente uma superfície vertical  $S_3$ , que está acima da curva fronteira de D. (Veja a Figura 1. Pode acontecer de  $S_3$  não existir, como no caso da esfera.) Note que sobre  $S_3$  temos  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ , porque  $\mathbf{k}$  é vertical e  $\mathbf{n}$  é horizontal, e assim

$$\iint\limits_{S_1} R \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint\limits_{S_2} 0 \, dS = 0$$

Logo, não interessando a existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$\iint_{S} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_{1}} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_{2}} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

A equação de  $S_2$  é  $z = u_2(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , e o vetor normal que sai de **n** aponta para cima. Da Equação 16.7.8 (com **F** substituído por R **k**) temos

$$\iint\limits_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint\limits_{D} R(x, y, u_2(x, y)) \, dA$$

Sobre  $S_1$  temos  $z = u_1(x, y)$ , mas aqui a normal n aponta para baixo, e então multiplicamos por -1:

$$\iint\limits_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iint\limits_{D} R(x, y, u_1(x, y)) \, dA$$

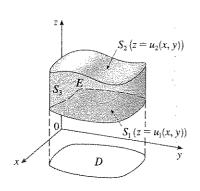


FIGURA 1

Portanto a Equação 6 dá

$$\iint\limits_{S} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint\limits_{D} \left[ R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y)) \right] dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint\limits_{S} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint\limits_{E} \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

As Equações 2 e 3 são provadas de modo análogo, usando as expressões para *E* como uma região do tipo 2 ou do tipo 3.

EXEMPLO 2  $\subseteq$  Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  sobre a esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos a divergência de F:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (z) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ . Então, o Teorema da Divergência dá o fluxo como

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_{B} 1 \, dV$$
$$= V(B) = \frac{4}{3} \pi (1)^{3} = \frac{4 \pi}{3}$$

EXEMPLO 2  $\supset$  Calcule  $\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \,\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}) \,\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy) \,\mathbf{k}$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico  $z = 1 - x^2$  e pelos planos z = 0, y = 0 e y + z = 2 (veja a Figura 2).

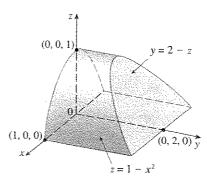


FIGURA 2

SOLUÇÃO Deve ser extremamente difícil calcular a integral da superfície dada diretamente. (Teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S.)

Note que o método de prova do Teorema da Divergência é muito semelhante ao do Teorema de Green.

☐ A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 5 na Seção 16.7. Além disso, a divergência de F é muito menos complicada que o próprio F:

div 
$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy)$$
  
=  $y + 2y = 3y$ 

Portanto, usamos o Teorema da Divergência para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever *E* como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1 - x^2, \ 0 \le y \le 2 - z\}$$

Assim temos

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{E} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_{E} 3y \, dV$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^{2}} \int_{0}^{2-z} y \, dy \, dz \, dx$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^{2}} \frac{(2-z)^{2}}{2} \, dz \, dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \left[ -\frac{(2-z)^{3}}{3} \right]_{0}^{1-x^{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[ (x^{2} + 1)^{3} - 8 \right] dx$$

$$= -\int_{0}^{1} (x^{6} + 3x^{4} + 3x^{2} - 7) \, dx = \frac{184}{35}$$

Apesar de termos provado o Teorema da Divergência somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser provado para regiões que são uma união finita de regiões sólidas simples. (O procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green.)

Por exemplo: vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas  $S_1$  e  $S_2$ , onde  $S_1$  está dentro de  $S_2$ . Sejam  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  as normais apontando para fora de  $S_1$  e  $S_2$ . Então a superfície fronteira de E é  $S = S_1 \cup S_2$  e sua normal  $\mathbf{n}$  é dada por  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$  sobre  $S_1$  e  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$  sobre  $S_2$  (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema da Divergência a S, obtemos

$$\iiint_{E} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= \iint_{S_{1}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_{1}) dS + \iint_{S_{2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{2} dS$$

$$= -\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Vamos aplicar isso ao campo elétrico (veja o Exemplo 5 na Seção 16.1):

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \, \mathbf{x}$$

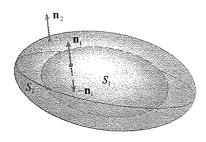


FIGURA 3

onde  $S_1$  é uma esfera pequena com raio a e centro na origem. Você pode verificar que div E = 0 (veja o Exercício 21). Portanto, da Equação 7 vem

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{E} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV$$
$$= \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre  $S_1$  porque  $S_1$  é uma esfera. O vetor normal em  $x \in \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Portanto

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$
$$= \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

já que a equação de  $S_1$  é  $|\mathbf{x}| = a$ . Logo, temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1)$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi \varepsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de **E** é  $4\pi\epsilon Q$  através de *qualquer* superfície fechada  $S_2$  que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.10) para uma carga simples. A relação entre  $\epsilon$  e  $\epsilon_0$  é  $\epsilon=1/(4\pi\epsilon_0)$ .]

Outra aplicação do Teorema da Divergência aparece em escoamento de fluidos. Seja  $\mathbf{v}(x,y,z)$ ) o campo de velocidade de um fluido com densidade constante  $\rho$ . Então a taxa de vazão do fluido por unidade de área é  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ . Se  $P_0(x_0,y_0,z_0)$  é um ponto no fluido e  $B_a$  é uma bola com centro em  $P_0$  e raio muito pequeno a, então div  $\mathbf{F}(P) \approx \text{div } \mathbf{F}(P_0)$  para todos os pontos de  $B_a$ , uma vez que div  $\mathbf{F}$  é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica  $S_a$ , como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

$$\approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \, dV$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que  $a \rightarrow 0$  e sugere que

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 nos diz que div  $\mathbf{F}(P_0)$  é a taxa líquida do fluxo por unidade de volume que sai de  $P_0$ . (Essa é a razão para o nome divergência.) Se div  $\mathbf{F}(P) > 0$ , a taxa líquida do fluido está saindo de perto de P, e P é chamado **fonte**. Se div  $\mathbf{F}(P) < 0$ , a taxa líquida do fluido está entrando perto de P, e P é denominado **sorvedouro**.

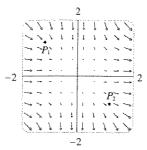
Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P<sub>1</sub> são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P<sub>t</sub>. Então o fluxo líquido sai perto de  $P_1$ , e assim div  $\bar{\mathbf{F}}(P_1) > 0$  e  $P_1$  é uma fonte. Por outro lado, perto de  $P_2$ , os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo líquido é na direção de entrar, assim div  $F(P_2) < 0$  e  $P_2$  é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para F para confirmar essa impressão. Como  $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$ , temos div  $\mathbf{F} = 2x + 2y$ , que é positivo quando y > -x. Assim os pontos acima da reta y = -x são fontes e os pontos abaixo da reta são sorvedouros.

|            |     |   | 31 |   |   |   |               |
|------------|-----|---|----|---|---|---|---------------|
| 1 1        | Ť   | ĵ | ١  |   | Ĵ | ĵ | 1 1           |
| 1 1        | 1   | 1 | 1  | Î | İ | 1 | 12 11         |
| المر الإسر | 1   | 1 | i  | 1 | i | 2 | $P_{\bullet}$ |
| صر خسر     | ~   |   |    |   | , | - |               |
| —÷ -÷      | _   |   |    |   | , |   |               |
|            |     | - |    |   | - |   | >χ            |
| >          | -   | , | ,  |   |   | ^ | >             |
| جر ھدر     | Ď.  | 7 | 1  | 1 | 7 | 1 | الله مر       |
| 12 12      | 1 2 | t | d. | 9 | ĵ | 1 | 2 7           |
| p #        | 18  | ĵ | ٥  | Ê | ŝ | Î | 7 7           |

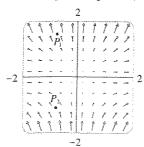
FIGURA 4 Campo vetorial  $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$ 

#### 16.9 Exercícios

1. A figura mostra um campo vetorial F. Use a interpretação da divergência derivada nesta seção para determinar se div F é positivo ou negativo em  $P_1$  e em  $P_2$ .



- 2. (a) Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são fontes ou sorvedouros para o campo vetorial F mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
  - (b) Dado  $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$ , use a definição de divergência para verificar sua resposta da parte (a).



3-6 🗆 Verifique que o Teorema da Divergência é verdadeiro para o campo vetorial  $\mathbf{F}$  na região E.

- 3.  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$ , E é o cubo limitado pelos planos x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0 e z = 1
- 4.  $F(x, y, z) = x^2 i + xy j + z k$ E é o sólido delimitado pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e pelo plano xy
- 5.  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \, \mathbf{i} + yz \, \mathbf{j} + zx \, \mathbf{k},$ E é o cilindro sólido  $x^2 + y^2 \le 1$ ,  $0 \le z \le 1$
- 6. F(x, y, z) = x i + y j + z k, E é a bola unitária  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

7-17 🗆 Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ ; ou seja, calcule o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de S.

- 7.  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$ S é a superfície da caixa delimitada pelos planos x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, e z = 2
- 8.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + xz^4 \mathbf{k}$ S é a superfície da caixa de vértices  $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$
- **9.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2 \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$ , S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 1$  e pelos planos x = -1 e x = 2
- **10.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 y \, \mathbf{i} x^2 y^2 \, \mathbf{j} x^2 y z \, \mathbf{k}$ , S é a superfície do sólido limitado pelo hiperbolóide  $x^{2} + y^{2} - z^{2} = 1$  e pelos planos z = -2 e z = 2

- (11)  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \sec z \mathbf{i} + \cos(xz) \mathbf{j} + y \cos z \mathbf{k}$  $S \in \mathbf{i} = \sin x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
- 12.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + 2xyz \mathbf{k}$  $S \in \mathbf{a}$  superfície do tetraedro limitado pelos planos x = 0, y = 0, z = 0, ex + 2y + z = 2
- **13.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\mathbf{i} + xe^{-z}\mathbf{j} + (\sin y + x^2z)\mathbf{k}$   $S \in \text{ a superficie do sólido limitado pelo parabolóide}$  $z = x^2 + y^2 \text{ e o plano } z = 4$
- 14.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4 \mathbf{i} x^3 z^2 \mathbf{j} + 4xy^2 z \mathbf{k}$  $S \in \mathbf{e}$  a superfície do sólido limitado pelo cilíndro  $x^2 + y^2 = 1$  e os planos z = x + 2 e z = 0
- **15.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^3z\mathbf{i} + 4y^3z\mathbf{j} + 3z^4\mathbf{k}$ Sé a esfera com centro na origem e raio R
- **16.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y \operatorname{sen} z) \mathbf{i} + (y^3 + z \operatorname{sen} x) \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$ ,  $S \in \text{ a superficie do sólido limitado pelos hemisférios}$  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  e pelo plano z = 0
- 17.  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y}$  tg  $z \mathbf{i} + y\sqrt{3 x^{2}} \mathbf{j} + x \operatorname{sen} y \mathbf{k}$ ,  $S \in a$  superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície  $z = 2 - x^{4} - y^{4}$ ,  $-1 \le x \le 1$ ,  $-1 \le y \le 1$
- 18. Use um sistema algébrico computacional para plotar o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \cos^2 y \, \mathbf{i} + \sin^3 y \cos^4 z \, \mathbf{j} + \sin^5 z \cos^6 x \, \mathbf{k}$

no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos  $x = \pi/2$ ,  $y = \pi/2$ , e  $z = \pi/2$ . Em seguida calcule o fluxo através da superfície do cubo.

19. Use o Teorema da Divergência para calcular  $\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 x \mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \text{tg } z) \mathbf{j} + (x^2 z + y^2) \mathbf{k}$$

e S é a metade de cima da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . [Dica: note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre  $S_1$  e  $S_2$ , onde  $S_1$  é o círculo  $x^2 + y^2 \le 1$ , orientado para baixo, e  $S_2 = S \cup S_1$ .]

**20.** Seja  $\mathbf{F}(x, y, z) = z$  tg<sup>-t</sup>  $(y^2)\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

Determine o fluxo de F através da parte do parabolóide  $x^2 + y^2 + z = 2$  que está acima do plano z = 1 e está orientada para baixo.

21. Verifique que div E = 0 para o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

22. Use o Teorema da Divergência para calcular

$$\iint\limits_{\mathcal{E}} (2x+2y+z^2) \, dS$$

onde S é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

23-28 — Prove cada identidade, admitindo que S e E satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e que as funções escalares e componentes do campo vetorial tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

- **23.**  $\iint_{S} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ , onde  $\mathbf{a}$  é um vetor constante
- **24.**  $V(E) = \frac{1}{3} \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$
- **25.**  $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \Phi \cdot d\Sigma = 0$
- **26.**  $\iint_{S} D_{\mathbf{u}} f dS = \iiint_{S} \nabla^{2} f dV$
- 27.  $\iint\limits_{S} (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint\limits_{E} (f \nabla^{2} g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$
- **28.**  $\iint\limits_{S} (f\nabla g g\nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint\limits_{E} (f\nabla^{2}g g\nabla^{2}f) \, dV$
- **29.** Suponha que *S* e *E* satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e *f* seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Prove que

$$\iint\limits_{S} f\mathbf{n} \, dS = \iiint\limits_{E} \nabla f \, dV$$

Essa superfície e a integral tripla da função vetorial são vetores definidos integrando cada função componente.

[*Dica*: comece aplicando o Teorema da Divergência a  $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante arbitrário.]

30. Um sólido ocupa a região E com superfície S e está imerso em um líquido com densidade constante ρ. Estabelecemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo adentrando no líquido. Então a pressão na profundidade z é p = ρgz, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 8.3). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\iint_{S} p\mathbf{n} \, dS$$

onde  $\mathbf{n}$  é o versor normal apontando para fora. Use o resultado do Exercício 29 para mostrar que  $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$ , onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Note que  $\mathbf{F}$  é direcionado para cima porque z está direcionado para baixo.) O resultado é o *Princípio de Archimedes*: a força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

## 16.10

## Resumo dos Teoremas

Os principais resultados deste capítulo são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Para ajudá-lo, coletamos os teoremas (sem suas hipóteses) de forma que você possa ver mais facilmente suas semelhanças essenciais. Note que em cada caso temos uma integral de uma "derivada" sobre uma região do lado esquerdo, e do lado direito temos os valores da função original somente na fronteira da região.

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

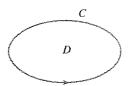


Teorema Fundamental para as Integrais de Linha  $\int_{C} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ 



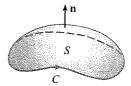
Teorema de Green

$$\iint\limits_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C} P \, dx + Q \, dy$$



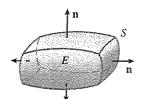
Teorema de Stokes

$$\iint_{\mathbb{R}} \operatorname{rot}^{\top} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema da Divergência

$$\iiint_{\mathbf{F}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



- O que é um campo vetorial? Dê três exemplos com significado físico.
- 2. (a) O que é um campo vetorial conservativo?
  - (b) O que é uma função potencial?
- **3.** (a) Escreva a definição da integral de linha para uma função escalar *f* ao longo de uma curva lisa *C* em relação ao comprimento de arco.
  - (b) Como calcular tal integral?
  - (c) Escreva expressões para a massa e o centro de massa para um arame fino com o formato da curva C se o arame tiver função densidade linear  $\rho(x, y)$ .
  - (d) Escreva a definição das integrais de linha sobre C de uma função escalar f com relação a x, y e z.
  - (e) Como calcular essas integrais de linha?
- 4. (a) Defina a integral de linha do campo vetorial  ${\bf F}$  ao longo da curva lisa C dada pela função vetorial  ${\bf r}(t)$ .
  - (b) Se F é um campo de força, o que essa integral de linha representa?
  - (c) Se  $F = \langle P, Q, R \rangle$ , qual a relação entre a integral de linha de F e as integrais de linha dos componentes P,  $Q \in R$ ?
- 5. Enuncie o Teorema Fundamental para as Integrais de Linha.
- **6.** (a) O que significa dizer que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho?
  - (b) Se você sabe que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho, o que pode dizer sobre  $\mathbf{F}$ ?
- 7. Enuncie o Teorema de Green.
- **8.** Escreva expressões para a área delimitada pela curva C em termos da integral de linha ao redor de C.
- **9.** Suponha que  $\mathbf{F}$  seja um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Defina rot F.
  - (b) Defina div F.

- (c) Se **F** for um campo de velocidade em um fluido, qual a interpretação física de rot **F** e de div **F**?
- 10. Se  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ , como você determina se  $\mathbf{F}$  é conservativo? E se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ ?
- 11. (a) O que é uma superfície paramétrica? O que são suas curvas de grade?
  - (b) Escreva uma expressão para a área de uma superfície paramétrica.
  - (c) Qual é a área da superfície dada pela equação z = g(x, y)?
- **12.** (a) Escreva a definição da integral de superfície de uma função escalar *f* sobre uma superfície *S*.
  - (b) Como calcular tal integral se S for uma superfície paramétrica dada por uma função vetorial r(u, v)?
  - (c) E se S for dada pela equação z = g(x, y)?
  - (d) Se uma folha fina tem o formato de uma superfície S, e a densidade em (x, y, z) é ρ(x, y, z), escreva expressões para a massa e o centro de massa da folha.
- (a) O que é uma superfície orientada? Dê um exemplo de uma superfície não-orientada.
  - (b) Defina a integral de superfície (ou fluxo) de um campo vetorial F sobre uma superfície orientada S com vetor unitário normal n.
  - (c) Como calcular tal integral se S for uma superfície paramétrica dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(u, v)$ ?
  - (d) E se S for dada por uma equação z = g(x, y)?
- 14. Enuncie o Teorema de Stokes.
- 15. Enuncie o Teorema da Divergência.
- **16.** Quais as semelhanças entre o Teorema Fundamental para as Integrais de Linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência?

#### TESTES FALSO-VERDADEIRO

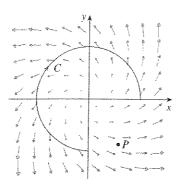
Determine se as afirmações são falsas ou verdadeiras. Se verdadeiras, explique por quê. Se falsas, explique por que ou dê um contra-exemplo.

- 1. Se F for um campo vetorial, então div F é um campo vetorial.
- 2. Se F for um campo vetorial, então rot F é um campo vetorial.
- 3. Se f tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas sobre  $\mathbb{R}^3$ , então div(rot  $\nabla f$ ) = 0.
- **4.** Se f tem derivadas parciais contínuas sobre  $\mathbb{R}^3$  e C for um círculo qualquer, então  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
- 5. Se  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$  e  $P_y = Q_x$  em uma região aberta D, então  $\mathbf{F}$  é conservativo.
- **6.**  $\int_{-C} f(x, y) ds = -\int_{C} f(x, y) ds$
- 7. Se S é uma esfera e  $\mathbf{F}$  um campo vetorial constante, então  $\iint_{\mathbf{G}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$
- 8. Existe um campo vetorial F tal que

$$rot \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

#### **EXERCÍCIOS**

- 1. São mostrados um campo vetorial  $\mathbf{F}$ , uma curva C e um ponto P.
  - (a)  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é positivo, negativo ou zero? Explique.
  - (b) div  $\mathbf{F}(P)$  é positivo, negativo ou zero? Explique.



- 2-9 □ Calcule a integral de linha.
- 2.  $\int_C x \, ds$ ,  $\widetilde{C}$  é o arco de parábola  $y = x^2$  de (0, 0) a (1, 1).
- C:  $x = 2 \sin t$ , y = t,  $z = 2 \cos t$ ,  $0 \le t \le \pi/2$
- **4.**  $\int_C xy \, dx + y \, dy$ , C é a senóide  $y = \sin x$ ,  $0 \le x \le \pi/2$
- **5.**  $\int_C x^3 y \, dx x \, dy$ , C é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  orientado no sentido anti-horário.
- **6.**  $\int_C \sqrt{xy} dx + e^y dy + xz dz$ , C é dada por  $\mathbf{r}(t) = t^4 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, 0 \le t \le 1.$
- 7.  $\int_{C} y \, dx + z \, dy + x \, dz$ ,  $\widetilde{C}$  é formado pelos segmentos de reta que vão de (0, 0, 0) a (1, 1, 2) e de (1, 1, 2) a (3, 1, 4).
- **8.**  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y) = xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$  e C é dada por  $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} + (1+t) \mathbf{j}, 0 \le t \le \pi$
- 9.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}$  e c é dada por 11  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} - t \mathbf{k}, 0 \le t \le 1.$ N . V . A . A
- 10. Determine o trabalho realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \,\mathbf{i} + x \,\mathbf{j} + y \,\mathbf{k}$$

para mover uma partícula do ponto (3, 0, 0) para o ponto  $(0, \pi/2, 3)$ 

- (a) por uma reta
- (b) pela hélice  $x = 3 \cos t$ , y = t,  $z = 3 \sin t$

11-12 □ Mostre que F é um campo vetorial conservativo. Então encontre a função f tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

- **11.**  $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\mathbf{i} + (e^y + x^2e^{xy})\mathbf{j}$
- 12.  $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y \mathbf{i} + x \cos y \mathbf{j} \operatorname{sen} z \mathbf{k}$

- 13-14 □ Mostre que F é conservativo e use esse fato para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ao longo da curva dada.
- **13.**  $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 2xy^3)\mathbf{i} + (2x^4y 3x^2y^2 + 4y^3)\mathbf{j}$ , C:  $\mathbf{r}(t) = (t + \sin \pi t) \mathbf{i} + (2t + \cos \pi t) \mathbf{j}, \ 0 \le t \le 1$
- **14.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y} \mathbf{i} + (xe^{y} + e^{z}) \mathbf{j} + ye^{z} \mathbf{k}$ C é o segmento de reta de (0, 2, 0) a (4, 0, 3)
- 15. Verifique que o Teorema de Green é verdadeiro para a integral de linha  $\int_C xy^2 dx - x^2 y dy$ , onde C consiste na parábola  $y = x^2$ , de (-1, 1) a (1, 1) e do segmento de reta de (1, 1) a (-1, 1).
- 16. Use o Teorema de Green para calcular

$$\int_C \sqrt{1 + x^3} \, dx + 2xy \, dy$$

onde C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 3).

- 17. Use o Teorema de Green para calcular  $\int_C x^2 y \, dx xy^2 \, dy$ , onde C é o círculo  $x^2 + y^2 = 4$  orientado no sentido anti-horário.
- 18. Determine rot F e div F se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} y \mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} z \mathbf{j} + e^{-z} \operatorname{sen} x \mathbf{k}$$

19. Mostre que não existe um campo vetorial G tal que

$$rot \mathbf{G} = 2x \mathbf{i} + 3yz \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$$

20. Mostre que, sob algumas condições a serem estabelecidas sobre os campos vetoriais F e G,

$$rot(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Se C é uma curva simples fechada lisa por trechos, e f e g são funções diferenciáveis, mostre que

$$\int_C f(x) \ dx + g(y) \ dy = 0$$

22. Se f e g são funções duplamente diferenciáveis, mostre que

$$\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$$

- 23. Se f é uma função harmônica, ou seja,  $\nabla^2 f = 0$ , mostre que a integral de linha  $\int f_y dx - f_x dy$  é independente do caminho em qualquer região simples D.
- 24. (a) Esboce a curva C com equações paramétricas

$$x = \cos t$$
  $y = \sin t$   $z = \sin t$   $0 \le t \le 2\pi$ 

(b) Determine

$$\int_C 2xe^{2y} dx + (2x^2e^{2y} + 2y \cot z) dy - y^2 \csc^2 z dz$$

- **25.** Determine a área da parte da superfície  $z = x^2 + 2y$  que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2).
- 26. (a) Determine uma equação do plano tangente ao ponto (4, -2, 1) para a superfície paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2 \mathbf{i} - uv \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$$
,  $0 \le u \le 3$ ,  $-3 \le v \le 3$ 

- (b) Use um computador para traçar o gráfico da superfície S e do plano tangente achado na parte (a).
- (c) Estabeleça, mas não calcule, uma integral que dê a área da superfície S.

(d) Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2} \mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2} \mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2} \mathbf{k}$$

ache  $\iint_{\mathbb{R}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  preciso até a quarta casa decimal.

27-30 □ Calcule a integral de superfície.

- 27.  $\iint_S z \, dS$ , onde S é a parte do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que está abaixo do plano z=4
- **28.**  $\iint_S (x^2z + y^2z) dS$ , onde S é a parte do plano z = 4 + x + yque está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$
- **29.**  $\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \, \mathbf{i} 2y \, \mathbf{j} + 3x \, \mathbf{k} \, \mathbf{e} \, S \, \acute{\mathbf{e}} \, \mathbf{a} \, \text{esfera}$  $x^{2} + y^{2} + z^{2} = 4 \, \text{com orientação para fora}$
- 30.  $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k} \in \mathcal{S}$  é a parte do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  abaixo do plano z = 1 com orientação para cima

31. Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k},$$

onde S é a parte do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  que está acima do plano xy, e S está orientado para cima.

- 32. Use o Teorema de Stokes para calcular  $\iint_S$  rot  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 yz \,\mathbf{i} + yz^2 \,\mathbf{j} + z^3 e^{xy} \,\mathbf{k}, \, S \,\acute{\mathbf{e}} \, \text{a parte da esfera}$  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  que está acima do plano z = 1, e S tem orientação para cima.
- 33. Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k} e C \acute{e} o \text{ triangulo com vértices}$ (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1), orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.
- 34. Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  e  $S \in$ a superfície do sólido delimitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e pelos planos z = 0 e z = 2.
- 35. Verifique que o Teorema da Divergência é verdadeiro para o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

onde E é a bola unitária  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ .

36. Calcule o fluxo para fora de

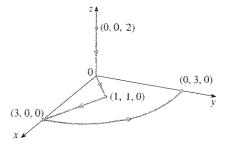
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x \,\mathbf{i} + y \,\mathbf{j} + z \,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

através do elipsóide  $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$ .

**37.** Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\mathbf{k}$$

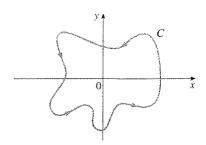
Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde C é a curva com início em (0, 0, 2) e término em (0, 3, 0), como mostrado na figura.



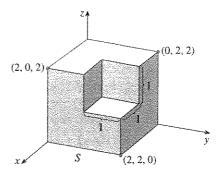
**38.** Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Calcule  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde C é como mostrado na figura.



**39.** Determine  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k} \, \mathbf{e} \, S \, \mathbf{e}$ a superfície mostrada na figura, com orientação para fora (a fronteira do cubo com um cubo unitário removido).



40. Se os componentes de F têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e S é a superfície fronteira de uma região sólida simples, mostre que  $\iint_{S}$  rot  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ .

### Problemas Quentes

1. Seja S uma superfície paramétrica lisa e seja P um ponto tal que cada raio que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O ângulo sólido Ω(S) subtendido por S em P é o conjunto dos raios que começam em P e passam por S. Seja S(a) a interseção de Ω(S) com a superfície da esfera com centro em P e raio a. Então a medida do ângulo sólido (estereo-radianos) é definida como

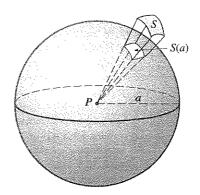
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema da Divergência para a parte de  $\Omega(S)$  entre S(a) e S para mostrar que

$$|\Omega(S)| = \iint\limits_{S} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre  $r = |\mathbf{r}|$ , e o sentido do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  é saindo de P.

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido é independente do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera *unitária*. (Note a analogia com a definição da medida em radianos.) O ângulo total sólido subtendido por uma esfera em seu centro é, portanto,  $4\pi$  estereo-radianos.



2. Ache uma curva simples fechada C para a qual o valor da integral de linha

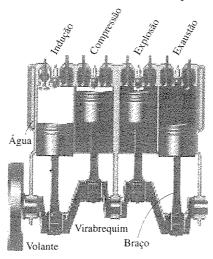
$$\int_C (y^3 - y) \, dx - 2x^3 \, dy$$

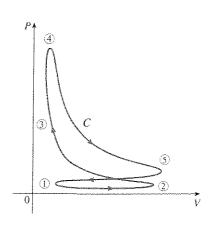
é máximo.

3. Seja C uma curva espacial simples fechada lisa por trechos que esteja contida em um plano com vetor unitário normal  $\mathbf{n}=\langle a,b,c\rangle$  e orientada positivamente em relação a  $\mathbf{n}$ . Mostre que a área do plano contida por C é

$$\frac{1}{2} \int_{C} (bz - cy) \, dx + (cx - az) \, dy + (ay - bx) \, dz$$

4. A figura retrata a seqüência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Seja P(t) e V(t) a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t, onde a ≤ t ≤ b dá o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos.





Durante o estágio de indução (de ① a ②) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Aí o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de ② a ③) durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em ③ uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até ④. Aí, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de ④ a ⑤). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem, e a energia mecânica armazenada no volante impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a ① e o ciclo se reinicia.

- (a) Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é  $W = \int_C P \, dV$ , onde C é a curva no plano PV mostrada na figura.
  - [*Dica:* seja x(t) a distância do pistão até o topo do cilindro e note que a força sobre o pistão é  $\mathbf{F} = AP(t)$  i, onde A é a área do topo do pistão. Então,  $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , onde  $C_1$  é dado por  $\mathbf{r}(t) = x(t)$  i,  $a \le t \le b$ . Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]
- (b) Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença da área contida pelos dois laços de C.



# Equações Diferenciais de Segunda Ordem

A carga em um circuito elétrico é influenciada pelas equações diferenciais resolvidas na seção 17.3. A idéia central das equações diferenciais está explicada no Capítulo 9, onde nos concentramos nas equações de primeira ordem. Neste capítulo estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem e aprenderemos como aplicá-las para resolver problemas de vibrações de mola e circuitos elétricos. Veremos também como séries infinitas podem ser usadas para resolver equações diferenciais.

## 47.1

## Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem tem a forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

onde *P*, *Q*, *R* e *G* são funções contínuas. Vimos na Seção 9.1 que equações desse tipo surgem no estudo do movimento de uma mola. Na Seção 17.3 aprofundaremos essa aplicação bem como a dos circuitos elétricos.

Nesta seção vamos estudar o caso onde G(x) = 0, para todo x, na Equação 1. Tais equações são chamadas equações lineares **homogêneas**. Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Se  $G(x) \neq 0$  para algum x, a Equação 1 é **não homogênea** e será discutida na Seção 17.2. Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares homogêneas. O primeiro estabelece que, se conhecermos duas soluções  $y_1$  e  $y_2$  de tal equação, então a **combinação linear**  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  é também uma solução.

3 Teorema Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções da equação linear homogênea (2) e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

é também uma solução da Equação 2.

Prova Uma vez que y<sub>1</sub> e y<sub>2</sub> são soluções da Equação 2, temos

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Portanto, usando as regras básicas para diferenciação, temos

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y$$

$$= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2]$$

$$= c_1(0) + c_2(0) = 0$$

Assim,  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  é uma solução da Equação 2.

O outro fato que precisamos é dado pelo seguinte teorema, provado em cursos mais avançados. Dizemos que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções **lineares independentes**  $y_1$  e  $y_2$ . Isso significa que nem  $y_1$  nem  $y_2$  é um múltiplo constante do outro. Por exemplo: as funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 5x^2$  são linearmente dependentes, mas  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = xe^x$  são linearmente independentes.

**Teorema** Se  $y_1$  e  $y_2$  forem soluções linearmente independentes da Equação 2, então a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

O Teorema 4, muito útil; diz que, se conhecermos *duas* soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos *todas* as soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares para uma equação linear de segunda ordem. Mas é sempre possível fazer isso se as funções coeficientes *P*, *Q* e *R* forem funções constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes e  $a \neq 0$ .

Não é difícil pensar em alguns prováveis candidatos para as soluções particulares da Equação 5 se enunciarmos verbalmente. Estamos examinando para uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais a terceira constante vezes y é igual a 0. Sabemos que a função exponencial  $y = e^{rx}$  (onde r é uma constante) tem a propriedade que sua derivada é uma constante múltipla dela mesma:  $y' = re^{rx}$ . Além disso,  $y'' = r^2 e^{rx}$ . Se substituirmos essas expressões na Equação 5 veremos que  $y = e^{rx}$  é uma solução se

$$ar^{2}e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$
  
 $(ar^{2} + br + c)e^{rx} = 0$ 

ou  $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ 

Mas  $e^{rx}$  é diferente de zero. Assim,  $y = e^{rx}$  é uma solução da Equação 5 se r é uma raiz da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

A Equação 6 é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial ay'' + by' + cy = 0. Note que ela é uma equação algébrica que foi obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por  $r^2$ , y' por r, e y por 1.

Algumas vezes as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação auxiliar podem ser determinadas fatorando-se. Em outros casos elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

7 
$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
  $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 

Separamos em três casos de acordo com o sinal do discriminante  $b^2 - 4ac$ .

#### GASO I $\Box b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação auxiliar são reais e distintas; logo  $y_1 = e^{r_1 x}$  e  $y_2 = e^{r_2 x}$  são duas soluções linearmente independentes da Equação 5. (Note que  $e^{r_2 x}$  não é um múltiplo constante de  $e^{r_1 x}$ .) Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato:

Se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação auxiliar  $ar^2 + br + c = 0$  são reais e diferentes, então a solução geral de ay'' + by' + cy = 0 é

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

EXEMPLO 1  $\subseteq$  Resolva a equação y'' + y' - 6y = 0.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cujas raízes são r=2,-3. Portanto, por (8) a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Podemos verificar que isso é de fato uma solução diferenciando e substituindo na equação diferencial.

EXEMPLO 2 
$$\Box$$
 Resolva  $3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$ .

SOLUÇÃO Para resolver a equação auxiliar  $3r^2+r-1=0$  usamos a fórmula quadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$

CASO II o  $b^2 - 4ac = 0$ 

Nesse caso  $r_1 = r_2$ , isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r os valores comuns  $r_1$  e  $r_2$ . Então, da Equação 7 temos

Sabemos que  $y_1 = e^{rx}$  é uma solução da Equação 5. Agora verifiquemos que  $y_2 = xe^{rx}$  é também uma solução:

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx}$$
$$= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx}$$
$$= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0$$

O primeiro termo é 0 pela Equação 9; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da

 $\equiv$  Na Figura 1 o gráfico das soluções básicas  $f(x) = e^{2x} e g(x) = e^{-3x}$  da equação diferencial do Exemplo 1 está em destaque. Algumas das outras soluções, combinações lineares de f e g, também são mostradas.

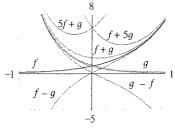


FIGURA 1

equação auxiliar. Uma vez que  $y_1 = e^{xx}$  e  $y_2 = xe^{xx}$  são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

Se a equação auxiliar  $ar^2 + br + c = 0$  tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de ay'' + by' + cy = 0 é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Resolva a equação 4y'' + 12y' + 9y = 0.

SOLUÇÃO A equação auxiliar  $4r^2 + 12r + 9 = 0$  pode ser fatorada como

$$(2r+3)^2=0$$

logo a única raiz é  $r = -\frac{3}{2}$ . Por (10) a solução geral é

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$

CASO III  $\Rightarrow b^2 - 4ac < 0$ 

Nesse caso as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação auxiliar são números complexos. (Veja o Apêndice G, Volume I, para informar-se sobre números complexos.) Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta$$
  $r_2 = \alpha - i\beta$ 

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais. [De fato,  $\alpha = -b/(2a)$ ,  $\beta = \sqrt{4ac - b^2/(2a)}$ .] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

do Apêndice G, escrevemos a equação diferencial como

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$= e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x]$$

$$= e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

onde  $c_1 = C_1 + C_2$ ,  $c_2 = i(C_1 - C_2)$ . Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções são reais quando as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são reais. Resumiremos a discussão como segue.

Se as raízes da equação auxiliar  $ar^2 + br + c = 0$  forem os números complexos  $r_1 = \alpha + i\beta$ ,  $r_2 = \alpha - i\beta$ , então a solução geral de ay'' + by' + cy = 0será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

A Figura 2 apresenta as soluções básicas  $f(x) = e^{-3x/2}$  e  $g(x) = xe^{-3x/2}$ do Exemplo 3 e alguns outros membros da família de soluções Note que todos eles se aproximam de 0 quando  $x \rightarrow \infty$ .

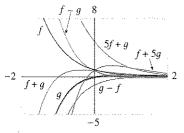


FIGURA 2

 $_{\square}$  A Figura 3 apresenta os gráficos das soluções do Exemplo 4,  $f(x)=e^{3x}\cos 2x$  e  $g(x)=e^{3x}\sin 2x$ , junto com alguma combinação linear. Todas as soluções tendem a 0 quando  $x\to -\infty$ .

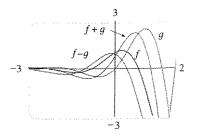


FIGURA 3

☐ A Figura 4 apresenta o gráfico da solução do problema de valor inicial do Exemplo 5. Compare com a Figura 1.

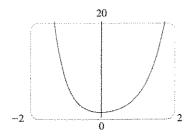


FIGURA 4

EXEMPLO 4  $\Box$  Resolva a equação y'' - 6y' + 13y = 0.

SOLUÇÃO Uma equação auxiliar é  $r^2 - 6r + 13 = 0$ . Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por (11) a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

## Problemas de Valores Iniciais e de Contorno

Um **problema de valor inicial** para uma equação de segunda ordem 1 ou 2 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que satisfaça as condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0$$
  $y'(x_0) = y_1$ 

onde  $y_0$  e  $y_1$  são constantes. Se P, Q, R e G forem contínuas em um intervalo onde  $P(x) \neq 0$ , então o teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial. Os Exemplos 5 e 6 mostram como solucionar tal problema.

EXEMPLO 5 

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0$$
  $y(0) = 1$   $y'(0) = 0$ 

SOLUÇÃO Do Exemplo 1 sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Diferenciando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

Para satisfazer as condições iniciais exigimos que

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De (13) temos  $c_2 = \frac{2}{3}c_1$ ; logo, (12) resulta em

$$c_1 + \frac{2}{3}c_1 = 1$$
  $c_1 = \frac{3}{5}$   $c_2 = \frac{2}{5}$ 

Assim, a solução requerida do problema de valor inicial é

$$y = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$$

EXEMPLO 6 

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y = 0$$
  $y(0) = 2$   $y'(0) = 3$ 

SOLUÇÃO A equação auxiliar é  $r^2+1=0$ , ou  $r^2=-1$ , cujas raízes são  $\pm i$ . Assim  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ , e, uma vez que  $e^{0x}=1$ , a solução geral é

A solução do Exemplo 6 tem seu gráfico feito na Figura 5. Ela aparenta ser uma senóide deslocada. Realmente você pode verificar que outra maneira de encontrar a solução é

$$y = \sqrt{13} \operatorname{sen}(x + \phi)$$
 onde  $\operatorname{tg} \phi = \frac{2}{3}$ 

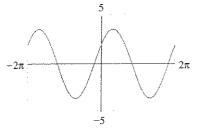


FIGURA 5

☐ A Figura 6 mostra o gráfico da solução do problema de contorno no Exemplo 7.

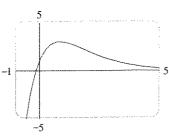


FIGURA 6

 $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 

Uma vez que

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

a condição inicial torna-se

$$y(0) = c_1 = 2$$
  $y'(0) = c_2 = 3$ 

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 2\cos x + 3\sin x$$

Um **problema de contorno** para a Equação 1 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que também satisfaça as condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0$$
  $y(x_1) = y_1$ 

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de contorno nem sempre tem uma solução. O método está ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 
Resolva o problema de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0$$
  $y(0) = 1$   $y(1) = 3$ 

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$
 ou  $(r+1)^2 = 0$ 

cuja única raiz é r = -1. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em  $c_1 = 1$ , logo a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

Resolvendo essa equação para  $c_2$ , primeiro multiplicando-se ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e$$
 logo  $c_2 = 3e - 1$ 

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$

Resumo: Soluções de ay'' + by' + c = 0

| Raízes de $ar^2 + br + c = 0$                | Solução geral                                           |  |  |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--|--|
| $r_1, r_2$ reais e distintas                 | $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$                     |  |  |
| $r_1 = r_2 = r$                              | $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$                         |  |  |
| $r_1$ , $r_2$ complexas: $\alpha \pm i\beta$ | $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ |  |  |

## 17.1 Exercícios

1-13 🗆 Resolva a equação diferencial.

1. 
$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

**2.** 
$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$3. y'' + 8y' + 41y = 0$$

4. 
$$2y'' - y' - y = 0$$

5. 
$$y'' - 2y' + y = 0$$

**6.** 
$$3y'' = 5y'$$

7. 
$$4y'' + y = 0$$

**8.** 
$$16y'' + 24y' + 9y = 0$$

$$(9. \ 4y'' + y' = 0)$$

**10.** 
$$9y'' + 4y = 0$$

**11.** 
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - y = 0$$

12. 
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

Faça o gráfico das duas soluções básicas da equação diferencial e de várias outras soluções. Que aspecto têm em comum as soluções?

$$14. \ 6\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

**15.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$$

**16.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

17-24 🗆 Resolva o problema de condição inicial.

12. 
$$2y'' + 5y' + 3y = 0$$
,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -4$ 

**18.** 
$$y'' + 3y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ 

**19.** 
$$4y'' - 4y' + y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1.5$ 

**20.** 
$$2y'' + 5y' - 3y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$ 

**21** 
$$y'' + 16y = 0$$
,  $y(\pi/4) = -3$ ,  $y'(\pi/4) = 4$ 

**22.** 
$$y'' - 2y' + 5y = 0$$
,  $y(\pi) = 0$ ,  $y'(\pi) = 2$ 

**23.** 
$$y'' + 2y' + 2y = 0$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ 

**24.** 
$$y'' + 12y' + 36y = 0$$
,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 1$ 

25-32 □ Resolva o problema de contorno, se possível.

**25.** 
$$4y'' + y = 0$$
,  $y(0) = 3$ ,  $y(\pi) = -4$ 

**26.** 
$$y'' + 2y' = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$ 

**27.** 
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y(3) = 0$ 

**28.** 
$$y'' + 100y = 0$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi) = 5$ 

**29.** 
$$y'' - 6y' + 25y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = 2$ 

**30.** 
$$y'' - 6y' + 9y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$ 

**31.** 
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi/2) = 1$ 

**32.** 
$$9y'' - 18y' + 10y = 0$$
,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 1$ 

33. Se L um número real não.nulo.

(a) Mostre que o problema de contorno  $y'' + \lambda y = 0$ , y(0) = 0, y(L) = 0 tem apenas a solução trivial y = 0 para o caso onde  $\lambda = 0$  e  $\lambda < 0$ .

(b) Para o caso onde  $\lambda > 0$ , determine os valores de  $\lambda$  para os quais este problema tenha uma solução não-trivial e dê a solução correspondente.

**34.** Se a, b e c são todos positivos constantes, y(x) é uma solução da equação diferencial ay'' + by' + cy = 0, mostre que  $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ .

## 7.2 Equações Lineares Não-Homogêneas

Equações Differes Mao Homogeneas

Nesta seção vamos aprender como resolver equações diferenciais lineares não-homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde a,b e c são constantes e G é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$ay'' + by' + cy = 0$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não-homogênea original (1).

3 Teorema A solução geral da equação diferencial não-homogênea (1) pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde  $y_p$  é uma solução particular da Equação 1 e  $y_c$  é a solução geral da Equação complementar 2.

Tudo que temos de fazer é verificar que, se y é qualquer solução da Equação 1, então  $y - y_p$  é uma solução da Equação complementar 2. De fato,

$$a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) = ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p$$

$$= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p)$$

$$= g(x) - g(x) = 0$$

Sabemos da Seção 17.1 como resolver a equação complementar. (Lembre-se de que a solução é  $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , onde  $y_1$  e  $y_2$  são soluções linearmente independentes da Equação 2.) Além disso, o Teorema 3 nos diz que conheceremos a solução geral da equação não-homogênea logo que conhecermos uma solução particular  $y_p$ . Há dois métodos para determinar uma solução particular: o método dos coeficientes a serem determinados é fácil de compreender, mas trabalha apenas para uma classe restrita de funções para toda função G; o método de variação de parâmetros trabalha para toda função G, mas em geral é mais difícil aplicá-lo.

### O Método dos Coeficientes a Serem Determinados

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes a serem determinados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde G(x) é um polinômio. É razoável conjeturar que há uma solução particular  $y_p$  que é um polinômio de mesmo grau de G, pois, se y for um polinômio, então ay'' + by' + cy é também um polinômio. Portanto substituímos  $y_p(x) =$  um polinômio (de mesmo grau de G) na equação diferencial e determinamos os coeficientes.

EXEMPLO 1  $\subseteq$  Resolva a equação  $y'' + y' - 2y = x^2$ .

SOLUÇÃO A equação auxiliar de y'' + y' - 2y = 0 é

ou

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com as raízes r=1, -2. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Uma vez que  $G(x) = x^2$  é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então  $y_p' = 2Ax + B e y_p'' = 2A$ . Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$
$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais. Assim,

$$-2A = 1$$
  $2A - 2B = 0$   $2A + B - 2C = 0$ 

 $\Box$  A Figura 1 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 1 em termos da solução particular  $y_p$  e das funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-1x}$ .

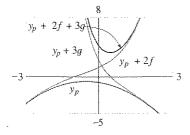


FIGURA 1

 $\square$  A Figura 2 mostra as soluções da equação diferencial do Exemplo 2 em termos de  $y_p$  e as funções  $f(x) = \cos 2x$  e  $g(x) = \sin 2x$ . Note que todas as soluções tendem a  $\infty$  quando  $x \to \infty$  e todas as soluções parecem com as funções seno quando x é negativo.

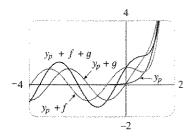


FIGURA 2

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\frac{1}{2}$$
  $B = -\frac{1}{2}$   $C = -\frac{3}{4}$ 

Uma solução particular é portanto

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_\rho = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{3}{4}$$

Se G(x) (lado direito da Equação 1) é da forma  $Ce^{kx}$ , onde  $Ce^{k}$  são constantes, então tomamos como solução de prova uma função de mesma forma,  $y_p(x) = Ae^{kx}$ , pois as derivadas de  $e^{kx}$  são múltiplas constantes de  $e^{kx}$ .

EXEMPLO 2  $\square$  Resolva  $y'' + 4y = e^{3x}$ .

SOLUÇÃO A equação auxiliar é  $r^2+4=0$  com as raízes  $\pm 2i$ , logo a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

Para uma solução particular tentemos  $y_p(x) = Ae^{3x}$ . Então  $y_p' = 3Ae^{3x}$  e  $y_p'' = 9Ae^{3x}$ . Substituindo na equação diferencial, temos

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

logo  $13Ae^{3x} = e^{3x}$  e  $A = \frac{1}{13}$ . Assim, uma solução particular é

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{13}e^{3x}$$

Se G(x) é  $C\cos kx$  ou  $C\sin kx$ , então, por causa das regras de diferenciação para as funções seno e cosseno, tentamos, como solução particular, uma função da forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Resolva  $y'' + y' - 2y = \sin x$ .

SOLUÇÃO Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

Então

OH

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x$$
  $y_p'' = -A \cos x - B \sin x$ 

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$
$$(-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x = \sin x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0$$
 e  $-A - 3B = 1$ 

A solução desse sistema é

$$A = -\frac{1}{10}$$
  $B = -\frac{3}{10}$ 

logo uma solução particular é

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

No Exemplo 1 determinamos que a solução da equação complementar é  $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ . Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x)$$

Se G(x) for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo: resolvendo a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x$$

Se G(x) for uma soma de funções desses tipos, usamos o principio da superposição, que é facilmente verificado e nos diz que, se  $y_{p_1}$  e  $y_{p_2}$  forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x)$$
  $ay'' + by' + cy = G_2(x)$ 

respectivamente, então  $y_{p_1} + y_{p_2}$  é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EXEMPLO 4  $\Box$  Resolva  $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$ .

SOLUÇÃO A equação auxiliar é  $r^2 - 4 = 0$  com as raízes  $\pm 2$ , logo a solução da equação complementar é  $y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ . Para a equação  $y'' - 4y = xe^x$  tentamos

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Então  $y'_{p_1} = (Ax + A + B)e^x$ ,  $y''_{p_1} = (Ax + 2A + B)e^x$ . Logo, substituindo na equação dada.

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

ou

$$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Assim, 
$$-3A = 1$$
 e  $2A - 3B = 0$ . Logo  $A = -\frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{2}{9}$  e

$$y_{p_3}(x) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right)e^x$$

Para a equação  $y'' - 4y = \cos 2x$ , tentamos

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$$

Substituindo, temos

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x - 4(C\cos 2x + D\sin 2x) = \cos 2x$$

oı

$$-8C\cos 2x - 8D\sin 2x = \cos 2x$$

Portanto, -8C = 1, -8D = 0, e

$$y_{\varrho_2}(x) = -\frac{1}{8}\cos 2x$$

 $\Box$  A Figura 3 apresenta a solução particular  $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$  da equação diferencial do Exemplo 4. As outras soluções são dadas em termos de  $f(x) = e^{2x}$  e  $g(x) = e^{-2x}$ .

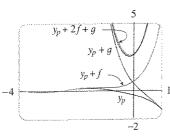


FIGURA 3

Pelo princípio da superposição, a solução geral é

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - (\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9})e^x - \frac{1}{8}\cos 2x$$

Finalmente notamos que a tentativa recomendada  $y_p$  algumas vezes resulta em uma solução da equação complementar e, portanto, não pode ser uma solução de uma equação não-homogênea. Em tais casos multiplicamos a tentativa recomendada por x (ou por  $x^2$  se necessário) tal que nenhum termo em  $y_p(x)$  é uma solução da equação complementar.

EXEMPLO 5  $\Box$  Resolva  $y'' + y = \sin x$ .

SOLUÇÃO A equação auxiliar é  $r^2+1=0$  com raízes  $\pm i$ , logo a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Geralmente usaremos a tentativa

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

mas observe que ela é uma solução da equação complementar. Por exemplo, tentemos

$$y_p(x) = Ax \cos x + Bx \sin x$$

Então

$$v_0(x) = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$$

$$y_p''(x) = -2A \sin x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \sin x$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$y_D'' + y_D = -2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$$

 $\log_0 A = -\frac{1}{2} R = 0 e$ 

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$

Resumimos o método dos coeficientes a serem determinados como segue:

- 1. Se  $G(x) = e^{kx}P(x)$ , onde P é u, polinômio de grau n, então tente  $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$ , onde Q(x) é um polinômio de grau n (cujos coeficientes são determinados por substituição na equação diferencial.)
- 2. Se  $G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$  or  $G(x) = e^{kx}P(x)\sin mx$ , onde P é um polinômio de grau n, então tente

$$y_0(x) = e^{kx} Q(x) \cos mx + e^{kx} R(x) \sin mx$$

Onde Q e R são polinômios de grau n.

*Modificação*: Se algum termo de  $y_p$  é a solução da equação complementar, multiplique  $y_p$  por x (ou por  $x^2$  se necessário).

**EXEMPLO 6** Determine a forma da candidata a solução para a equação diferencial  $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$ .

Os gráficos das quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 5 estão apresentados na Figura 4.

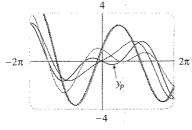


FIGURA 4

SOLUÇÃO Aqui G(x) tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde k=2, m=3, e P(x)=1. Assim, à primeira vista, a forma da candidata a solução deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

Mas a equação auxiliar é  $r^2-4r+13=0$ , com raízes  $r=2\pm 3i$ , portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

Isso significa que temos de multiplicar a candidata a solução sugerida por x. Assim, em seu lugar, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

## O Método das Variações dos Parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea ay'' + by' + cy = 0, escrevamos a solução como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros)  $c_1$  e  $c_2$  da Equação 4 pelas funções arbitrárias  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ . Procuramos por uma solução particular da equação não-homogênea ay'' + by' + cy = G(x) da forma

$$|5|$$
  $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ 

(Esse método é chamado variação dos parâmetros, pois variamos os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$ , tornando-os funções.) Diferenciando a Equação 5, obtemos

$$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Uma vez que  $u_1$  e  $u_2$  são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre eles. Uma condição é que  $y_p$  é uma solução da equação diferencial e podemos escolher outra condição, a fim de simplificar nossos cálculos. Considerando a expressão da Equação 6, vamos impor a condição que

$$[7] u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Então 
$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

ОU

$$|\mathbf{g}| \qquad u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Mas y<sub>1</sub> e y<sub>2</sub> são soluções da equação complementar, logo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$
 e  $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ 

e a Equação 8 simplifica em

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

As Equações 7 e 9 formam um sistema de duas equações nas funções desconhecidas  $u'_1$  e  $u'_2$ . Após resolver esse sistema, podemos integrar para encontrar  $u_1$  e  $u_2$ , e então a solução particular é dada pela Equação 5.

EXEMPLO 7  $\Box$  Resolva a equação  $y'' + y = \text{tg } x, 0 < x < \pi/2$ .

SOLUÇÃO A equação auxiliar é  $r^2+1=0$  com as raízes  $\pm i$ , logo a solução de y''+y=0 é  $c_1 \sin x+c_2 \cos x$ . Usando a variação dos parâmetros, buscamos uma solução da forma

$$y_p(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \operatorname{cos} x$$

Então 
$$y'_{p} = (u'_{1} \operatorname{sen} x + u'_{2} \cos x) + (u_{1} \cos x - u_{2} \operatorname{sen} x)$$

Faça

$$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \operatorname{cos} x = 0$$

Então 
$$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \sin x - u_1 \sin x - u_2 \cos x$$

Para y<sub>p</sub> ser uma solução devemos ter

11 
$$y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \sin x = \operatorname{tg} x$$

Resolvendo as Equações 10 e 11, obtemos

$$u_1'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x \text{ tg } x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x$$
  $u_1(x) = -\operatorname{cos} x$ 

(Procuramos uma solução particular, logo não precisaremos de uma constante de integração aqui.) Então, da Equação 10, obtemos

$$u_2' = -\frac{\sin x}{\cos x} u_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

 □ A Figura 5 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 7.

Logo

$$u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\operatorname{sec} x + \operatorname{tg} x)$$

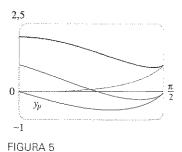
(Note que sec x + tg x > 0 para  $0 < x < \pi/2$ .) Portanto

$$y_p(x) = -\cos x \sin x + (\sin x - \ln(\sec x + \lg x)) \cos x$$
$$= -\cos x \ln(\sec x + \lg x)$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

24.5



## 17.2

### Exercícios

1-10 C Resolva a equação diferencial ou problema de valor inicial usando o método dos coeficientes indeterminado.

1. 
$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

**2.** 
$$y'' + 9y = e^{3x}$$

3. 
$$y'' - 2y' = \sin 4x$$

**4.** 
$$y'' + 6y' + 9y = 1 + x$$

**5.** 
$$y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$$

**5.** 
$$y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$$
 **6.**  $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 

7. 
$$y'' + y = e^x + x^3$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ 

**8.** 
$$y'' - 4y = e^x \cos x$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ 

**9.** 
$$y'' - y' = xe^x$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ 

**10.** 
$$y'' + y' - 2y = x + \sin 2x$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ 

11-12 🗆 Faça o gráfico da solução particular e várias outras soluções. Que características essas soluções têm em comum?

11. 
$$4y'' + 5y' + y = e^x$$

**12.** 
$$2y'' + 3y' + y = 1 + \cos 2x$$

13-18 🗆 Escreva uma tentativa para o método dos coeficientes a serem determinados. Não determine os coeficientes.

**13.** 
$$y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \sin x$$

**14.** 
$$y'' + 9y' = xe^{-x}\cos \pi x$$

**15.** 
$$y'' + 9y' = 1 + xe^{9x}$$

**16.** 
$$y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$$

2

17. 
$$y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$$

**18.** 
$$y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$$

19-22 □ Resolva a equação diferencial usando (a) coeficientes a serem determinados e (b) variação dos parâmetros.

19. 
$$y'' + 4y = x$$

n =

**20.** 
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

**21.** 
$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$
 **22.**  $y'' - y' = e^x$ 

**22.** 
$$y'' - y' = e^x$$

23-28 Resolva a equação diferencial usando o método da variação dos parâmetros.

**23.** 
$$y'' + y = \sec x$$
,  $0 < x < \pi/2$ 

**24.** 
$$y'' + y = \cot x$$
,  $0 < x < \pi/2$ 

**25.** 
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$
 **26.**  $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$ 

**26.** 
$$y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$$

**27.** 
$$y'' - y = \frac{1}{x}$$

**27.** 
$$y'' - y = \frac{1}{x}$$
 **28.**  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$ 

## Aplicações das Equações Diferenciais de Segunda Ordem

posição de equilíbrio

FIGURA 1

posição de equilíbrio

FIGURA 2

As equações diferenciais lineares de segunda ordem têm uma variedade de aplicações na ciência e na engenharia. Nesta seção exploraremos duas de suas aplicações: a vibração das molas e os circuitos elétricos.

#### Vibrando as Molas

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola que está na vertical (como na Figura 1) ou na horizontal sobre um nível da superfície (como

Na Seção 6.4, do Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que nos diz que, se a mola estiver esticada (ou comprimida) x unidades do comprimento natural, então ela exerce uma força proporcional a x:

força restauradora = -kx

onde k é uma constante positiva (chamada constante da mola). Se ignorarmos qualquer força de resistência externa (devido à resistência do ar ou atrito), então, pela Segunda Lei de Newton (força é igual massa vezes aceleração), teremos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{ou} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é  $mr^2 + k = 0$  com as raízes  $r = \pm \omega i$ , onde  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Assim, a solução geral é

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

onde

$$\omega = \sqrt{k/m}$$
 (frequência)

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{(amplitude)}$$

$$\cos \delta = \frac{c_1}{A}$$
  $\operatorname{sen} \delta = -\frac{c_2}{A}$  ( $\delta \acute{e}$  o ânglo fase)

(veja o Exercício 15). Esse tipo de movimento é chamado movimento harmônico simples.

**EXEMPLO 1** — Uma mola com uma massa de 2 kg tem um comprimento natural de 0,5 m. Uma força de 25,6 N é necessária para mantê-la esticada a um comprimento de 0,7 m. Se uma mola for esticada para um comprimento de 0,7 m e então for solta com velocidade inicial 0, determine a posição da massa em qualquer tempo t.

SOLUÇÃO Da Lei de Hooke, a força necessária para estender a mola é

$$k(0,2) = 25,6$$

logo k = 25,6/0,2 = 128. Usando esse valor da constante da mola k, junto com m = 2 na Equação 1, temos

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como na discussão anterior, a solução dessa equação é

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$$

Estamos dando a condição inicial que x(0) = 0,2. Mas, da Equação 2,  $x(0) = c_1$ . Assim,  $c_1 = 0,2$ . Diferenciando a Equação 2, temos

$$x'(t) = -8c_1 \sin 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Uma vez que a velocidade inicial é dada como x'(0) = 0, temos  $c_2 = 0$ , e a solução é

$$x(t) = \frac{1}{5}\cos 8t$$

## Vibrações Amortecidas

A seguir, consideraremos o movimento de uma mola que está sujeita a uma força de atrito (no caso da mola horizontal da Figura 2) ou a uma força de amortecimento (no caso de uma mola vertical que se movimenta por meio de um fluido, como na Figura 3). Um exemplo é a força de amortecimento proporcionada pelo choque absorvido em um carro ou uma bicicleta.

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposta ao movimento. (Isso tem sido confirmado, pelo menos aproximadamente,



FIGURA 3

para alguns experimentos físicos.) Assim

força de amortecimento = 
$$-c \frac{dx}{dt}$$

onde c é uma constante positiva, chamada constante de amortecimento. Assim, nesse caso, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

A Equação 3 é uma equação diferencial linear de segunda ordem, e sua equação auxiliar é  $mr^2 + cr + k = 0$ . As raízes são

$$r_{1} = \frac{-c + \sqrt{c^{2} - 4mk}}{2m} \qquad r_{2} = \frac{-c - \sqrt{c^{2} - 4mk}}{2m}$$

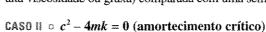
De acordo com a Seção 17.1, precisamos discutir três casos.

CASO I  $c^2 - 4mk > 0$  (superamortecimento)

Nesse caso, 
$$r_1$$
 e  $r_2$  são raízes distintas reais e

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Uma vez que c, m e k são todas positivas, temos  $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$ , logo as raízes  $r_1$  e  $r_2$ dadas pela Equação 4 devem ser ambas negativas. Isso mostra que  $x \to 0$  quando  $t \to \infty$ . Os gráficos característicos de x como função de t estão mostrados na Figura 4. Note que as oscilações não ocorrem,  $c^2 > 4mk$  significa que há uma forte força de amortecimento (óleo de alta viscosidade ou graxa) comparada com uma sem resistência ou de massa pequena.



Esse caso corresponde a raízes iguais

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

e um gráfico característico é mostrado na Figura 5. É análogo ao Caso I, mas o amortecimento é suficiente para suprimir as vibrações. Qualquer decréscimo na viscosidade do fluido leva a vibrações do seguinte caso.

CASO III  $c^2 - 4mk < 0$  (subamortecido)

Aqui as raízes são complexas:

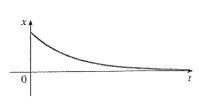




FIGURA 4 Superamortecimento

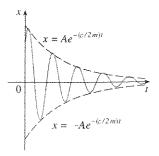


FIGURA 5
Subamortecido

onde

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

Vemos que há oscilações amortecidas pelo fator  $e^{-(c/2m)t}$ . Uma vez que c > 0 e m > 0, temos -(c/2m) < 0, logo  $e^{-(c/2m)t} \to 0$  quando  $t \to \infty$ . Isso implica que  $x \to 0$  quando  $t \to \infty$ ; isto é, o movimento decai a 0 quando o tempo cresce. Um gráfico característico é mostrado na Figura 5.

EXEMPLO 2  $\Box$  Suponha que a mola do Exemplo 1 esteja imersa em um fluido com constante de amortecimento c=40. Determine a posição da massa em qualquer instante t, se ele iniciar da posição de equilíbrio e for dado um empurrão para iniciá-lo com velocidade inicial de 0,6 m/s.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1 a massa é m=2 e a constante da mola é k=128, logo a equação diferencial (3) torna-se

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

OU

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

A equação auxiliar é  $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$  com raízes -4 e -16, logo o movimento é superamortecido e a solução é

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

Temos que x(0) = 0, logo  $c_1 + c_2 = 0$ . Diferenciando, obtemos

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

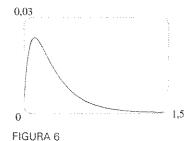
logo

$$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0.6$$

Uma vez que  $c_2 = -c_1$ , isso nos fornece  $12c_1 = 0.6$  ou  $c_1 = 0.05$ . Portanto

$$x = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$$

☐ A Figura 6 mostra o gráfico da função posição para o movimento superamortecido do Exemplo 2.



## **Vibrações Forçadas**

Suponha que, em adição à força restauradora e à força de amortecimento, o movimento da mola seja afetado pela força externa F(t). Então a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} + \text{força externa}$$
$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Assim, em lugar da equação homogênea (3), o movimento da mola é agora governado

pela seguinte equação diferencial não-homogênea:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

O movimento da mola pode ser determinado pelos métodos da Seção 17.2. Uma força externa que ocorre comumente é uma função força periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$$
 onde  $\omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$ 

Nesse caso, e na falta de uma força de amortecimento (c = 0), é pedido no Exercício 9 que você use o método dos coeficientes a serem determinados para mostrar

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \dot{\omega_0})} \cos \omega_0 t$$

Se  $\omega_0 = \omega$ , então a frequência aplicada reforça a frequência natural e o resultado são vibrações de grande amplitude. Esse é o fenômeno da ressonância (veja o Exercício 10).

## Circuito Elétrico

Nas Seções 9.3 e 9.6 usamos equações lineares e separáveis de primeira ordem para analisar circuitos elétricos que contêm resistor e indutor ou resistor e capacitor. Agora que sabemos como resolver equações lineares de segunda ordem, estamos em posição de analisar o circuito mostrado na Figura 7, que contém uma força eletromotriz E (proporcionada pela bateria ou gerador), um resistor R, um indutor L e um capacitor C, em série. Se a carga no capacitor no instante t for Q = Q(t), então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t: I = dQ/dt. Como na Seção 9.6, é conhecido da física que as quedas de voltagem pelo resistor, indutor e capacitor são

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. A lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma das quedas dessa voltagem é igual à voltagem fornecida:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

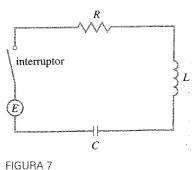
Uma vez que I = dQ/dt, essa equação torna-se

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a variação  $Q_0$  e a corrente  $I_0$  forem conhecidas no instante 0, então temos as condições iniciais

$$Q(0) = Q_0$$
  $Q'(0) = I(0) = I_0$ 

e o problema de valor inicial pode ser resolvido pelos métodos da Seção 17.2.



Uma equação diferencial para a corrente pode ser obtida diferenciando-se a Equação 7 em relação a t e lembrando que I = dQ/dt:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

**EXEMPLO** 3  $\square$  Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Figura 7 se  $R = 40 \ \Omega$ ,  $L = 1 \ \text{H}$ ,  $C = 16 \times 10^{-4} \ \text{F}$ ,  $E(t) = 100 \cos 10t$ , e a carga e a corrente inicial são ambas 0.

SOLUÇÃO Com os valores dados de L, R, C e E(t), a Equação 7 torna-se

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t$$

A equação auxiliar é  $r^2 + 40r + 625 = 0$  com raízes

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

logo, a solução da equação complementar é

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t)$$

Para o método dos coeficientes a serem determinados, tentamos a solução particular

$$Q_p(t) = A\cos 10t + B\sin 10t$$

Então

$$Q_o'(t) = -10A \sin 10t + 10B \cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A \cos 10t - 100B \sin 10t$$

Substituindo na Equação 8, temos

$$(-100A\cos 10t - 100B\sin 10t) + 40(-10A\sin 10t + 10B\cos 10t) + 625(A\cos 10t + B\sin 10t) = 100\cos 10t$$

ou 
$$(525A + 400B)\cos 10t + (-400A + 525B)\sin 10t = 100\cos 10t$$

Igualando os coeficientes, temos

$$525A + 400B = 100$$
 ou  $21A + 16B = 4$   $-400A + 525B = 0$   $-16A + 21B = 0$ 

A solução desse sistema é  $A=\frac{84}{697}$  e  $B=\frac{64}{697}$ , logo, uma solução particular é

$$Q_p(t) = \frac{1}{697} (84 \cos 10t + 64 \sin 10t)$$

e a solução geral é

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t) + \frac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \sin 10t)$$

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0$$
  $c_1 = -\frac{84}{697}$ 

Para impor a outra condição inicial primeiro, vamos diferenciar para determinar a corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} [(-20c_1 + 15c_2)\cos 15t + (-15c_1 - 20c_2)\sin 15t]$$

$$+ \frac{40}{697} (-21\sin 10t + 16\cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\frac{464}{2.091}$$

Assim, a fórmula para a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697} \left[ \frac{e^{-20t}}{3} \left( -63\cos 15t - 116\sin 15t \right) + (21\cos 10t + 16\sin 10t) \right]$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \frac{1}{2.091} \left[ e^{-20t} (-1920\cos 15t + 13.060\sin 15t) + 120(-21\sin 10t + 16\cos 10t) \right]$$

NOTA 1  $\Box$  No Exemplo 3 a solução para Q(t) consiste em duas partes. Uma vez que  $e^{-20t} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e cos 15t e sen 15t são funções limitadas,

$$Q_c(t) = \frac{4}{2.09!}e^{-20t}(-63\cos 15t - 116\sin 15t) \to 0$$
 quando  $t \to \infty$ 

Logo, para valores maiores de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \frac{4}{697}(21\cos 10t + 16\sin 10t)$$

e, por essa razão,  $Q_{\rho}(t)$  é denominada **solução de estado estacionário**. A Figura 8 mostra uma comparação entre o gráfico de Q nesse caso e a solução de estado estacionário.

NOTA 2 

Comparando as Equações 5 e 7, vimos que matematicamente elas são idênticas. Isso sugere a analogia dada na tabela a seguir entre situações físicas que, à primeira vista, são muito diferentes.

|       | Sistema Mola                                                     |                  | cuito Elétrico     |
|-------|------------------------------------------------------------------|------------------|--------------------|
| x     | deslocamento                                                     | $Q \\ I = dQ/dt$ | carga              |
| dx/dt | velocidade                                                       |                  | corrente           |
| m     | massa constante de amortecimento constante da mola força externa | L                | indutância         |
| c     |                                                                  | R                | resistência        |
| k     |                                                                  | 1/C              | elastância         |
| F(t)  |                                                                  | E(t)             | força eletromotriz |

Podemos também transferir outras idéias de uma situação para outra. Por exemplo: a solução do estado estacionário discutida na Nota 1 faz sentido no sistema mola. E o fenômeno da ressonância no sistema mola pode ser proveitosamente transportado para circuitos elétricos como ressonância elétrica.

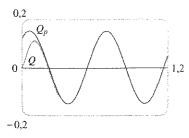


FIGURA 8

$$\boxed{5} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$\boxed{1} \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

## 17.3 Exercícios

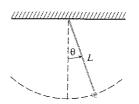
- 1. Uma mola com massa de 3 kg é mantida esticada 0,6 m além de seu comprimento natural por uma força de 20 N. Se a mola começar em sua posição de equilíbrio, mas um empurrão der sua velocidade inicial de 1,2 m/s, determine a posição da massa depois de t segundos.
- 2. Uma mola com uma massa de 4 kg tem um comprimento natural de 1 m e é mantida esticada até um comprimento de 1,3 m por uma força de 24,3 N. Se a mola for comprimida até um comprimento de 0,8 m e for solta com velocidade zero, determine a posição da massa em qualquer instante t.
- 3. Uma mola com uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 14, e uma força de 6 N é necessária para manter a mola esticada 0,5 m além de seu comprimento natural. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então solta com velocidade zero. Determine a posição da massa em qualquer instante t.
- 4. Uma mola com uma massa de 3 kg tem uma constante de amortecimento 30, e a constante da mola é 123.
  - (a) Determine a posição da massa no instante t se ele começar em uma posição de equilíbrio com uma velocidade de 2 m/s.
  - (b) Faça o gráfico da função posição da massa.
- Para a mola do Exercício 3, determine a massa que deve produzir amortecimento crítico.
- **6.** Para a mola do Exercício 4, determine a constante de amortecimento que deve produzir amortecimento crítico.
- 7. Uma mola tem uma massa de 1 kg e sua constante da mola é k = 100. A mola é solta em um ponto 0,1 m acima de sua posição de equilíbrio. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de amortecimento c: 10, 15, 20, 25, 30. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?
  - 8. Uma mola tem uma massa de 1 kg e sua constante de amortecimento é c = 10. A mola começa de sua posição de equilibrio com uma velocidade de 1 m/s. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante da mola k: 10, 20, 25, 30, 40. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?
  - Suponha que uma mola tenha massa m e constante da mola k e seja  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Suponha uma constante de amortecimento tão pequena que a força de amortecimento seja negligenciada. Se uma força externa  $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$  for aplicada, onde  $\omega_0 \neq \omega$ , use o método dos coeficientes a serem determinados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela Equação 6.
  - 10. Como no Exercício 9, considere uma mola com massa m, constante da mola k e constante de amortecimento c=0, e seja  $\omega=\sqrt{k/m}$ . Se uma força externa  $F(t)=F_0\cos\omega t$  for aplicada (a freqüência aplicada é igual à freqüência natural), use o método dos coeficientes a serem determinados para mostrar que o movimento da massa é dado por  $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+(F_0/(2m\omega))t\sin\omega t$ .
  - Mostre que se ω<sub>0</sub> ≠ ω, mas ω/ω<sub>0</sub> é um número racional, então o movimento descrito pela Equação 6 é periódico.
  - Considere uma mola sujeita a uma força de atrito ou de amortecimento.

- (a) No caso de amortecimento crítico, o movimento é dado por x = c<sub>1</sub>e<sup>rt</sup> + c<sub>2</sub>te<sup>rt</sup>. Mostre que o gráfico de x cruza o eixo t sempre que c<sub>1</sub> e c<sub>2</sub> tiverem sinais contrários.
- (b) No caso de superamortecimento, o movimento é dado por  $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ , onde  $r_1 > r_2$ . Determine uma condição sobre as magnitudes relativas de  $c_1$  e  $c_2$  sob a qual o gráfico de x cruza o eixo t para um valor positivo de t.
- **13.** Um circuito em série consiste em um resistor com  $R=20~\Omega$ , um indutor com  $L=1~\mathrm{H}$ , um capacitor com  $C=0.002~\mathrm{F}$  e uma bateria de 12 V. Se a carga inicial e a corrente forem 0, encontre a carga e a corrente nó instante t.
- 14. Um circuito em série contém um resistor com  $R=24~\Omega$ , um indutor com  $L=2~\mathrm{H}$ , um capacitor com  $C=0.005~\mathrm{F}$  e uma bateria de 12 V. A carga inicial é  $Q=0.001~\mathrm{C}$  e a corrente inicial é 0.
  - (a) Determine a carga e a corrente no instante t.
  - (b) Faça o gráfico das funções carga e corrente.
- **15.** A bateria no Exercício 13 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de E(t) = 12 sen 10t. Determine a carga no instante t.
- **16.** A bateria no Exercício 14 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de E(t) = 12 sen 10t.
  - (a) Determine a carga no instante t.
  - (b) Faça o gráfico da função carga.
- Werifique que a solução para a Equação 1 pode ser escrita na forma  $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ .
- 18. A figura mostra um pêndulo com comprimento L e o ângulo θ a partir da vertical ao pêndulo. Pode ser mostrado que θ, como uma função do tempo, satisfaz a equação diferencial não-linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

onde g é a aceleração devida à gravidade. Para valores pequenos de  $\theta$  podemos usar a aproximação linear sen  $\theta \approx \theta$ , e então a equação diferencial torna-se linear.

- (a) Determine a equação do movimento de um pêndulo com comprimento 1 m se θ for inicialmente 0,2 rad e a velocidade angular for dθ/dt = 1 rad/s.
- (b) Qual o ângulo máximo que o pêndulo pode fazer a partir da vertical?
- (c) Qual o período do pêndulo (isto é, o tempo necessário para uma oscilação completa)?
- (d) Quando o pêndulo estará pela primeira vez na vertical?
- (e) Qual a velocidade angular do pêndulo quando ele está na vertical?



## Soluções em Série

Muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente em termos de combinações finitas de funções usuais simples. Isso é verdade mesmo para uma equação com aparência bem simples, como

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

Todavia é importante você poder resolver equações como a que foi dada acima, pois elas surgem de problemas físicos em particular, em conexão com a equação de Schrödinger da mecânica quântica. Em tal caso vamos usar o método das séries de potência, isto é, procuraremos por uma solução da forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

O método é para substituir essa expressão na equação diferencial e determinar os valores dos coeficientes  $c_0, c_1, c_2, \ldots$  Essa técnica assemelha-se ao método dos coeficientes a serem determinados, discutido na Seção 17.2.

Usando antes as séries de potência para resolver a Equação 1, ilustraremos o método sobre uma equação mais simples y'' + y = 0 no Exemplo 1. Realmente já sabemos como resolver essa equação pelas técnicas da Seção 17.1, contudo é mais fácil entender o método da série de potência quando ele é aplicado para essa equação mais simples.

EXEMPLO 1  $\Box$  Use a série de potência para resolver a equação y'' + y = 0.

SOLUÇÃO Assumiremos que haja uma solução da forma

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Podemos diferenciar a série de potências termo a termo, logo

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

3 
$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

A fim de comparar as expressões de y e y" mais facilmente, reescrevemos y" como segue:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Substituindo as expressões nas Equações 2 e 4 na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n}x^{n} = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

☐ Escrevendo os primeiros termos de (4) você verá que são iguais a (3). Para obter (4) substituímos n por n + 2 e começamos o somatório em 0 em vez de 2. Se duas séries de potências forem iguais, então os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Portanto os coeficientes de  $x^n$  da Equação 5 devem ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n=0$$

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A Equação 6 é chamada *relação de recursão*. Se  $c_0$  e  $c_1$  forem conhecidos, essa equação permite-nos determinar os coeficientes restantes recursivamente, pondo  $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$  em sucessão.

Pondo 
$$n = 0$$
:  $c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$ 

Pondo 
$$n = 1$$
:  $c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3}$ 

Pondo 
$$n = 2$$
:  $c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$ 

Pondo 
$$n = 3$$
:  $c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$ 

Pondo 
$$n = 4$$
:  $c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4! \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}$ 

Pondo 
$$n = 5$$
:  $c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{5! \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!}$ 

Até agora vemos o seguinte padrão:

para os coeficientes pares, 
$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$$

para os coeficientes ímpares, 
$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}$$

Pondo esses valores na Equação 2, escrevemos a solução como

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$$

$$= c_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right)$$

$$+ c_1 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4000 9000 9000

Note que há duas constantes arbitrárias,  $c_0$  e  $c_1$ .

NOTA 1 = Reconhecemos a série obtida no Exemplo 1 como sendo a série de Maclaurin para cos x e sen x. (Veja as Equações 11.10.16 e 11.10.15.) Portanto, podemos escrever a solução como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

Entretanto, em geral não somos capazes de expressar soluções das equações diferenciais em série de potência em termos de funções conhecidas.

EXEMPLO 2  $\square$  Resolva y'' - 2xy' + y = 0.

SOLUÇÃO Vamos assumir que haja uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

 $\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$ 

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

como no Exemplo 1. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n \right] x^n = 0$$

Essa equação estará satisfeita se o coeficiente de  $x^n$  for 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Resolvemos essa relação de recursão pondo  $n=0,1,2,3,\ldots$  sucessivamente na Equação 7:

Pondo 
$$n = 0$$
:  $c_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} c_0$ 

Pondo 
$$n = 1$$
:  $c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_1$ 

Pondo 
$$n = 2$$
:  $c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$ 

Pondo 
$$n = 3$$
:  $c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$ 

Pondo 
$$n = 4$$
:  $c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4! \cdot 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$ 

Pondo 
$$n = 5$$
:  $c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5! \cdot 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$ 

Pondo 
$$n = 6$$
:  $c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$ 

Pondo 
$$n = 7$$
:  $c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$ 

Em geral, os coeficientes pares são dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} c_0$$

e os coeficientes ímpares são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} c_1$$

A solução é

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

$$= c_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!} x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} x^8 - \cdots \right)$$

$$+ c_1 \left( x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!} x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} x^9 + \cdots \right)$$

ou

$$y = c_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n} \right) + c_1 \left( x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)$$

NOTA 2 □ No Exemplo 2, supusemos que a equação diferencial tinha uma solução em série. Mas agora podemos verificar diretamente que a função dada pelo Equação 8 é de fato uma solução.

NOTA 3 

Ao contrário da situação do Exemplo 1, a série de potência que surge na solução do Exemplo 2 não define funções elementares. As funções

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$
$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

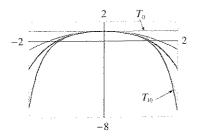


FIGURA 1

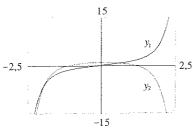


FIGURA 2

são perfeitamente boas, entretanto não podem ser expressas em termos das funções familiares. Podemos usar essas expressões de série de potência para  $y_1$  e  $y_2$  para computar os valores aproximados das funções e até mesmo seus gráficos. A Figura 1 mostra as duas primeiras somas parciais  $T_0, T_2, T_4, \ldots$  (polinômios de Taylor) para  $y_1(x)$ , e vemos como eles convergem para  $y_1$ . Dessa maneira podemos fazer ambos os gráficos  $y_1$  e  $y_2$  na Figura 2.

NOTA 4 D Se formos solicitados a resolver o problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0$$
  $y(0) = 0$   $y'(0) = 1$ 

devemos observar, do Teorema 11.10.5, que

$$c_0 = y(0) = 0$$
  $c_1 = y'(0) = 1$ 

Isso deve simplificar os cálculos no Exemplo 2, uma vez que todos os coeficiente pares devem ser 0. A solução para o problema de valor inicial é

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

## 17.4 Exercícios

1-11 🗆 Use as séries de potência para resolver a equação diferencial.

1. 
$$y' - y = 0$$

**2.** 
$$y' = xy$$

$$3x \ y' = x^2 y$$

4. 
$$(x-3)y'+2y=0$$

5. 
$$y'' + xy' + y = 0$$

7. 
$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

8. 
$$y'' = xy$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**10.** 
$$y'' + x^2y = 0$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ 

**11.** 
$$y'' + x^2y' + xy = 0$$
,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ 

12. A solução do problema de valor inicial

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$
  $y(0) = 1$   $y'(0) = 0$ 

é chamada função de Bessel de ordem 0.

- (a) Resolva o problema de valor inicial para determinar uma expansão em série de potência da função de Bessel.
- (b) Faça o gráfico de vários polinômios de Taylor até atingir um que pareça uma boa aproximação para a função de Bessel em um intervalo [-5, 5].



#### Revisão

#### VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.
  - (b) Escreva a equação auxiliar.
  - (c) Como você usaria as raízes da equação auxiliar para resolver a equação diferencial? Escreva a forma da solução para cada um dos três casos que podem ocorrer.
- 2. (a) O que é um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem?
  - (b) O que é o problema de contorno para tal equação?
- (a) Escreva a forma de uma equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes.

- (b) O que é uma equação complementar? Como ela pode ajudar a resolver a equação diferencial original?
- (c) Explique o funcionamento do método dos coeficientes a serem determinados.
- (d) Explique o funcionamento do método da variação dos parâmetros.
- Discuta duas aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem.
- 5. Como você usaria as séries de potência para resolver uma equação diferencial?

#### TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se o enunciado é falso ou verdadeiro. Se for verdadeiro, explique por quê. Se for falso, explique por que ou dê um exemplo que invalide o enunciado.

- Se y<sub>1</sub> e y<sub>2</sub> forem soluções y" + y = 0, então y<sub>1</sub> + y<sub>2</sub> também é uma solução da equação.
- 2. Se  $y_1$  e  $y_2$  forem soluções de y'' + 6y' + 5y = x, então  $c_1y_1 + c_2y_2$  também é uma solução da equação.
- 3. A solução geral de y'' y = 0 pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x$$

**4.** A equação  $y'' - y = e^x$  tem uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x$$

#### EXERCÍCIOS

1-३६ □ Resolva a equação diferencial.

1. 
$$y'' - 2y' - 15y = 0$$

**2.** 
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

3. 
$$y'' + 3y = 0$$

**4.** 
$$4y'' + 4y' + y = 0$$

**5.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$$

**6.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x^2$$

$$7. \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x\cos x$$

**8.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$$

**9.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$$

**10.** 
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x$$
,  $0 < x < \pi/2$ 

11-14 Resolva o problema de valor inicial.

**11.** 
$$y'' + 6y' = 0$$
,  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 12$ 

**12.** 
$$y'' - 6y' + 25y = 0$$
,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ 

**13.** 
$$y'' - 5y' + 4y = 0$$
,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ 

**14.** 
$$9y'' + y = 3x + e^{-x}$$
,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ 

15. Use a série de potência para resolver o problema de valor inicial.

$$y'' + xy' + y = 0$$
  $y(0) = 0$   $y'(0) = 1$ 

16. Use a série de potência para resolver a equação

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

- 17. Um circuito em série contém um resistor com  $R=40~\Omega$ , um indutor com  $L=2~\mathrm{H}$ , um capacitor com  $C=0.0025~\mathrm{F}$  e uma bateria de 12 V. A carga inicial é  $Q=0.01~\mathrm{C}$  e a corrente inicial é 0. Determine a carga no instante t.
- **18.** Uma mola com uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 16, e uma força de 12,8 N mantém a mola esticada 0,2 m além de seu comprimento original. Determine a posição da massa no instante *t* se ela iniciar na posição de equilíbrio com velocidade de 2,4 m/s.
- 19. Suponha que a Terra seja uma esfera sólida de densidade uniforme com massa M e raio R = 3,960 mi. Para uma partícula de massa m a uma distância r a partir do centro da Terra e dentro dela, a força gravitacional que atrai a partícula para o centro é

$$F_r = \frac{-GM_rm}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e M, é a massa de Terra dentro de uma esfera de raio r.

- (a) Mostre que  $F_r = \frac{-GMm}{R^3} r$ .
- (b) Suponha que um buraco seja perfurado na Terra ao longo do diâmetro. Mostre que, se uma partícula de massa m for deixada cair a partir do repouso desde a superfície para dentro do buraco, então a distância y = y(t) da partícula a partir do centro da Terra no instante t é dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

onde 
$$k^2 = GM/R^3 = g/R$$
.

- (c) Conclua a partir da parte (b) que a partícula está submetida a um movimento harmônico simples. Encontre o período T.
- (d) Com que velocidade a partícula passa através do centro da Terra?



# **Apêndices**

- F Provas de Teoremas A2
- **G** Números Complexos A5
- H Respostas dos Exercícios de Números Ímpares A13

### Provas de Teoremas

SEÇÃO 11.6

A fim de provar o Teorema 11.8.3, precisamos primeiro dos seguintes resultados:

Teoroma

- 1. Se uma série de potência  $\sum c_n x^n$  convergir quando x = b (onde  $b \neq 0$ ), então ela converge quando |x| < |b|.
- 2. Se uma série de potência  $\sum c_n x^n$  divergir quando x = d (onde  $d \ne 0$ ), então ela diverge quando |x| > |d|.

Prova de 3 Suponhamos que  $\sum c_n b^n$  convirja. Então, pelo Teorema 11.2.6, temos  $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$ . De acordo com a Definição 11.1.2 com  $\varepsilon = 1$ , existe um inteiro positivo N tal que  $|c_n b^n| < 1$  sempre que  $n \ge N$ . Assim, para  $n \ge N$ , temos

$$|c_n x^n| = \left| \frac{c_n b^n x^n}{b^n} \right| = |c_n b^n| \left| \frac{x}{b} \right|^n < \left| \frac{x}{b} \right|^n$$

Se |x| < |b|, então |x/b| < 1, assim,  $\sum |x/b|^n$  é uma série geométrica convergente. Logo, pelo Teste da Comparação, a série  $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$  é convergente. Assim, a série  $\sum c_n x^n$  é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

Prove de 2 Suponhamos que  $\sum c_n d^n$  divirja. Se x for qualquer número tal que |x| > |d|, então  $\sum c_n x^n$  não pode convergir, pois, pela parte 1, a convergência de  $\sum c_n x^n$  implicaria a convergência de  $\sum c_n d^n$ . Portanto,  $\sum c_n x^n$  diverge quando |x| > |d|.

Teorema Para uma série de potência  $\sum c_n x^n$  há apenas três possibilidades:

- 1. A série converge somente quando x = 0.
- **2.** A série converge para todo x.
- 3. Existe um número positivo R tal que a série converge se |x| < R e diverge se |x| > R.

Prova Suponhamos que não ocorram os casos 1 e 2. Então existem números não nulos b e d tais que  $\sum c_n x^n$  converge para x = b e diverge para x = d. Portanto o conjunto  $S = \{x \mid \sum c_n x^n$  converge} é não vazio. Pelo teorema precedente, a série diverge se |x| > |d|, assim,  $|x| \le |d|$  para todo  $x \in S$ . Isso nos diz que |d| é um limite superior para o conjunto S. Então, pelo Axioma da Completitude (veja a Seção 11.1), S tem um limite superior mínimo R. Se |x| > R, então  $x \notin S$ , assim,  $\sum c_n x^n$  diverge. Se |x| < R, então |x| não é um limite superior para S, e, portanto, existe  $b \in S$  tal que b > |x|. Como  $b \in S$ ,  $\sum c_n b^n$  converge, e assim, pelo teorema precedente,  $\sum c_n x^n$  converge.

- [3] Teorema Para uma série de potência  $\sum c_n(x-a)^n$  temos somente três possibilidades:
- 1. A série converge somente quando x = a.
- **2.** A série converge para todo x.
- 3. Existe um número positivo R tal que a série converge se |x a| < R e diverge se |x a| > R.

АЗ

Prova Se fizermos a mudança de variável u = x - a, então a série de potência fica  $\sum c_n u^n$  e podemos aplicar nela o teorema precedente. No caso 3, temos convergência para |u| < R e divergência para |u| > R. Assim, temos convergência para |x - a| < R e divergência para |x - a| > R.

SEÇÃO 14.3

Teorema de Clairaut Suponhamos que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem ambas contínuas em D, então  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

Prova Para valores pequenos de  $h, h \neq 0$ , considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Observe que, se fizermos g(x) = f(x, b + h) - f(x, b), então

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e a + h tal que

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, novamente, dessa vez em  $f_x$ , obtemos um número d entre b e b+h tal que

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se  $h \to 0$ , então  $(c, d) \to (a, b)$ , assim, da continuidade de  $f_{xy}$  em (a, b) resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes, bem como a continuidade de  $f_{yx}$  em (a, b), obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

1.3

SEÇÃO 14.4

**8** Teorema Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existirem próximo de (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Prova Seja

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acordo com (14.4.7), para provar que f é diferenciável em (a, b), temos de mostrar que podemos escrever  $\Delta z$  na forma

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2 \to 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ .

Com referência à Figura 4, escrevemos

$$\boxed{3} \quad \Delta z = \left[ f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) \right] + \left[ f(a, b + \Delta y) - f(a, b) \right]$$

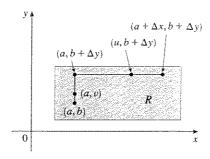


FIGURA 4

Observe que a função de uma única variável

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida no intervalo  $[a, a + \Delta x]$  e  $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$ . Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio para g, obteremos

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u) \Delta x$$

onde u é algum número entre a e  $a+\Delta x$ . Em termos de f, essa equação torna-se

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y) \Delta x$$

Essa equação nos fornece uma expressão para a primeira parte do lado direito da Equação 3. Para a segunda parte, fazemos h(y) = f(a, y). Então h é uma função de uma única variável definida em um intervalo  $[b, b + \Delta y]$  e  $h'(y) = f_y(a, y)$ . Uma segunda aplicação do Teorema do Valor Médio nos dá

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v) \Delta y$$

onde v é algum número entre b e  $b + \Delta y$ . Em termos de f, isso fica

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v) \Delta y$$

Substituímos agora essas expressões na Equação 3 e obtemos

$$\Delta z = f_x(u, b + \Delta y) \, \Delta x + f_y(a, v) \, \Delta y$$

$$= f_x(a, b) \Delta x + \left[ f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b) \right] \Delta x + f_y(a, b) \, \Delta y$$

$$+ \left[ f_y(a, v) - f_y(a, b) \right] \Delta y$$

$$= f_x(a, b) \, \Delta x + f_y(a, b) \, \Delta y + \varepsilon_1 \, \Delta x + \varepsilon_2 \, \Delta y$$

23

onde

$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Uma vez que  $(u, b + \Delta y) \rightarrow (a, b)$  e  $(a, v) \rightarrow (a, b)$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  e como  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas em (a, b), vemos que  $\varepsilon_1 \to 0$  e  $\varepsilon_2 \to 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ . Portanto f é diferenciável em (a, b).

## **Números Complexos**

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma a + bi, onde ae b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que  $i^2 = -1$ . O número complexo a + bi pode também ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado plano Argand), como na Figura 1; assim, o número complexo  $i = 0 + 1 \cdot i$  está identificado como o ponto (0, 1).

A parte real do número complexo a + bi é o número real a, e a parte imaginária é o número real b. Assim, a parte real de 4 - 3i é 4 e a parte imaginária é -3. Dois números complexos a + bi e c + di são **iguais** se a = c e b = d, isto é, se suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias forem iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é chamado eixo real, ao passo que o eixo vertical é denominado eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(1-i) + (4+7i) = (1+4) + (-1+7)i = 5+6i$$

O produto de números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais se mantenham:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + (bi)(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

Uma vez que  $i^2 = -1$ , isso fica

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

FIGURA 1 Números complexos como pontos no plano de Argand

EXEMPLO 1 a

$$(-1+3i)(2-5i) = (-1)(2-5i) + 3i(2-5i)$$
$$= -2+5i+6i-15(-1) = 13+11i$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo z=a+bi, definimos seu **complexo conjugado** como  $\bar{z}=a-bi$ . Para encontrar o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

**EXEMPLO 2** 
$$\Box$$
 Expresse o número  $\frac{-1+3i}{2+5i}$  na forma  $a+bi$ .

SOLUÇÃO Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de 2 + 5i, isto é, 2 - 5i, e levando-se em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = \frac{-1+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{13+11i}{2^2+5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

A interpretação geométrica do número complexo está na Figura 2:  $\bar{z}$  é a reflexão z em torno do eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As provas seguem da definição e serão requisitadas no Exercício 18.

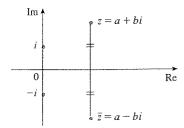


FIGURA 2

 $\begin{array}{c|c}
lm \\
bi \\
\hline
0 \\
\hline
\end{array}$   $\begin{array}{c|c}
z = a + bi \\
b \\
\hline
\end{array}$   $\begin{array}{c|c}
b \\
\hline
\end{array}$ Re

FIGURA 3

Propriedades dos Conjugados

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{zw} = \overline{z} \, \overline{w} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

O módulo, ou valor absoluto, |z| de um número complexo z = a + bi é sua distância até a origem. Da Figura 3, vemos que, se z = a + bi, então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e portanto

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Uma vez que  $i^2 = -1$ , podemos pensar i como a raiz quadrada de -1. Note, porém, que também temos  $(-i)^2 = i^2 = -1$ , e portanto -i é igualmente uma raiz quadrada de -1.

Dizemos que i é a raiz quadrada principal de -1 e escrevemos  $\sqrt{-1} = i$ . Em geral, se c for um número positivo, escrevemos.

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c} i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  são válidas mesmo que  $b^2 - 4ac < 0$ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3  $\Box$  Ache as raízes da equação  $x^2 + x + 1 = 0$ .

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática, temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são conjugadas complexas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  com coeficientes reais a, b e c são sempre conjugadas complexas. (Se z for real,  $\bar{z} = z$ , logo z é a sua própria conjugada.)

Vimos que, se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática possui uma solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem uma solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi provado por Gauss.

# Forma Polar

Sabemos que qualquer número complexo z = a + bi pode ser considerado como um ponto (a, b) e que tal ponto pode ser representado em coordenadas polares  $(r, \theta)$  com  $r \ge 0$ . De fato,

$$a = r\cos\theta$$
  $b = r\sin\theta$ 

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

onde 
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
 e  $tg \theta = \frac{b}{a}$ 

O ângulo  $\theta$  é chamado **argumento** z, e escrevemos  $\theta = \arg(z)$ . Note que  $\arg(z)$  não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

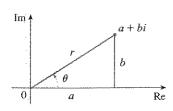


FIGURA 4

EXEMPLO 4 

Escreva os números a seguir na forma polar.

(a) 
$$z = 1 + i$$

(b) 
$$w = \sqrt{3} - i$$

SOLUÇÃO

(a) Temos que  $r=|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$  e tg  $\theta=1$ ; assim, podemos tomar  $\theta=\pi/4$ . Logo, a forma polar é

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(b) Aqui temos  $r=|w|=\sqrt{3+1}=2$  e tg  $\theta=-1/\sqrt{3}$ . Uma vez que w está no quarto quadrante, tomamos  $\theta=-\pi/6$  e

$$w = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

A forma polar dos números complexos nos dá uma interpretação interessante para a multiplicação e a divisão. Sejam

$$z_i = r_i(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$
  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$ 

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

$$Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Essa fórmula nos diz que, para se multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos (veja a Figura 5).

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que, para se dividir dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \qquad z_2 \neq 0$$

Em particular, tomando  $z_1 = 1$  e  $z_2 = z$  (e, portanto  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \theta$ ), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 6.

Se 
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$
, então  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ 

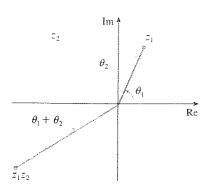


FIGURA 5

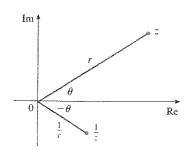


FIGURA 6

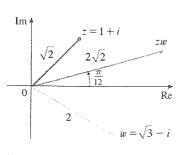


FIGURA 7

इंग्रह्मिन १८८८ - Ache o produto dos números complexos  $1+i\,\mathrm{e}\,\sqrt{3}-i$  na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

e

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Assim, pela Equação 1,

$$(1+i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$
$$= 2\sqrt{2} \left( \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right)$$

Isso está ilustrado na Figura 7.

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como computar as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

então

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

Em geral obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

[2] Taurama da Da Muivra Se  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e n for um inteiro positivo, então

$$z^{n} = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{n} = r^{n}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Isso nos diz que, para elevar à n-ésima potência um número complexo, elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n.

EXEMPLO 6  $\Box$  Ache  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$ .

SOLUÇÃO Uma vez que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$ , segue do Exemplo 4(a) que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, pelo Teorema de De Moivre:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} \left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{2^5}{2^{10}} \left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as raízes *n*-ésimas de números complexos. Uma raíz *n*-ésima de um número complexo *z* é um número complexo *w* tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar como

$$w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$$
 e  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^{n}(\cos n\phi + i \sin n\phi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r$$
 ou  $s = r^{1/n}$ 

 $\cos n\phi = \cos \theta$ 

$$\cos n\phi = \cos \theta$$
 e  $\sin n\phi = \sin \theta$ 

Do fato de que seno e cosseno têm período  $2\pi$  segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi$$
 ou  $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ 

Assim,

$$w = r^{1/n} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Uma vez que, dessa expressão, resulta (m), valores diferentes de w para  $k=0,1,2,\ldots,n-1$ , temos o seguinte:

[3] Reizes de um Número Complexo Seja  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e n um inteiro positivo. Então z tem n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo  $|w_k| = r^{1/n}$ . Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre a circunferência de raio  $r^{1/n}$  no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por  $2\pi/n$ , vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre essa circunferência.

EXEMPLO 7  $\Box$  Ache as seis raízes sextas de z=-8 e faça um gráfico dessas raízes no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma polar,  $z = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ . Aplicando a Equação 3 com n = 6, obtemos

$$w_k = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right)$$

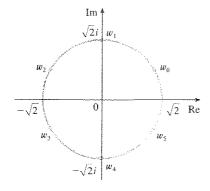


FIGURA 8 As seis raízes sextas de z = -8

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo k = 0, 1, 2, 3, 4 e 5 nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$w_1 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} i$$

$$w_2 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$w_3 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$w_4 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2} i$$

$$w_5 = 8^{1/6} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

Todos esses pontos estão sobre a circunferência de raio  $\sqrt{2}$ , como na Figura 8.

# Exponencial Complexa

Precisamos também dar um significado para a expressão  $e^z$  quando z = x + iy for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11 pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para  $e^x$  (11.10.11) como guia, definimos

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} = 1 + z + \frac{z^{2}}{2!} + \frac{z^{3}}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^z$$

Se fizermos z = iy, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

 $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2 i = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ , ...

obteremos 
$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$

Usamos aqui as séries de Taylor para cos y e sen y (Equações 11.10.16 e 11.10.15). O resultado é uma famosa fórmula chamada fórmula de Euler:

 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ [7]

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

(a)  $e^{i\pi}$  (b)  $e^{-1+i\pi/2}$ GRADENES o Calcule:

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6), temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação (7), obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e} [0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, notamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de provar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

matemática: 0, 1, e, i e π.

Exemplo 8(a) como

Podíamos ter escrito o resultado do

 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 

Exercícios

Essa equação relaciona os cinco

números mais famosos em toda a

্র-জু 🗆 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma a + bi.

1. 
$$(5-6i)+(3+2i)$$

2. 
$$(4-\frac{1}{2}i)-(9+\frac{5}{2}i)$$

3. 
$$(2+5i)(4-i)$$

4. 
$$(1-2i)(8-3i)$$

5. 
$$12 + 7i$$

**6.** 
$$2i(\frac{1}{2}-i)$$

7. 
$$\frac{1+4i}{3+2i}$$

8. 
$$\frac{3+2i}{1-4i}$$

9. 
$$\frac{1}{1+i}$$

10. 
$$\frac{3}{4-3i}$$

11. 
$$i^3$$

13. 
$$\sqrt{-25}$$

14. 
$$\sqrt{-3}\sqrt{-12}$$

Determine o complexo conjugado e o módulo do número

15. 
$$12 - 5i$$

16. 
$$-1 + 2\sqrt{2}i$$

17. 
$$-4i$$

(a) 
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

(b) 
$$\overline{zw} = \overline{z} \, \overline{w}$$

(c) 
$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$
, onde  $n \in \mathbb{R}$  im inteiro positivo [Dica: escreva  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .]

19-24 🗆 Determine todas as soluções da equação.

19. 
$$4x^2 + 9 = 0$$

**20.** 
$$x^4 = 1$$

**21.** 
$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

**22.** 
$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

**23.** 
$$z^2 + z + 2 = 0$$

**24.** 
$$z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$$

25–28  $\Box$  Escreva o número na forma polar com argumento entre 0 e  $2\pi$ .

**25.** 
$$-3 + 3$$

**26.** 
$$1 - \sqrt{3}i$$
 **27.**  $3 + 4i$ 

27. 
$$3 + 4i$$

23-32 
Determine a forma polar para zw, z/w e 1/z colocando primeiro z e w na forma polar.

**29.** 
$$z = \sqrt{3} + i$$
,  $w = 1 + \sqrt{3}i$ 

**30.** 
$$z = 4\sqrt{3} - 4i$$
,  $w = 8i$ 

31. 
$$z = 2\sqrt{3} - 2i$$
,  $w = -1 + i$ 

**32.** 
$$z = 4(\sqrt{3} + i)$$
,  $w = -3 - 3i$ 

33-36 🗆 Determine as potências indicadas, usando o Teorema de De Moivre.

- **34.**  $(1-\sqrt{3}i)^5$  **35.**  $(2\sqrt{3}+2i)^5$ **33.**  $(1+i)^{20}$
- 37-40 Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.
- 37. As raízes oitavas de 1
- **38**. As raízes quintas de 32
- 39. As raízes cúbicas de i
- 40. As raízes cúbicas de 1 + i

41–46 □ Escreva o número na forma a + bi.

- **42.**  $e^{2\pi i}$
- **43.**  $e^{i\pi/3}$

- **45.**  $e^{2+i\pi}$
- **46.**  $e^{\pi + i}$
- 47. Se u(x) = f(x) + ig(x) for uma função a valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária f(x) e g(x)

- forem funções diferenciáveis de x, então a derivada de u está definida como u'(x) = f'(x) + ig'(x). Use isso junto com . a Equação 7 para provar que, se  $F(x) = e^{rx}$ , então  $F'(x) = re^{rx}$ quando r = a + bi for um número complexo.
- **48.** (a) Se *u* for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida  $\int u(x) dx$  será uma antiderivada de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x} dx$$

(b) Considerando as partes real e imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x \, dx \qquad e \qquad \int e^x \sin x \, dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1 do Volume I.

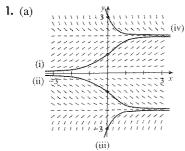
# Respostas dos Exercícios de Números Ímpares

# Capítulo 9

#### Exercícios 9.1 a

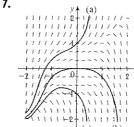
- **3.** (a) ±3 5. (b) e (c)
- 7. (a) Deve ser 0 ou decrescente
- (c) y = 0 (d) y = 1/(x + 2)
- **9.** (a) 0 < P < 4200
- (b) P > 4200
- (c) P = 0, P = 4200
- 13. (a) No começo, fica positivo, mas depois decresce

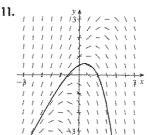
#### Exercícios 9.2 0



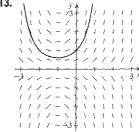


3. IV 5. III



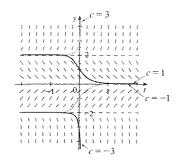


15.

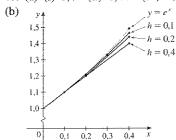


#### A14 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

17. 
$$-2 \le c \le 2$$
;  $-2, 0, 2$ 



Subestimado



Evidencia-se que o erro é também dividido pela metade (aproximadamente).

(c) (i) 
$$-0.6321$$
 (ii)  $-0.0249$  (iii)  $-0.0022$ 

$$(iv) -0.0002$$

Evidencia-se que o erro é também dividido por 10 (aproximadamente).

(c) Sim; 
$$Q = 3$$



# Exercícios 9.3 a

1. 
$$y = Kx$$

**1.** 
$$y = Kx$$
 **3.**  $y = K\sqrt{x^2 + 1}$ 

5. 
$$y + \ln |\sec y| = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

7. 
$$y = \pm \sqrt{[3(te^t - e^t + C)]^{2/3} - 1}$$

9. 
$$u = Ae^{2t+t^2/2} - 1$$

11. 
$$y = tg(x - 1)$$

13. 
$$\cos x + x \sin x = y^2 + \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{2}{3}$$

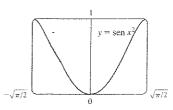
15. 
$$u = -\sqrt{t^2 + \lg t + 25}$$

17. 
$$y = \frac{4a}{\sqrt{3}} \sin x - a$$

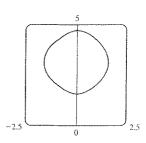
19. 
$$y = 7e^{x^4}$$

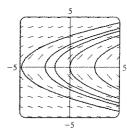
**21.** (a) 
$$\sin^{-1} y = x^2 + C$$

(b) 
$$y = \sin(x^2),$$
  
 $-\sqrt{\pi/2} \le x \le \sqrt{\pi/2}$ 

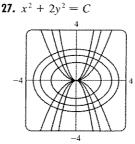


**23.** 
$$\cos y = \cos x - 1$$





**29.** 
$$y^3 = 3(x + C)$$



(b)  $y = \pm \sqrt{2(x + C)}$ 

# **31.** $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$ ; 3 **33.** $P(t) = M - Me^{-kt}$ ; M

33 
$$P(t) = M - Me^{-kt} M$$

**35.** (a) 
$$x = a - 4/(kt + 2/\sqrt{a})^2$$

(b) 
$$t = \frac{2}{k\sqrt{a-b}} \left( tg^{-1} \sqrt{\frac{b}{a-b}} - tg^{-1} \sqrt{\frac{b-x}{a-b}} \right)$$

**37.** (a) 
$$C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$$

(b) r/k; a concentração tende a r/k independentemente do valor de  $C_0$ .

**39.** (a) 
$$15e^{-t/100}$$
 kg (b)  $15e^{-0.2} \approx 12.3$  kg

(b) 
$$15e^{-0.2} \approx 12.3 \text{ kg}$$

41. 
$$g/k$$

**43.** (a) 
$$dA/dt = k\sqrt{A} (M - A)$$

(b) 
$$A(t) = M[(Ce^{\sqrt{M}kt} - 1)/(Ce^{\sqrt{M}kt} + 1)]^2$$
, onde

$$C = (\sqrt{M} + \sqrt{A_0})/(\sqrt{M} - \sqrt{A_0}) e A_0 = A(0)$$

#### Exercícios 9.4

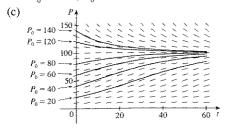
- 1. Em torno de 235
- **3.** (a)  $500 \times 16^{t/3}$  (b)  $\approx 20,159$
- (c) 18,631 células/h (d)  $(3 \ln 60)/\ln 16 \approx 4,4 \text{ h}$
- 5. (a) 1508 milhões, (b) 1871 milhões, (c) 2161 milhões

(d) 3972 milhões; guerra na primeira metade do século, expectativa de vida cresceu na segunda metade.

- **7.** (a)  $Ce^{-0.0005t}$ (b)  $-2000 \ln 0.9 \approx 211 \text{ s}$
- (b)  $\approx 9.92 \text{ mg}$  (c)  $\approx 199.3 \text{ anos}$ **9.** (a)  $100 \times 2^{-\tau/30}$  mg
- 11. ≈2500 anos
- **13.** (a)  $\approx 137 \, ^{\circ}\text{F}$ (b)  $\approx 116 \, \text{min}$
- **15.** (a)  $13,\overline{3}$  °C (b)  $\approx 67,74 \text{ min}$
- 17. (a)  $\approx 64.5 \text{ kPa}$  (b)  $\approx 39.9 \text{kPa}$
- 19. (a) (i) \$ 3828,84 (ii) \$ 3840,25 (iii) \$ 3850,08
- (iv) \$ 3851,61 (v) \$ 3852,01 (vi) \$ 3852,08
- (b) dA/dt = 0.05A, A(0) = 3000
- **21.** (a)  $P(t) = (m/k) + (P_0 m/k)e^{kt}$ (b)  $m < kP_0$
- (c)  $m = kP_0$ ,  $m > kP_0$  (d) Declinando

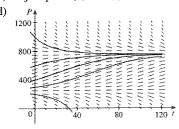
#### Exercícios 9.5 🗈

- 1. (a) 100; 0,05
- (b) Onde P está perto de 0 ou 100; sobre a reta P = 50;  $0 < P_0 < 100; P_0 > 100$



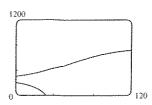
As soluções tendem a 100; algumas crescem e outras decrescem; algumas têm um ponto de inflexão, mas outras não; soluções  $com P_0 = 20 e P_0 = 40 têm pontos de inflexão em P = 50$ (d) P = 0, P = 100; outras soluções afastam-se de P = 0 e na direção P = 100

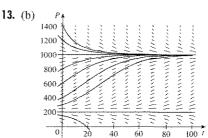
- **3.** (a)  $3.23 \times 10^7 \text{ kg}$  (b)  $\approx 1.55 \text{ anos}$
- **5.** (a)  $dP/dt = \frac{1}{265}P(1 P/100)$ , P em bilhões
- (b) 5,49 bilhões (c) Em bilhões: 7,81, 27,72
- (d) Em bilhões: 5,48, 7,61, 22,41
- **7.** (a) dy/dt = ky(1 y)
- (b)  $y = y_0/[y_0 + (1 y_0)e^{-kt}]$
- (c) 3h36 da tarde
- 11. (a) Peixes são pescados a uma taxa de 15 por semana.
- (b) Veja a parte (d)
- (c) P = 250, P = 750



$$0 < P_0 < 250; P \to 0; P_0 = 250; P \to 250; P_0 > 250; P \to 750$$

(e) 
$$P(t) = \frac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$$
, onde  $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$ 





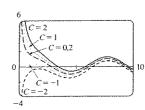
$$0 < P_0 < 200: P \to 0; P_0 = 200: P \to 200; P_0 > 200: P \to 1000$$

(c) 
$$P(t) = \frac{m(K - P_0) + K(P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}{K - P_0 + (P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}$$

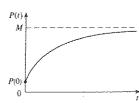
**15.** (a)  $P(t) = P_0 e^{(k/r)(\text{sen}(rt - \phi) + \text{sen } \phi)}$  (b) Não existe

#### Exercícios 9.6

- 3. Sim **5.**  $y = \frac{2}{3}e^x + Ce^{-2x}$
- 7.  $y = x^2 \ln |x| + Cx^2$  9.  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C/x$
- 11.  $y = \frac{1}{2}x + Ce^{-x^2} \frac{1}{2}e^{-x^2} \int e^{x^2} dx$
- **13.**  $u = (t^2 + 2t + 2C)/[2(t+1)]$
- 17.  $v = t^3 e^{t^2} + 5e^{t^2}$ 15.  $y = -x - 1 + 3e^x$
- 19.  $y = -x \cos x x$
- **21.**  $y = \sin x + (\cos x)/x + C/x$



- **25.**  $y = \pm [Cx^4 + 2/(5x)]^{-1/2}$
- **27.** (a)  $I(t) = 4 4e^{-5t}$  (b)  $4 4e^{-1/2} \approx 1,57$  A
- **29.**  $Q(t) = 3(1 e^{-4t}), I(t) = 12e^{-4t}$
- **31.**  $P(t) = M + Ce^{-kt}$

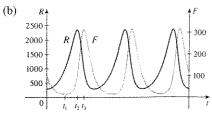


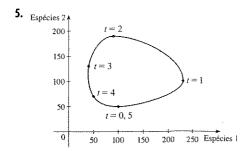
- **33.**  $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) 40.000(100 + 2t)^{-3/2}$ ; 0,2275 kg/L
- **35.** (b) mg/c (c)  $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] m^2g/c^2$

#### Exercícios 9.7 🏻

1. (a) x = predadores, y = presa; o crescimento está restrito apenas pelos predadores, que se alimentam somente das presas. (b) x = presas, y = predadores; o crescimento está restrito pelacapacidade de produção e pelos predadores, que consomem apenas as presas.

3. (a) A população de coelhos, no início em aproximadamente 300, cesce até 2400 e então decresce, voltando para 300. A população de raposas, no início com 100, decresce até aproximadamente 20, cresce até por volta de 315 e decresce para 100. O ciclo então recomeça.





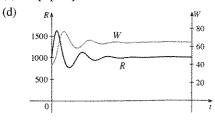
9. (a) A população estabiliza-se em 5000.

(b) (i) W = 0, R = 0: Populações zero.

(ii) W = 0, R = 5000: Na ausência de lobos, a população de coelhos é sempre de 5000.

(iii) W = 64, R = 1000: Ambas as populações são estáveis.

(c) As populações estabilizam-se em 1000 coelhos e 64 lobos.



#### Capítulo 9 Revisão D

#### Testes Falso-Verdadeiro

1. Verdadeiro

3. Falso

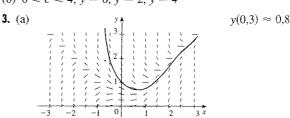
5. Verdadeiro

7. Verdadeiro

### Exercícios

I. (a) (iii) (ii)

(b)  $0 \le c \le 4$ ; y



(b) 0,75676

(c) y = x e y = -x; há um máximo e um mínimo locais.

**5.** 
$$y = (\frac{1}{2}x^2 + C)e^{-\sin x}$$
 **7.**  $y^3 + y^2 = \cos x + x \sin x + C$   
**9.**  $y = \sqrt{(\ln x)^2 + 4}$  **11.**  $y = e^{-x}(\frac{2}{3}x^{3/2} + 3)$ 

13.  $y^2 - 2 \ln |y| + x^2 = C$ 

**15.** (a)  $1000 \times 3^{r}$  (b) 27.000

(c) 27.000 ln 3 ≈ 29.663 bactérias por hora

(d)  $(\ln 2)/\ln 3 \approx 0.63 \text{ h}$ 

**17.** (a)  $C_0 e^{-kt}$  (b)  $\approx 100 \text{ h}$ 

**19.** (a) 
$$L(t) = L_{\infty} - [L_{\infty} - L(0)]e^{-kt}$$
  
(b)  $L(t) = 53 - 43e^{-0.2t}$ 

21. 15 dias **23.**  $k \ln h + h = (-R/V)t + C$ 

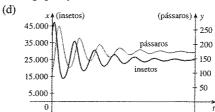
25. (a) Estabiliza-se em 200.000.

(b) (i) x = 0, y = 0: populações zero

(ii) x = 200.000, y = 0: na ausência de pássaros, a população de insetos é sempre de 200.000.

(iii) x = 25.000, y = 175; ambas as populações são estáveis.

(c) A população estabiliza-se em 25.000 insetos e 175 pássaros.



**27.** (a)  $y = (1/k) \cosh kx + a - 1/k$  ou  $y = (1/k)\cosh kx - (1/k)\cosh kb + h$ 

(b) (2/k) senh kb

#### Problemas Quentes =

1.  $f(x) = \pm 10e^x$ 

5. 20°C

7. (b)  $f(x) = (x^2 - L^2)/(4L) - (L/2) \ln(x/L)$ 

**9.** (a) 9,8 h

(b)  $31.900\pi \approx 100.000 \text{ pés}^2$ ;  $6283 \text{ pés}^2/\text{h}$ 

(c) 5,1 h

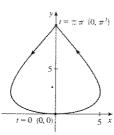
11.  $x^2 + (y - 6)^2 = 25$ 

# Capítulo 10

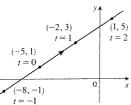
#### Exercícios 10.1 a



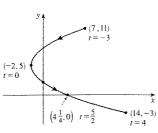
3.



**5.** (a)

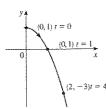


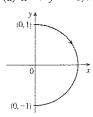
**7.** (a)

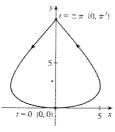


9. (a)

(b)



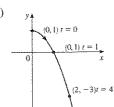




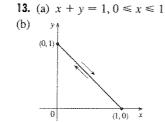
(b)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ 

(b)  $x = \frac{1}{4}(y - 5)^2 - 2$ ,  $-3 \le y \le 11$ 

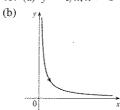
(b)  $y = 1 - x^2, x \ge 0$ 



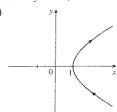
11. (a)  $x^2 + y^2 = 1, x \ge 0$ 



**15.** (a) y = 1/x, x > 0



17. (a)  $x^2 - y^2 = 1, x \ge 1$ 

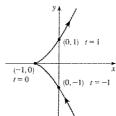


19. Move-se no sentido anti-horário sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ de (-1, 0) a (1, 0)

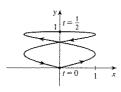
21. Dá uma volta completa no sentido horário sobre a elipse  $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ , começando e terminando em (0, 3)

**23.** Está contido no retângulo descrito por  $1 \le x \le 4$  e  $2 \le y \le 3$ .

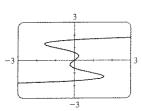
25.



27.



29.



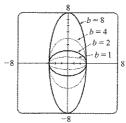
**31.** (b) x = -2 + 5t, y = 7 - 8t,  $0 \le t \le 1$ 

**33.** (a)  $x = 2 \cos t, y = 1 - 2 \sin t, 0 \le t \le 2\pi$ 

(b)  $x = 2 \cos t, y = 1 + 2 \sin t, 0 \le t \le 6\pi$ 

(c)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 1 + 2 \sin t$ ,  $\pi/2 \le t \le 3\pi/2$ 

**35.** (a)  $x = a \sin t, y = b \cos t, 0 \le t \le 2\pi$ 

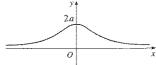


(c) Quando b cresce, a elipse alonga-se verticalmente.

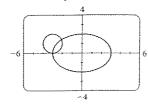
**39.**  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ ;  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ , elipse

#### A18 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

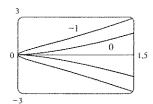


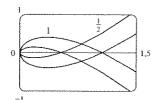


43. (a) Dois pontos de interseção.



- (b) Um ponto de colisão em (-3, 0) quando  $t = 3\pi/2$
- (c) Há ainda dois pontos de interseção, mas nenhum ponto de colisão.
- **45.** Para c = 0, há um cúspide; para c > 0, há um laço cujo tamanho aumenta quando c cresce.





47. Quando n cresce, o número de oscilações sobe; a e b determinam o comprimento e a altura.

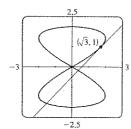
# Exercícios 10.2 🗈

1. 
$$5/(3t^2-1)$$
 3.  $y=-x$ 

5. 
$$y = -(2/e)x + 3$$
  
9.  $y = (\sqrt{3}/2)x - \frac{1}{2}$ 

7. 
$$v = -2x + 3$$

9. 
$$y = (\sqrt{3}/2)x - \frac{1}{5}$$

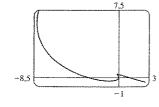


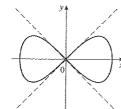
**11.** 
$$1 + \frac{3}{2}t$$
,  $3/(4t)$ ,  $t > 0$  **13.**  $-e^{-t}$ ,  $e^{-t}/(1 - e^t)$ ,  $t < 0$ 

15. 
$$-\frac{3}{2} \operatorname{tg} t$$
,  $-\frac{3}{4} \operatorname{sec}^3 t$ ,  $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ 

- 17. Horizontal em  $(6, \pm 16)$ , vertical em (10, 0)
- 19. Horizontal em  $(\pm\sqrt{2},\pm1)$  (quatro pontos), vertical em  $(\pm2,0)$
- **21.**  $(-0.25, 0.36), (-\frac{1}{4}, (1/\sqrt{2}) \frac{1}{2} \ln 2)$
- 23.

**25.** 
$$y = x, y = -x$$





**27.** (a) 
$$d \operatorname{sen} \theta/(r - d \cos \theta)$$
 **29.**  $(-5, 6), \left(-\frac{208}{27}, \frac{32}{3}\right)$ 

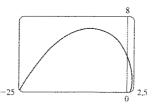
**31.** 
$$\pi ab$$
 **33.**  $(e^{\pi/2}-1)/2$  **35.**  $2\pi r^2+\pi d^2$ 

**37.** 
$$\int_{1}^{2} \sqrt{1+4t^2} dt$$
 **39.**  $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{3-2 \sin t - 2 \cos t} dt$ 

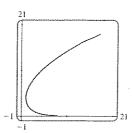
**41.** 
$$4\sqrt{2}-2$$

**43.** 
$$-\sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

**45.** 
$$\sqrt{2} (e^{\pi} - 1)$$



**47.** 
$$e^3 + 11 - e^{-8}$$

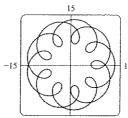


**55.** (a)

**51.** 
$$6\sqrt{2}$$
,  $\sqrt{2}$ 

$$t \in [0, 4\pi]$$

(b) 
$$\approx 294$$



57. 
$$\int_{1}^{2} \frac{8}{3} \pi t^{3/2} \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

**59.** 
$$2\pi(247\sqrt{13}+64)/1215$$

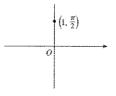
**61.** 
$$6\pi a^2/5$$

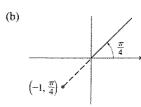
**65.** 
$$24\pi(949\sqrt{26}+1)/5$$

71. 
$$\frac{1}{4}$$

#### Exercícios 10.3 a

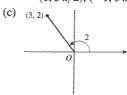
### 1. (a)





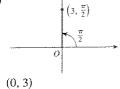
$$(1, 5\pi/2), (-1, 3\pi/2)$$

$$(2, 5\pi/4), (-2, 9\pi/4)$$

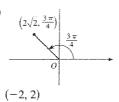


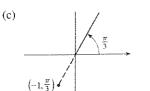
$$(3, 2 + 2\pi), (-3, 2 + \pi)$$





(b)

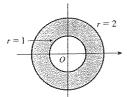


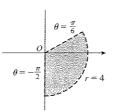


 $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$ 

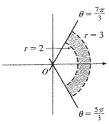
**5.** (a) (i) 
$$(\sqrt{2}, \pi/4)$$
 (ii)  $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$  (b) (i)  $(4, 11\pi/6)$  (ii)  $(-4, 5\pi/6)$ 

7.





11.



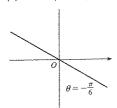
13. 
$$\frac{1}{2}\sqrt{40+6\sqrt{6}-6\sqrt{2}}$$

- 15. Circunferência, centro O, raio 2
- 17. Circunferência, centro  $(0, \frac{3}{2})$ , raio  $\frac{3}{2}$
- 19. Reta horizontal, 1 unidade acima do eixo x

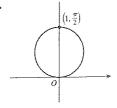
(b) x = 3

- **21.**  $r = 3 \sec \theta$
- **25.**  $r = 2c \cos \theta$

**27.** (a)  $\theta = \pi/6$ 29.

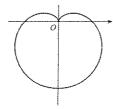


31.



33.

23.  $r = -\cot \theta \csc \theta$ 



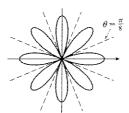
35.



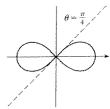
37.



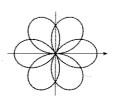
39.



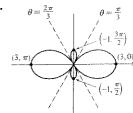
41.



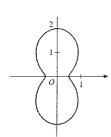
43.



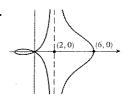
45.



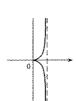
47.



49.



51.



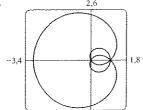
53. (a) Para c < -1, o laço começa em  $\theta = \text{sen}^{-1}(-1/c)$  e termina em  $\theta = \pi - \text{sen}^{-1}(-1/c)$ ; para c > 1, ele começa em  $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$  e termina em  $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$ .

55. 
$$\sqrt{3}$$
 57.  $-\pi$  59.  $-1$ 

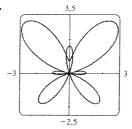
- **61.** Horizontal em  $(3/\sqrt{2}, \pi/4), (-3/\sqrt{2}, 3\pi/4);$ vertical em  $(3, 0), (0, \pi/2)$
- **63.** Horizontal em  $(\frac{3}{2}, \pi/3), (\frac{3}{2}, 5\pi/3)$ , e o pólo; vertical em (2, 0),  $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ ,  $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$
- **65.** Horizontal em  $(1, 3\pi/2), (1, \pi/2), (\frac{2}{3}, \alpha), (\frac{2}{3}, \pi \alpha),$  $(\frac{2}{3}, \pi + \alpha), (\frac{2}{3}, 2\pi - \alpha), \text{ onde } \alpha = \text{sen}^{-1}(1/\sqrt{6});$ vertical em (1, 0), (1,  $\pi$ ),  $\left(-\frac{2}{3}, \beta\right)$ ,  $\left(-\frac{2}{3}, \pi - \beta\right)$ ,  $\left(-\frac{2}{3}, \pi + \beta\right)$ ,  $(-\frac{2}{3}, 2\pi - \beta)$ , onde  $\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{6})$
- **67.** Centro (b/2, a/2), raio  $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

#### CÁLCULO Editora Thomson A20

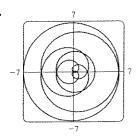




71.



73.



- 75. Girando no sentido horário através dos ângulos  $\pi/6$ ,  $\pi/3$ , ou  $\alpha$  em torno da origem
- 77. (a) Uma rosácea com n pétalas se n for impar e 2n pétalas se n for par
- (b) Número de pétalas é sempre 2n
- **79.** Para 0 < a < 1, a curva  $\dot{e}$  uma oval, que desenvolve uma pequena cavidade quando  $a \rightarrow 1^-$ . Quando a > 1, a curva divide-se em duas partes, uma das quais tem um laço.

#### Exercícios 10.4 a

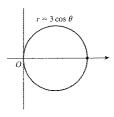
1. 
$$\pi^2/64$$

3. 
$$\pi/12 + \sqrt{3}/8$$

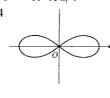
5. 
$$\pi^3/6$$

7. 
$$41\pi/4$$

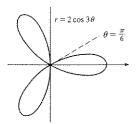
9.  $9\pi/4$ 



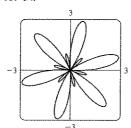
11. 4



13. π



**15**. 3π

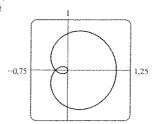


- 17.  $\pi/8$ 19.  $9\pi/20$
- **21.**  $\pi (3\sqrt{3}/2)$
- **23.**  $(4\pi/3) + 2\sqrt{3}$  **25.**  $4\sqrt{3} \frac{4}{3}\pi$
- **29.**  $(\pi 2)/8$ **31.**  $(\pi/2) - 1$
- **33.**  $(19\pi/3) (11\sqrt{3}/2)$
- **37.**  $(1/\sqrt{2}, \pi/4)$  e o pólo **35.**  $(\pi + 3\sqrt{3})/4$
- **39.**  $(\frac{1}{2}, \pi/3), (\frac{1}{2}, 5\pi/3)$ , e o pólo

- **41.**  $(\sqrt{3}/2, \pi/3), (\sqrt{3}/2, 2\pi/3), e o pólo$
- **43.** Interseção  $\theta \approx 0.89, 2.25$ ; área  $\approx 3.46$
- **47.**  $\frac{8}{3}[(\pi^2+1)^{3/2}-1]$

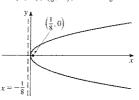
**55.** (b)  $2\pi(2-\sqrt{2})$ 

- **51.** 9,6884
- 53.  $\frac{16}{3}$

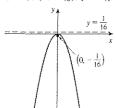


# Exercícios 10.5 🖪

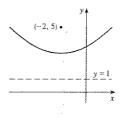
1.  $(0,0), (\frac{1}{8},0), x=-\frac{1}{8}$ 

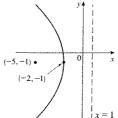


**3.**  $(0,0), (0,-\frac{1}{16}), y=\frac{1}{16}$ 

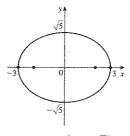


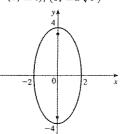
- **5.** (-2, 3), (-2, 5), y = 1
- 7. (-2, -1), (-5, -1), x = 1



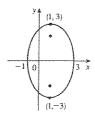


- **9.**  $x = -y^2$ , foco  $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ , diretriz  $x = \frac{1}{4}$
- 11.  $(\pm 3, 0), (\pm 2, 0)$
- 13.  $(0, \pm 4), (0, \pm 2\sqrt{3})$





**15.**  $(1, \pm 3), (1, \pm \sqrt{5})$ 

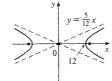


17. 
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$
, focos  $(0, \pm \sqrt{5})$ 

**19.** 
$$(\pm 12, 0)$$
,  $(\pm 13, 0)$ ,

**21.** 
$$(0, \pm 2), (0, \pm 2\sqrt{2}),$$

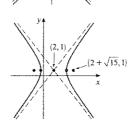
$$y = \pm \frac{5}{12}x$$



21. 
$$(0, \pm 2), (0, \pm 2\sqrt{2}),$$
  
 $y = \pm x$ 



**23.** 
$$(2 \pm \sqrt{6}, 1), (2 \pm \sqrt{15}, 1),$$
  
  $y - 1 = \pm (\sqrt{6}/2)(x - 2)$ 



**25.** Parábola, 
$$(0, -1)$$
,  $(0, -\frac{3}{4})$  **27.** Elipse,  $(\pm\sqrt{2}, 1)$ ,  $(\pm 1, 1)$ 

**29.** Hipérbole, 
$$(0, 1)$$
,  $(0, 3)$ ;  $(0, -1 \pm \sqrt{5})$ 

31. 
$$x^2 = -8y$$
 33.  $y^2 = -12(x+1)$  35

31. 
$$x^2 = -8y$$
 33.  $y^2 = -12(x+1)$  35.  $y^2 = 16x$ 

**37.** 
$$(x^2/25) + (y^2/21) = 1$$
 **39.**  $(x^2/12) + [(y-4)^2/16] = 1$ 

**41.** 
$$[(x-2)^2/9] + [(y-2)^2/5] = 1$$
 **43.**  $y^2 - (x^2/8) = 1$ 

**45.** 
$$[(x-4)^2/4] - [(y-3)^2/5] = 1$$

**47.** 
$$(x^2/9) - (y^2/36) = 1$$

**49.** 
$$(x^2/3,763,600) + (y^2/3,753,196) = 1$$

**51.** (a) 
$$(121x^2/1,500,625) - (121y^2/3,339,375) = 1$$

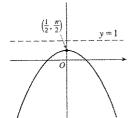
# Exercícios 10.6 a

1. 
$$r = 42/(4 + 7 \sin \theta)$$
 3.  $r = 15/(4 - 3 \cos \theta)$ 

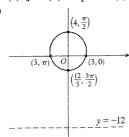
**5.** 
$$r = 8/(1 - \sin \theta)$$
 **7.**  $r = 4/(2 + \cos \theta)$ 

**9.** (a) 1 (b) Parábola (c) y = 1

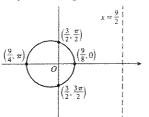




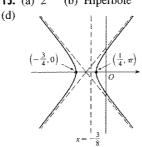
11. (a) 
$$\frac{1}{4}$$
 (b) Elipse (c)  $y = -12$ 



**13.** (a) 
$$\frac{1}{3}$$
 (b) Elipse (c)  $x = \frac{9}{2}$  (d)

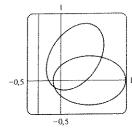


**15.** (a) 2 (b) Hipérbole (c) 
$$x = -\frac{3}{8}$$

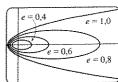


17. (a) 
$$e = \frac{3}{4}$$
, diretriz  $x = -\frac{1}{3}$ 

(b) 
$$r = 1/[4 - 3\cos(\theta - \pi/3)]$$



19. A elipse aproxima-se de um círculo quando e está perto de 0 e torna-se mais alongada quando  $e \rightarrow 1^{-}$ . Em e = 1, a curva torna-se uma parábola.



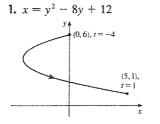
**25.** (b) 
$$r = (1.49 \times 10^8)/(1 - 0.017 \cos \theta)$$
 **27.** 35,64 AU **29.**  $7.0 \times 10^7 \text{ km}$  **31.**  $3.6 \times 10^8 \text{ km}$ 

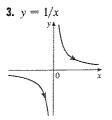
#### Capítulo 10 Revisão 🏻

# Testes Falso-Verdadeiro

9. Verdadeiro 1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro 7. Falso

# Exercícios

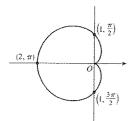


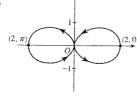


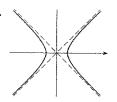
#### A22 CÁLCULO Editora Thomson

**5.** 
$$x = t$$
,  $y = \sqrt{t}$ ,  $t \ge 0$ ;  $x = t^4$ ,  $y = t^2$ ;  $x = tg^2t$ ,  $y = tgt$ ,  $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ 

7.

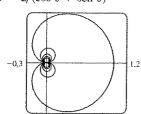








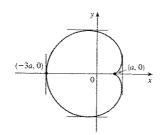
15. 
$$r = 2/(\cos \theta + \sin \theta)$$



- 21. -1
- **23.**  $(\operatorname{sen} t + t \cos t)/(\cos t t \operatorname{sen} t), (t^2 + 2)/(\cos t t \operatorname{sen} t)^3$
- 27. Tangente vertical em

 $(3a/2, \pm \sqrt{3} a/2), (-3a, 0);$ tangente horizontal em

 $(a, 0), (-a/2, \pm 3\sqrt{3} a/2)$ 



33. 
$$(\pi - 1)/2$$

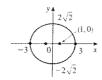
**31.** 
$$(2, \pm \pi/3)$$
 **33.**  $(\pi - 1)/2$  **35.**  $2(5\sqrt{5} - 1)$ 

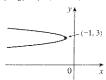
37. 
$$\frac{2\sqrt{\pi^2+1}-\sqrt{4\pi^2+1}}{2\pi}+\ln\left(\frac{2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}}{\pi+\sqrt{\pi^2+1}}\right)$$

- **41.** Todas as curvas têm a assíntota vertical x = 1. Para c < -1, a curva forma um volume protuberante à direita. Em c = -1, a curva é a reta x = 1. Para -1 < c < 0, o volume é à esquerda. Em c = 0 existe uma cúspide em (0, 0). Para c > 0, há um laço.

**43.** 
$$(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$$

**45.** 
$$\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$$

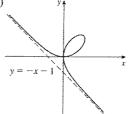




- **47.**  $x^2 = 8(y-4)$
- **49.**  $5x^2 20y^2 = 36$
- **51.**  $(x^2/25) + ((8y 399)^2/160,801) = 1$
- **53.**  $r = 4/(3 + \cos \theta)$
- **55.**  $x = a(\cot \theta + \sin \theta \cos \theta), y = a(1 + \sin^2 \theta)$

# Problemas Quentes a

- **3.**  $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$ 1.  $ln(\pi/2)$
- **5.** (a) Em (0, 0) e  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
- (b) Tangentes horizontais em (0, 0) e  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ; tangentes verticais em (0, 0) e  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$



# Capítulo 11

#### Exercícios 11.1 -

Abreviações: C, convergente; D, divergente

- 1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números. Pode também ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.
- (b) os termos  $a_n$  tendem a 8 quando n torna-se grande.
- (c) os termos  $a_n$  tornam-se grandes quando n torna-se grande.
- **3.** 0,8; 0,96; 0,992; 0,9984; 0,99968 **5.**  $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$
- **7.** 3, 5, 9, 17, 33

- **9.**  $a_n = 1/2^n$  **11.**  $a_n = 5n 3$  **13.**  $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

- 15. D 17. 5 19. 0
- 23. D **25.** 0 **27.** 0
- **29.** 0 **37.** D 39. D

21. 0

- 33. 1 35. 1 **43.**  $\pi/4$ **47.** 0
- **45.** 0 **49.** (a) 1060, 1123,60, 1191,02, 1262,48, 1338,23

**31.** 0

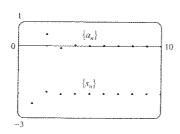
41. D

- 51. -1 < r < 1
- 53. Convergente pelo Teorema da Seqüência Monótona;  $5 \le L < 8$
- **55.** Decrescendo; sim
  - 57. Não-monotônica; sim **63.**  $(3 + \sqrt{5})/2$
- 59. Decrescendo; sim 61. 2 **65.** (b)  $(1 + \sqrt{5})/2$ 

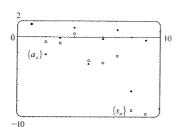
  - **67.** (a) 0 (b) 9, 11

#### Exercícios 11.2 0

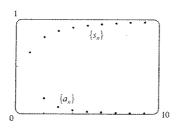
- 1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números, ao passo que uma série é a soma de uma lista de números.
- (b) Uma série é convergente se a sequência de somas parciais for uma sequência convergente. Uma série é divergente se ela não convergir.
- 3. -2,40000, -1,92000-2,01600, -1,99680,-2,00064, -1,99987-2,00003, -1,99999-2,00000, -2,00000Convergente, soma = -2



**5.** 1,55741, -0,62763, -0,77018, 0,38764-2,99287, -3,28388-2,41243, -9,21214-9,66446, -9,01610Divergente



**7.** 0,64645, 0,80755, 0,87500, 0,91056, 0,93196, 0,94601, 0,95581, 0,96296, 0,96838, 0,97259 Convergente, soma = 1



- **9.** (a) C (b) D
- 11. 9 **13.** D **15.** 15
- 17. ½ 19. D 21. D
- 23. 3 25. D **27.**  $\frac{3}{2}$
- **29.** D **31.** D 33.  $\frac{7}{2}$
- 37.  $\frac{1138}{333}$ 39. 41.111/333.000
- **41.** -3 < x < 3; x/(3 x)**43.**  $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ ; 1/(1-4x)
- **45.** todo x;  $\frac{2}{2 \cos x}$ 47.  $\frac{1}{4}$
- **49.**  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 2/[n(n+1)]$  para n > 1, soma = 1
- **51.** (a)  $S_n = D(1 c^n)/(1 c)$  (b) 5
- **53.**  $(\sqrt{3}-1)/2$  **55.** 1/[n(n+1)]
- 57. A série é divergente
- **63.**  $\{s_n\}$  é limitada e crescente.
- **65.** (a)  $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1}$
- **67.** (a)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{23}{24}$ ,  $\frac{119}{120}$ ; [(n+1)!-1]/(n+1)!

#### Exercícios 11.3 □

1. C

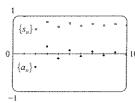
- 3. C 5. D **7.** C 9. D 11. C 17. D 19. C **21.** D **23.** C **25.** p > 1**27.** p < -129. (1,∞)
- **31.** (a) 1,54977, erro  $\leq 0.1$ (b) 1,64522, erro  $\leq 0.005$ (c) n > 1000
- **33.** 2,61 **39.** b < 1/e

#### Exercícios 11.4

- (b) C 1. (a) Nenhum **3.** C **5.** C 9. C 11. D 13. C 15. C 17. D
- 21. D 23. C **25.** D **27.** C **29.** C
- **33.** 0.567975, erro  $\leq 0.0003$ **35.** 0.76352, erro < 0.001

#### Exercícios 11.5 @

- 1. (a) Uma série cujos termos são alternadamente positivo e negativo.
- (b)  $0 < b_{n+1} \le b_n e \lim_{n \to \infty} b_n = 0$ , onde  $b_n = |a_n|$
- (c)  $|R_n| \le b_{n+1}$ **3.** C **5.** C
- **7.** D
- 15. C **19.** D 17. C
- **21.** 1,0000; 0,6464;
- 0,8389; 0,7139; 0,8033;
- 0,7353; 0,7893; 0,7451; 0,7821;
- 0,7505; erro < 0,0275



- **23.** 10 **25.** 7 **27.** 0,9721 **29.** 0,0676
- 31. Uma subestimativa **33.** p não é um inteiro negativo
- **35.**  $\{b_n\}$  não está decrescendo

#### Exercícios 11.6 a

Abreviações: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

- (c) Pode convergir ou divergir 1. (a) D (b) C
- **3.** AC 5. CC 7. D 9. AC 11. AC 13. AC
- 15. AC 17. CC
- 19. AC 21. D 23. AC 25. AC **27.** D 29. D 31. (a) e (d)
- **35.** (a)  $\frac{661}{960} \approx 0.68854$ , erro < 0.00521 (b)  $n \ge 11, 0.693109$

# Exercícios 11.7 a

- l. D 5. C 7. D 9. C 11. C 13. C
- 15. C 17. D 19. C 21. C 23. D 25. C
- 27. C 29. C **31.** D 33. C 35. C

#### Editora Thomson

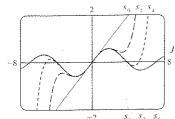
#### Exercícios 11.8 🗆

1. Uma série da forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , onde x é uma variável e a e  $c_n$ 's são constantes.

- **3.** 1, [-1, 1)
- **5.** 1, [-1, 1]
- 7.  $\infty$ ,  $(-\infty, \infty)$
- 11.  $\frac{1}{2}$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- **13.** 4, (-4, 4]
- **17.** 2, (-4, 0]
- 19.  $\infty$ ,  $(-\infty, \infty)$
- **21.** b, (a-b, a+b) **23.**  $0, \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- **25.**  $\frac{1}{4}$ ,  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$
- **27.**  $\infty$ ,  $(-\infty, \infty)$  **29.** (a) Sim (b) Não

- 31.  $k^k$
- **33.** (a)  $(-\infty, \infty)$





**35.** 
$$(-1, 1), f(x) = (1 + 2x)/(1 - x^2)$$

#### Exercícios 11.9 ©

**1.** 10 **3.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$
,  $(-1, 1)$  **5.**  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ ,  $(-1, 1)$ 

**5.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$$
, (=1, 1)

7. 
$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} x^n, (-5, 5)$$

**9.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}, (-3, 3)$$

11. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right] x^{n}, (-1, 1)$$

13. (a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$
,  $R=1$ 

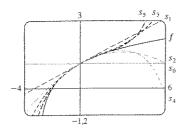
(b) 
$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1)x^n, R = 1$$

(c) 
$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n, R = 1$$

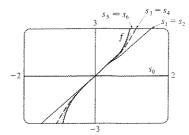
15. 
$$\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, R = 5$$

17. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n-1}} x^n, R=2$$

**19.** 
$$\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^n, R = 3$$



**21.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}, R=1$$



**23.** 
$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$$
;

**23.** 
$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$$
; 1 **25.**  $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{4n^2-1}$ ; 1

- **27.** 0,199989
- **29.** 0,000065 **31.** 0,09531
- **33.** (b) 0,920
- **37.** [-1, 1], [-1, 1], (-1, 1)

### Exercícios 11.10 🏻

1. 
$$b_8 = f^{(8)}(5)/8!$$

3. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = \infty$$

**5.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, R = 1$$
 **7.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n, R = \infty$ 

7. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n, R = \infty$$

9. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = \infty$$

9. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = \infty$$
 11.  $7 + 5(x-2) + (x-2)^2, R = \infty$ 

13. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n, R = \infty$$

**13.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n, R = \infty$$
 **15.**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}, R = \infty$ 

17. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!} (x-9)^n, R = 9$$

**23.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, R = \infty$$

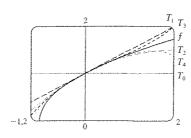
**23.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, R = \infty$$
 **25.**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+2}, R = 1$ 

**27.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+2}, R = \infty$$

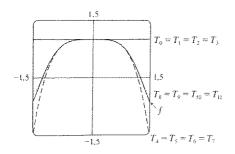
**27.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+2}, R = \infty$$
 **29.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, R = \infty$$

**31.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}, R = \infty$$

**33.** 
$$1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n, R = 1$$



**35.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}, R = \infty$$



**37.** 0,81873

**39.** 
$$C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$$

**41.** 
$$C + x + \frac{x^4}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n! (3n+1)} x^{3n+1}$$

**43.** 0,440 **45.** 0,09998750 **47.** 
$$\frac{1}{3}$$
 **49.**  $\frac{1}{137}$ 

**51.** 
$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$$
 **53.**  $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$  **55.**  $e^{-x^4}$  **57.**  $1/\sqrt{2}$  **59.**  $e^3 - 1$ 

**55.** 
$$e^{-x^4}$$
 **57.**  $1/\sqrt{2}$  **59.**  $e^3 - 1$ 

#### Exercícios 11.11 -

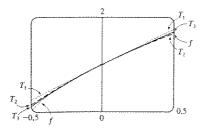
1. 
$$1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n, R = 1$$

3. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n, R = 2$$

**5.** 
$$1-2x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot 7\cdot \cdots \cdot (4n-5)\cdot 2^n}{n!}x^n, R=\frac{1}{8}$$

3. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n, R = 2$$
5. 
$$1 - 2x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5) \cdot 2^n}{n!} x^n, R = \frac{1}{8}$$
7. 
$$\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! 2^{3n+1}} x^{2n+1}, R = 2$$

**9.** 
$$1 + \frac{3}{2}x$$
,  $1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2$ ,  $1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$ 



11. (a) 
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

11. (a) 
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$
  
(b)  $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$ 

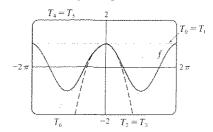
**13.** (a) 
$$1 + \frac{x}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-4)}{3^n n!} x^n$$

**15.** (a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$
 (b) 2

17. (a) 
$$1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}$$

#### Exercícios 11.12 a

1. (a) 
$$T_0(x) = 1 = T_1(x), T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x),$$
  
 $T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x), T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$ 

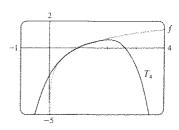


(b)

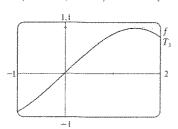
| X               | f      | $T_0 = T_1$ | $T_2=T_3$ | $T_4 = T_5$ | <i>T</i> <sub>6</sub> |
|-----------------|--------|-------------|-----------|-------------|-----------------------|
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,7071 | 1           | 0,6916    | 0,7074      | 0,7071                |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0      | 1           | -0,2337   | 0,0200      | -0,0009               |
| π               | -1     | ł           | -3,9348   | 0,1239      | -1,2114               |

(c) Quando n cresce,  $T_n(x)$  é uma boa aproximação de f(x) sobre um intervalo muito amplo.

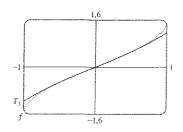
**3.** 
$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$



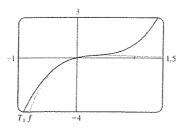
**5.** 
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{4} \left( x - \frac{\pi}{6} \right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left( x - \frac{\pi}{6} \right)^3$$



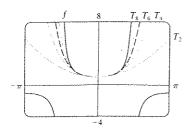
7. 
$$x + \frac{1}{6}x^3$$



9. 
$$x - 2x^2 + 2x^3$$



11. 
$$T_8(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8$$



**13.** (a) 
$$2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$$
 (b)  $1,5625 \times 10^{-5}$ 

**15.** (a) 
$$1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$$
 (b) 0,000097

**17.** (a) 
$$x + \frac{1}{3}x^3$$
 (b) 0,058

**19.** (a) 
$$1 + x^2$$
 (b) 0,00006

**21.** (a) 
$$x^2 - \frac{1}{6}x^4$$
 (b) 0,042

**27.** 
$$-1.037 < x < 1.037$$

**35.** (c) Eles diferem aproximadamente por  $8 \times 10^{-9}$  km.

### Capítulo 11 Revisão

# Testes Falso-Verdadeiro

- 1. Falso 3. Verdadeiro
- 5. Falso 7. Falso
- 11. Verdadeiro 9. Falso
- 13. Verdadeiro 15. Falso 17. Verdadeiro

#### Exercícios

- **5.** 0 **7.**  $e^{12}$  **9.** 2 **11.** C **13.** C 3. D
- 17. C 19. C 21. C 23. CC
- **27.** 8 **29.**  $\pi/4$  **31.**  $e^{-e}$  **35.** 0,9721
- **37.** 0,18976224,  $|\text{erro}| < 6.4 \times 10^{-7}$  **41.** 4, [-6, 2)
- **43.** 0,5, [2,5, 3,5)

**45.** 
$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{(2n)!} \left( x - \frac{\pi}{6} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left( x - \frac{\pi}{6} \right)^{2n+1} \right]$$

**47.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}, R = 1$$

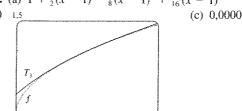
**49.** 
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, R=1$$

**51.** 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}, R = \infty$$

53. 
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{n! 2^{6n+1}} x^n, R = 16$$

**55.** 
$$C + \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$$
  
**57.** (a)  $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$ 

**57.** (a) 
$$1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$



59. 
$$-\frac{1}{2}$$

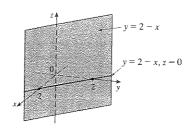
#### Problemas Quentes ©

- 1. 15!/5! = 10.897.286.400
- 3. (b) 0 se x = 0,  $(1/x) \cot x \text{ se } x \neq k\pi$ , k for um inteiro.
- **5.** (a)  $s_n = 3 \cdot 4^n$ ,  $l_n = 1/3^n$ ,  $p_n = 4^n/3^{n-1}$  (c)  $2\sqrt{3}/5$  **9.** (-1, 1),  $(x^3 + 4x^2 + x)/(1 x)^4$  **11.**  $\ln \frac{1}{2}$

### Capítulo 12

#### Exercícios 12.1

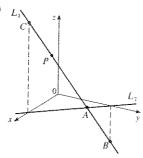
- 1. (4, 0, -3)3. Q; R
- 5. Um plano vertical que intercecta o plano na reta y = 2 - x, z = 0(veja o gráfico à direita)



9. (a) sim (b) não

- 11.  $(x-1)^2 + (y+4)^4 + (z-3)^2 = 25$ ;  $(x-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ , y = 0 (uma circunferência)
- **13.**  $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 30$ **15.** (3, -2, 1), 5 **17.**  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \sqrt{3}/2$ **19.** (b)  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{94}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{85}$
- **21.** (a)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$
- (b)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$ (c)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 9$
- 23. Um plano paralelo ao plano xz-unidades à frente dele.
- **25.** Uma metade do espaço consistindo em todos os pontos x = 3.
- 27. Todos os pontos sobre e entre os planos horizontais z = 0 e z = 6.
- 29. Todos os pontos fora da esfera com raio 1 e centro O.

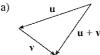
- **31.** Todos os pontos de dentro da esfera com raio 2 e centro (0, 0, 1).
- 33. Todos os pontos sobre e dentro do cilíndro circular de raio 3 tendo por eixo o eixo y.
- **37.**  $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ **35.** y < 0
- **39.** (a) (2, 1, 4) (b)  $L_1$

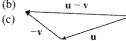


**41.** 14x - 6y - 10z = 9, um plano perpendicular a AB

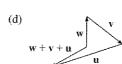
#### Exercícios 12.2 0

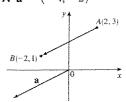
- 1. (a) Escalar (b) Vetor (c) Vetor (d) Escalar
- **3.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$ ,  $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$
- 5. (a)

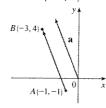




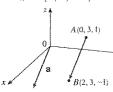




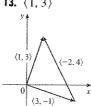




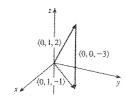
11.  $a = \langle 2, 0, -2 \rangle$ 



**13.** (1, 3)

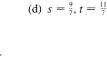


**15.** (0, 1, -1)



- 17. 5, (2,5), (-10,1), (-8,6), (12,17)
- **19.** 7,  $\langle 5, 7, 1 \rangle$ ,  $\langle 7, -3, 5 \rangle$ ,  $\langle 12, 4, 6 \rangle$ ,  $\langle 14, 26, 1 \rangle$
- 21.  $\sqrt{6}$ ,  $\mathbf{i} \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{i} 3\mathbf{j} \mathbf{k}$ ,  $2\mathbf{i} 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $3\mathbf{i} 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$

- **25.**  $\frac{8}{9}i \frac{1}{9}j + \frac{4}{9}k$ **27.**  $(2, 2\sqrt{3})$ **23.**  $\langle 9/\sqrt{106}, -5/\sqrt{106} \rangle$
- **29.**  $\mathbf{F} = (6\sqrt{3} 5\sqrt{2})\mathbf{i} + (6 + 5\sqrt{2})\mathbf{j} \approx 3{,}32\mathbf{i} + 13{,}07\mathbf{j},$
- $|\mathbf{F}| \approx 13.5 \, \text{lb}, \, \theta \approx 76^{\circ}$
- **31.**  $\sqrt{493} \approx 22.2 \text{ mi/h}, \text{N8}^{\circ}\text{W}$
- **33.**  $T_1 \approx -196 \, \mathbf{i} + 3{,}92 \, \mathbf{j}, T_2 \approx 196 \, \mathbf{i} + 3{,}92 \, \mathbf{j}$  **35.** 0
- **37.** (a), (b)



**39.** Uma esfera com raio 1, centrado em  $(x_0, y_0, z_0)$ 

### Exercícios 12.3

- 1. (b), (c), (d) são significativos **3.** 6 **5.** −5
- **7.** 32 **9.**  $90\sqrt{3}$ 11.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{2}$
- **15.**  $\cos^{-1}(\frac{63}{65}) \approx 14^{\circ}$  **17.**  $\cos^{-1}(1/\sqrt{238}) \approx 86^{\circ}$
- 19.  $\cos^{-1}(-1/(2\sqrt{7})) \approx 101^{\circ}$ 21. 45°, 45°, 90°
- **23.** (a) Nenhum (b) Ortogonal (c) Ortogonal (d) Paralelo
- **25.** Sim **27.**  $(\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k})/\sqrt{3} \left[ \text{ou} (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3} \right]$
- $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ ,  $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 65°, 56°, 45°
- **31.**  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{7}$ ,  $-\frac{6}{7}$ ; 73°, 65°, 149°
- **33.**  $1/\sqrt{3}$ ,  $1/\sqrt{3}$ ,  $1/\sqrt{3}$ ; 55°, 55°, 55° **35.** 3,  $\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$
- **37.**  $3/\sqrt{5}$ ,  $\binom{6}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ , 0
- **39.**  $1/\sqrt{2}$ ,  $(\mathbf{i} + \mathbf{k})/2$
- **43.**  $(0, 0, -2\sqrt{10})$  ou qualquer vetor da forma
- $\langle s, t, 3s 2\sqrt{10} \rangle, s, t \in \mathbb{R}$
- **45.** 38 J **47.** 250 cos  $20^{\circ} \approx 235$  pés-lb
- **51.**  $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55^{\circ}$ .

#### Exercícios 12.4

- 1. 2i j + 3k3. 3i - 4j + 2k
- **5.**  $2\mathbf{i} + 13\mathbf{j} 8\mathbf{k}$  **7.**  $t^4\mathbf{i} 2t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
- 9. (a) Escalar (b) Sem sentido (c) Vetor
- (d) Sem sentido (e) Sem sentido (f) Escalar
- 11. 24; dentro da página
- **13.**  $\langle 5, -3, 1 \rangle, \langle -5, 3, -1 \rangle$
- **15.**  $\langle -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6} \rangle, \langle 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6} \rangle$
- **23.** 16 **25.** (a)  $\langle 6, 3, 2 \rangle$  (b)  $\frac{7}{2}$
- **27.** (a)  $\langle 13, 14, 5 \rangle$  (b)  $\frac{1}{2}\sqrt{390}$
- **29.** 82 35.  $10.8 \text{ sen } 80^{\circ} \approx 10.6 \text{ J}$
- 37.  $\approx 417 \text{ N}$ **39.** (b)  $\sqrt{97/3}$
- 45. (a) Não (b) Não (c) Sim

#### Exercícios 12.5

- 1. (a) Verdadeiro (b) Falso (c) Verdadeiro (d) Falso (e) Falso
- (f) Verdadeiro (g) Falso (h) Verdadeiro (i) Verdadeiro
- (j) Falso (k) Verdadeiro
- 3.  $\mathbf{r} = (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} + \mathbf{j} 8\mathbf{k});$
- x = -2 + 3t, y = 4 + t, z = 10 8t

**5.** 
$$\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{i} + \mathbf{k}); x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$$

**5.** 
$$\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}); x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$$
**7.**  $x = 1 - 5t, y = 3, z = 2 - 2t; \frac{x - 1}{-5} = \frac{z - 2}{-2}, y = 3$ 

**9.** 
$$x = 2 + 2t$$
,  $y = 1 + \frac{1}{2}t$ ,  $z = -3 - 4t$ ;

$$(x-2)/2 = 2y - 2 = (z+3)/(-4)$$

11. 
$$x = 1 + t$$
,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 1 + t$ ;

$$x - 1 = (y + 1)/2 = z - 1$$

**15.** (a) 
$$x/2 = (y-2)/3 = (z+1)/(-7)$$

(b) 
$$\left(-\frac{2}{7}, \frac{11}{7}, 0\right), \left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{11}{3}\right), (0, 2, -1)$$

17. 
$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + t(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}), 0 \le t \le 1$$

19. Paralela 21. Reversa 23. 
$$-2x + y + 5z = 1$$

**25.** 
$$x + y - z = -1$$
 **27.**  $2x - y + 3z = 0$  **29.**  $3x - 7z = -9$ 

**31.** 
$$x + y + z = 2$$
 **33.**  $-13x + 17y + 7z = -42$ 

**35.** 
$$33x + 10y + 4z = 190$$
 **37.**  $x - 2y + 4z = -1$ 

**45.** Perpendicular **47.** Nenhum dos dois, 
$$\approx 70.5^{\circ}$$

**51.** (a) 
$$x - 2 = y/(-8) = z/(-7)$$

(b) 
$$\cos^{-1}(-\sqrt{6}/5) \approx 119^{\circ} \text{ (ou } 61^{\circ})$$

**53.** 
$$x = 6t, y = -\frac{1}{6} + t, z = -\frac{1}{6} + 7t$$
 **55.**  $x = -\frac{1}{6} + 7t$ 

**57.** 
$$(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$$

**59.** 
$$x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t$$

**61.** 
$$P_1$$
 e  $P_3$  são paralelos,  $P_2$  e  $P_4$  são idênticos

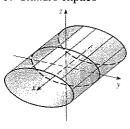
**63.** 
$$\sqrt{22/5}$$

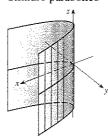
**65.** 
$$\frac{25}{3}$$

**67.** 
$$7\sqrt{6}/18$$

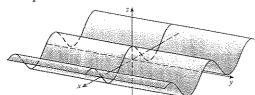
# Exercícios 12.6

#### 1. (a) Parábola





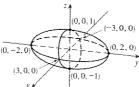
7. Superfície cilíndrica



**9.** (a) 
$$x = k$$
,  $y^2 - z^2 = 1 - k^2$ , hipérbole  $(k \neq \pm 1)$ ;  $y = k$ ,  $x^2 - z^2 = 1 - k^2$ , hipérbole  $(k \neq \pm 1)$ ;

$$z = k$$
,  $x^2 + z^2 = 1 + k^2$ , circunferência

11. 
$$x = k$$
,  $y^2 + 4z^2 = 4 - 4k^2/9$ , elipse ( $|k| < 3$ )  $y = k$ ,  $x^2 + 9z^2 = 9 - 9k^2/4$ , elipse ( $|k| < 2$ )  $z = k$ ,  $4x^2 + 9y^2 = 36(1 - k^2)$ , elipse ( $|k| < 1$ ) Elipsóide



13. 
$$x = k$$
,  $y^2 - z^2 = k^2$ , hipérbole  $(k \ne 0)$   
 $y = k$ ,  $x^2 + z^2 = k^2$ , circunferência  $(k \ne 0)$   
 $z = k$ ,  $y^2 - x^2 = k^2$ ,  
hipérbole  $(k \ne 0)$ 

$$x = 0$$
,  $y = \pm z$ , retas  
 $z = 0$ ,  $y = \pm x$ , retas

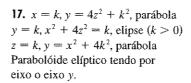
**15.** x = k,  $4y^2 - z^2 = 4 + k^2$ , hipérbole

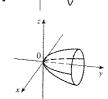
hipérbole Hiperbolóide de duas folhas

y = k,  $x^2 + z^2 = 4k^2 - 4$ ,

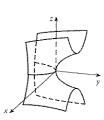
z = k,  $4y^2 - x^2 = 4 + k^2$ ,

circunferência (|k| > 1)





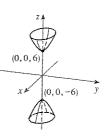
19.  $x = k, y = z^2 - k^2$ , parábola y = k,  $z^2 - x^2 = k$ , hipérbole  $(k \neq 0)$ z = k,  $y = k^2 - x^2$ , parábola Parabolóide hiperbólico



21. VII 23. II 25. VI 27. VIII

**29.** 
$$-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$$

Hiperbolóide de duas folhas tendo por eixo o eixo z.

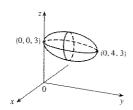




Parabolóide elíptico com vértice (0, 0, 0) tendo por eixo o eixo x.

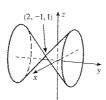
**33.** 
$$x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} + (z-3)^2 = 1$$

Elipsóide com centro (0, 2, 3)

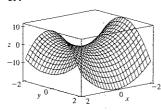


35.

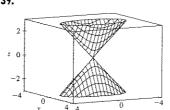
$$(y + 1)^2 = (x - 2)^2 + (z - 1)^2$$
  
Cone circular com vértice  $(2, -1, 1)$   
e eixo paralelo ao eixo y.



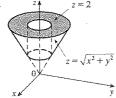
37.



39.

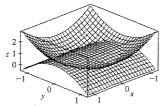


41.



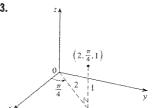
**45.** 
$$-4x = y^2 + z^2$$
, parabolóide

49.

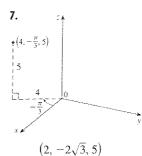


Exercícios 12.7

1. Veja a Seção 839-40.



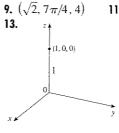
 $\frac{1}{4}$  (3, 0, -6)



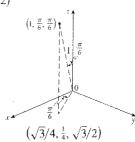
 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ 

(3, 0, -6)

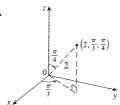
11.  $(2, 4\pi/3, 2)$ 



(0, 0, 1)



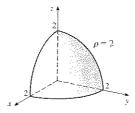
17.



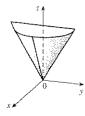
 $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2})$ 

- **21.**  $(\sqrt{2}, 3\pi/2, 3\pi/4)$ **25.**  $(2, \pi/2, 2\pi/3)$ **19.**  $(4, \pi/3, \pi/6)$
- **23.**  $(2, \pi/6, \pi/6)$
- **29.**  $(8, \pi/6, 0)$ **27.** (0, 0, 2)
- 31. Cilindro circular, raio 3, tendo por eixo o eixo z
- 33. Eixo z- positivo
- 35. Metade do cone 37. Parabolóide circular
- 39. Plano horizontal
- 41. Cilindro circular, raio 1, eixo paralelo ao eixo z
- 43. Esfera, raio 5, centro na origem
- 45. Cilindro circular, raio 2, tendo por eixo o eixo y
- 47. Cilindro, raio 1, junto com o eixo z
- **49.** (a)  $z = r^2$  (b)  $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$
- **51.** (a)  $r = 3 \sec \theta$  (b)  $\rho \sec \phi \cos \theta = 3$
- **53.** (a)  $2z^2 = r^2 \cos 2\theta 4$
- (b)  $\rho^2 (\sin^2 \phi \cos 2\theta 2 \cos^2 \phi) = 4$  **55.** (a)  $r = 2 \sin \theta$  (b)  $\rho \sin \phi = 2 \sin \theta$

59.



61.



63. Coordenadas cilíndricas:  $6 \le r \le 7, 0 \le \theta \le 2\pi$ ,

$$0 \le z \le 20$$

**65.** 
$$0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le \cos \phi$$



# Capítulo 12 Revisão a

#### Testes Falso-Verdadeiro

- 1. Verdadeiro
- 3. Verdadeiro
- 5. Verdadeiro
- 7. Verdadeiro
- 9. Verdadeiro 11. Falso 13. Falso

Exercícios

1. (a) 
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

(b) 
$$(-2, -3, 5), 6$$

**3.** 
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$$
;  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$ ; for da página  
**5.** -2, -4 **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

3. 
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$$
;  $|\mathbf{u}|$ 

$$(b) -2 (c) -2 (d)$$

9. 
$$\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 71^{\circ}$$
  
13. 166 N, 114 N

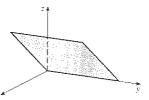
11. (a) 
$$\langle 4, -3, 4 \rangle$$
 (b)  $\sqrt{41/2}$ 

**15.** 
$$x = 4 - 3t$$
,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 2 + 3t$ 

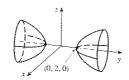
17. 
$$x = -2 + 2t$$
,  $y = 2 - t$ ,  $z = 4 + 5t$ 

**19.** 
$$-4x + 3y + z = -14$$

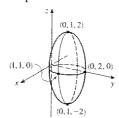
**25.** 
$$22/\sqrt{26}$$



31. Hiperbolóide de duas folhas



33. Elipsóide



**35.** 
$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

**37.** 
$$(\sqrt{3}, 3, 2), (4, \pi/3, \pi/3)$$

**39.** 
$$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3}), (4, \pi/4, 4\sqrt{3})$$

**41.** Um semiplano **43.** O plano horizontal 
$$z = 3$$

**45.** 
$$r^2 + z^2 = 4$$
,  $\rho = 2$  **47.**  $z = 4r^2$ 

#### Problemas Quentes ©

1. 
$$(\sqrt{3}-1.5)$$
 m

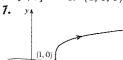
3. (a) 
$$(x+1)/(-2c) = (y-c)/(c^2-1) = (z-c)/(c^2+1)$$

(b) 
$$x^2 + y^2 = t^2 + 1, z = t$$
 (c)  $4\pi/3$ 

(c) 
$$4\pi/3$$

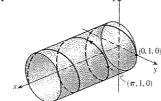
# Capítulo 13

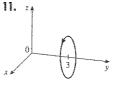
# Exercícios 13.1 o



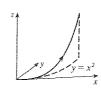
3.  $\langle 1, 0, 0 \rangle$ 

5. 
$$2i + \frac{1}{2}j + (tg 1)k$$





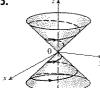
13.



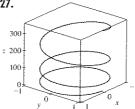
**15.** 
$$\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle, 0 \le t \le 1;$$
  
  $x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \le t \le 1$ 

17.  $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2 \rangle, 0 \le t \le 1;$  $x = 3t + 1, y = 2t - 1, z = 5t + 2, 0 \le t \le 1$ 19. VI 21. IV 23. V

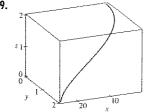
25.



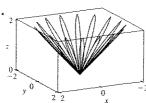
27.



29.



31.



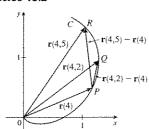
**35.**  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1) \mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1) \mathbf{k}$ 

37.  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 4 \cos^2 t$ 

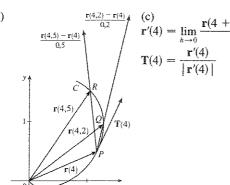
39. sim

# Exercícios 13.2 a

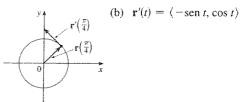
1. (a)



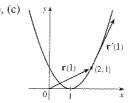
(b), (d)



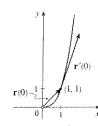
**3.** (a), (c)



**5.** (a), (c)



7. (a), (c)



(b)  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$ 

(b) 
$$\mathbf{r}'(t) = e^t \mathbf{i} + 3e^{3t} \mathbf{j}$$

**9.**  $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, -1, 1/(2\sqrt{t}) \rangle$  **11.**  $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\mathbf{k}$ 

11. 
$$\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t} \mathbf{k}$$

**13.**  $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\mathbf{k}$  **15.**  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ 

**k** 15. 
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2$$

17.  $\langle 15/\sqrt{262}, 6/\sqrt{262}, 1/\sqrt{262} \rangle$ 

19. 
$$\frac{3}{5}$$
 j +  $\frac{4}{5}$  k

**21.**  $\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ ,  $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14} \rangle$ ,  $\langle 0, 2, 6t \rangle$ ,  $\langle 6t^2, -6t, 2 \rangle$ 

**23.** x = 1 + 5t, y = 1 + 4t, z = 1 + 3t

**25.** x = 1 - t, y = t, z = 1 - t

**27.**  $x = \frac{1}{4}\pi + t, y = 1 - t, z = 1 + t$ 

29. (a) Não suave (b) Suave (c) Não suave

31.  $66^{\circ}$  33.  $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 35. i + j + k

**37.**  $e^t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + (t \ln t - t) \mathbf{k} + \mathbf{C}$ 

**39.**  $\frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + (t^4 + 1)\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ 

**45.**  $1 - 4t \cos t + 11t^2 \sin t + 3t^3 \cos t$ 

# Exercícios 13.3 🗆

1.  $20\sqrt{29}$ 

$$e - e^{-1}$$

**3.**  $e = e^{-1}$  **5.**  $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$  **7.** 9,5706

**9.** 
$$\mathbf{r}(t(s)) = \frac{2}{\sqrt{29}}s\mathbf{i} + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \frac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$$

11.  $\mathbf{r}(t(s)) = 3 \operatorname{sen}(s/5)\mathbf{i} + (4s/5)\mathbf{j} + 3 \cos(s/5)\mathbf{k}$ 

**13.** (a)  $\langle (2/\sqrt{29}) \cos t, 5/\sqrt{29}, (-2/\sqrt{29}) \sin t \rangle$ ,  $\langle -\text{sen } t, 0, -\cos t \rangle$ 

(b)  $\frac{2}{29}$ 

**15.** (a) 
$$\frac{1}{e^{2t}+1} \langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1 \rangle, \frac{1}{e^{2t}+1} \langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t \rangle$$

(b)  $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t}+1)^2$ 

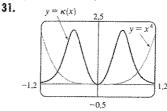
17.  $2/(4t^2+1)^{3/2}$  19.  $\frac{4}{25}$ 

21.  $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$ 

**23.**  $6|x|/(1+9x^4)^{3/2}$  **25.**  $15\sqrt{x}/(1+100x^3)^{3/2}$ 

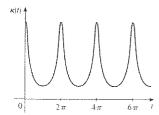
**27.**  $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, 1/\sqrt{2}\right)$ ; tende a 0

**29.** (a) P (b) 1,3,0,7



**33.** 
$$a \notin y = f(x), b \notin y = \kappa(x)$$

**35.** 
$$\kappa(t) = \frac{6\sqrt{4}\cos^2 t - 12\cos t + 13}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$$

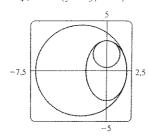


múltiplos inteiros de  $2\pi$ 

**37.** 
$$1/(\sqrt{2}e')$$
 **39.**  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 

**41.** 
$$y = 6x + \pi, x + 6y = 6\pi$$

**43.** 
$$(x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{81}{4}, x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$



**45.** 
$$(-1, -3, 1)$$
 **53.**  $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ 

**55.** 
$$2.07 \times 10^{10} \,\text{Å} \approx 2 \,\text{m}$$

### Exercícios 13.2

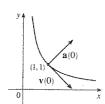
1. (a) 
$$1.8\mathbf{i} - 3.8\mathbf{j} - 0.7\mathbf{k}$$
,  $2.0\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$ ,  $2.8\mathbf{i} + 1.8\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}$ ,  $2.8\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}$ 

(b) 
$$2.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}, 2.58$$

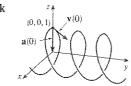
**3.** 
$$\mathbf{v}(t) = \langle 2t, 1 \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \langle 2, 0 \rangle$$
$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$$

**5.** 
$$\mathbf{v}(t) = e^{t} \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}$$
  
 $\mathbf{a}(t) = e^{t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$   
 $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$ 



7. 
$$\mathbf{v}(t) = \cos t \,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \sin t \,\mathbf{k}$$
  
 $\mathbf{a}(t) = -\sin t \,\mathbf{i} - \cos t \,\mathbf{k}$   
 $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2}$ 



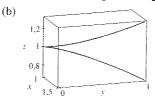
**9.** 
$$\langle 2t, 3t^2, 2t \rangle$$
,  $\langle 2, 6t, 2 \rangle$ ,  $|t| \sqrt{9t^2 + 8}$ 

11. 
$$\sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}, e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, e^t + e^{-t}$$

13. 
$$e'[(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}],$$
  
 $e'[-2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}], e'\sqrt{t^2 + 2t + 3}$ 

**15.** 
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + t \, \mathbf{k}, \, \mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{i} - t \, \mathbf{j} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{k}$$

17. (a) 
$$\mathbf{r}(t) = (1 + \frac{1}{2}t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (1 + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$$

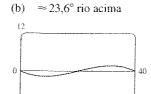


19. 
$$t = 4$$

**21.** 
$$\mathbf{r}(t) = t \, \mathbf{i} - t \, \mathbf{j} + \frac{5}{2} t^2 \, \mathbf{k}, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$$

**23.** (a) 
$$\approx 22 \text{ km}$$
 (b)  $\approx 3.2 \text{ km}$  (c)  $500 \text{ m/s}$ 

**27.** 
$$\approx 10.2^{\circ}, \approx 79.8^{\circ}$$



**31.** 6*t*, 6 **33.** 0, 1 **35.** 
$$e' - e^{-t}$$
,  $\sqrt{2}$  **37.** 4,5 cm/s<sup>2</sup>, 9,0 cm/s<sup>2</sup> **39.**  $t = 1$ 

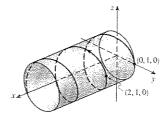
# Capítulo 13 Revisão

# Testes Falso-Verdadeiro

- 1. Verdadeiro 3. Falso 5.
  - 5. Falso
- 7. Falso 9. Verdadeiro

#### Exercícios

1. (a)



(b) 
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \sin \pi t \,\mathbf{j} + \pi \cos \pi t \,\mathbf{k}$$
,

$$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t \,\mathbf{j} - \pi^2 \sin \pi t \,\mathbf{k}$$

3. 
$$\rho(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + (5 - 4 \cos t) \mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$$

5. 
$$\frac{1}{3}$$
**i** -  $(2/\pi^2)$ **j** +  $(2/\pi)$ **k** 7. 15,9241

11. (a) 
$$\langle t^2, t, 1 \rangle / \sqrt{t^4 + t^2 + 1}$$

(b) 
$$\langle 2t, 1-t^4, -2t^3-t \rangle / \sqrt{t^8+4t^6+2t^4+5t^2}$$

(c) 
$$\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}/(t^4 + t^2 + 1)^2$$

13. 
$$12/17^{3/2}$$
 15.  $x - 2y + 2\pi = 0$   
17.  $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k},$   $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2 \ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}, \mathbf{a}(t) = (1/t)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}$ 

19. (a) Em torno de 3,8 pés acima do solo, 60,8 pés a partir do atleta (b) ≈21,4 pés (c) ≈64,2 pés do atleta

**21.** (c)  $-2e^{-t}\mathbf{v}_d + e^{-t}\mathbf{R}$ 

#### Problemas Quentes =

1. (a)  $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen} \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j})$  (c)  $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$ 2. (a)  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{C$ 

**3.** (a) 90°,  $v_0^2/(2g)$  **5.** (b)  $\mathbf{R}(t) = (m/k)(1 - e^{-kt/m})\mathbf{v}_0 + (gm/k)[(m/k)(1 - e^{-kt/m}) - t]\mathbf{j}$ 

7. (a)  $\approx 0.94$  pés à direita do eixo da mesa,  $\approx 15$  pés/s

(b)  $\approx 7.6^{\circ}$  (c)  $\approx 2.13$  pés à direita da aresta da mesa.

# Capítulo 14

#### Exercícios 14.1

1. (a) -27; uma temperatura de  $-15^{\circ}$ C com um vento soprando a 40 km/h nos faz sentir o equivalente a  $-27^{\circ}$ C sem vento.

(b) Quando a temperatura  $é -20^{\circ}$ C, qual velocidade do vento fornece um vento frio de  $-30^{\circ}$ C? 20 km/h.

(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura fornece um vento frio de  $-49^{\circ}$ C?  $-35^{\circ}$ C.

(d) Uma função da velocidade do vento que fornece valores de vento frio quando a temperatura é  $-5^{\circ}$ C.

(e) Uma função da temperatura que fornece valores de vento frio quando a velocidade do vento é 50 km/h.

3. Sim.

**5.** (a) 25; um vento de 40 nós sopra no oceano por 15 horas criando ondas de cerca de 25 pés de altura.

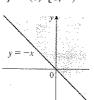
(b) f(30, t) é uma função de t dando a altura de ondas produzidas por ventos de 30 nós que sopram por t horas.

(c) f(v, 30) é uma função de v dando a altura de ondas produzidas por ventos de velocidade v que sopram por 30 horas.

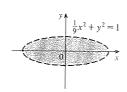
**7.** (a) 4 (b)  $\mathbb{R}^2$  (c)  $[0, \infty)$ 

**9.** (a) e (b)  $\{(x, y, z) | z \ge x^2 + y^2\}$  (c)  $[1, \infty]$ 

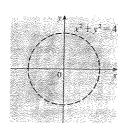
11.  $\{(x, y) \mid y \ge -x\}$ 



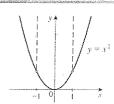
**13.**  $\{(x,y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$ 



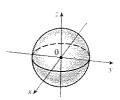
15.  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 4\}$ 



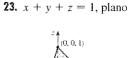
17.  $\{(x, y) | y \ge x^2, x \ne \pm 1\}$ 



**19.**  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ 

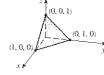


**21.** z = 3, Plano horizontal

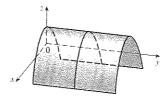


NA S

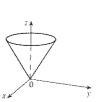
**25.**  $z = 1 - x^2$  cilindro parabolóide



**27.**  $z = 4x^2 + y^2 + 1$  parabolóide elíptico

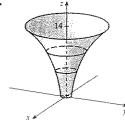


29.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , topo da metade do cone

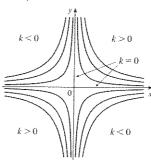


31. ≈56, ≈35 33. Íngreme; aproximadamente plana.

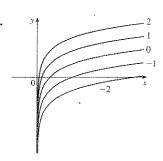




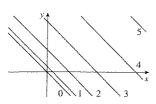
$$37. xy = k$$



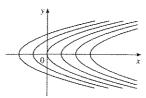
39.



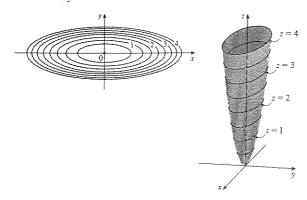
**41.** 
$$\sqrt{x + y} = k$$



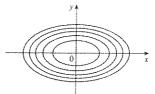
**43.** 
$$x = y^2 + k$$

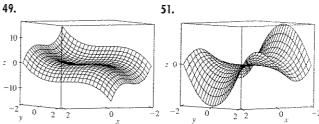


**45.** 
$$x^2 + 9y^2 = k$$



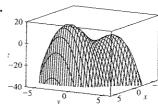
47.





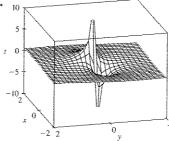
- **53.** (a) B (b) III
- **55.** (a) F (b) V
- **57.** (a) D (b) IV
- 59. Famílias de planos paralelos.
- 61. Famílias de hiperbolóides de uma ou duas folhas com o eixo y.
- 63. (a) Deslocando para cima o gráfico da f 2 unidades.
- (b) Estica verticalmente o gráfico da f por um fator de 2.
- (c) Reflete o gráfico da f pelo plano xy.
- (d) Reflete o gráfico da f pelo plano xy e depois desloca-o 2 unidades para cima.

65.



f parece ter um valor mínimo de cerca de 15. Há 2 pontos máximos locais, mas nenhum ponto mínimo local.

67.



Os valores da função tendem a 0 quando x, y torna-se grande; quando (x,y)tende à origem, f aproxima-se de  $\pm \infty$  ou 0, dependendo da direção de aproximação.

**69.** Se c=0, o gráfico é uma superfície cilíndrica. Para c>0, as curvas de nível são elipses. O gráfico das curvas ascende quando deixamos a origem e o grau de inclinação cresce quando c cresce. Para c<0, as curvas de nível são hipérboles. O gráfico das curvas ascende na direção

y e descende, aproximam-se do plano xy na direção x, dando uma aparência da forma sela próximo de (0, 0, 1).

**71.** (b) 
$$y = 0.75x + 0.01$$

#### Exercícios 14.2 a

**1.** Nenhum; se f for contínua, f(3, 1) = 6. **3.**  $-\frac{5}{2}$ 

**5.** 2025. **7.** Não existe. **9.** Não existe.

11. 0. 13. Não existe. 15. 2. 17. 1.

19. Não existe.

**21.** O gráfico mostra que a função aproxima-se de números diferentes ao longo de retas diferentes.

**23.**  $h(x, y) = 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 24x - 36y + 36 + \sqrt{2x + 3y - 6}$ ;  $\{(x, y) \mid 2x + 3y \ge 6\}$ 

**25.** Ao longo da reta y = x

**27.**  $\{(x, y) \mid y \neq \pm e^{x/2}\}$  **29.**  $\{(x, y) \mid y \ge 0\}$ 

**31.**  $\{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$  **33.**  $\{(x, y, z) | y \ge 0, y \ne \sqrt{x^2 + z^2}\}$ 

**35.**  $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  **37.** 0 **39.** 0

#### Exercícios 14.3

1. (a) A taxa da variação da temperatura quando varia a longitude, com latitude e tempo fixados; a taxa de variação quando varia apenas a latítude; a taxa de mudança quando varia apenas o tempo.

(b) Positivo, negativo, positivo.

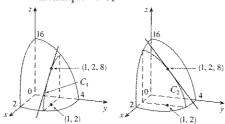
3. (a)  $f_7(-15, 30) \approx 1.3$ ; para uma temperatura de  $-15^{\circ}$ C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice do resfriamento da superfície realizado pelo vento aumenta  $1.3^{\circ}$ C para cada aumento de grau da temperatura.  $f_v(-15, 30) \approx -0.15$ ; para uma temperatura de  $-15^{\circ}$ C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice do resfriamento da superfície realizado pelo vento decresce

-0,15°C para cada aumento em km/h da velocidade do vento.

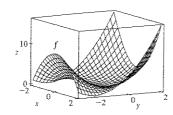
(b) Positivo, negativo. (c) 0

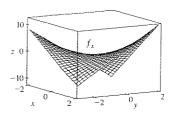
5. (a) Positivo. (b) Negativo

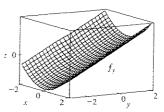
**7.**  $c = f, b = f_x, a = f_y$  **9.**  $f_x(1, 2) = -8 = \text{inclinação de } C_1, f_y(1, 2) = -4 = \text{inclinação de } C_2$ 



11.  $f_x = 2x + 2xy$ ,  $f_y = 2y + x^2$ 







**13.**  $f_x(x, y) = 3$ ,  $f_y(x, y) = -8y^3$ 

**15.**  $\partial z/\partial x = e^{3y}$ ,  $\partial z/\partial y = 3xe^{3y}$ 

17.  $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2$ ,  $f_y(x, y) = -2x/(x + y)^2$ 

19.  $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta$ ,  $\partial w/\partial \beta = -\sin \alpha \sin \beta$ 

**21.**  $f_r(r,s) = \frac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2), f_s(r,s) = \frac{2rs}{r^2 + s^2}$ 

**23.**  $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t), \, \partial u/\partial w = e^{w/t}$ 

**25.**  $f_x = y^2 z^3$ ,  $f_y = 2xyz^3 + 3z$ ,  $f_z = 3xy^2 z^2 + 3y$ 

**27.**  $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z)$ ,  $\partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z)$ ,  $\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$ 

**29.**  $\partial u/\partial x = e^{-t} \sin \theta$ ,  $\partial u/\partial t = -xe^{-t} \sin \theta$ ,  $\partial u/\partial \theta = xe^{-t} \cos \theta$ 

35.

37.  $-\frac{1}{2}$ 

**31.**  $f_x = yz^2 \operatorname{tg}(yt)$ ,  $f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \operatorname{tg}(yt)$ ,  $f_z = 2xyz \operatorname{tg}(yt)$ ,  $f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$ 

**33.**  $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 

**39.**  $f_x(x, y) = 2x - y$ ,  $f_y(x, y) = 4y - x$ 

**41.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$ 

**43.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + y^2 z^2}{1 + y + y^2 z^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{1 + y + y^2 z^2}$ 

**45.** (a) f'(x), g'(y) (b) f'(x + y), f'(x + y)

**47.**  $f_{xx} = 12x^2 - 6y^3$ ,  $f_{xy} = -18xy^2 = f_{yx}$ ,  $f_{yy} = -18x^2y$ 

**49.**  $z_{xx} = -2y/(x+y)^3$ ,  $z_{xy} = (x-y)/(x+y)^3 = z_{yx}$ ,  $z_{yy} = 2x/(x+y)^3$ 

**51.**  $u_{ss} = e^{-s} \operatorname{sen} t$ ,  $u_{st} = -e^{-s} \operatorname{cos} t = u_{ts}$ ,  $u_{tt} = -e^{-s} \operatorname{sen} t$ 

**57.** 12xy, 72xy

**59.**  $24 \sin(4x + 3y + 2z)$ ,  $12 \sin(4x + 3y + 2z)$ 

**61.**  $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \operatorname{cos} \theta + r\theta \operatorname{sen} \theta)$ 

**63.**  $4/(y+2z)^3$ , 0 **65.**  $\approx 12.2, \approx 16.8, \approx 23.25$  **77.**  $R^2/R_1^2$ 

**83.** Não **85.** x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t **89.** 

91. (a)

2.0

-0,2

-1

y 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

1

0 0

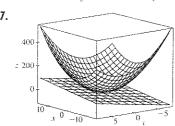
0

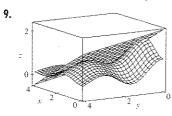
(b) 
$$f_x(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$
,  $f_y(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ 

(e) Não, uma vez que  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  não são contínuas

#### Exercícios 14.4

1. 
$$z = -8x - 2y$$
 3.  $x - 2y + z = 4$  5.  $z = y$ 





**11.** 
$$2x + \frac{1}{4}y - 1$$
 **13.**  $x + 1$  **15.**  $\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$ 

**17.** 
$$-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$$
; 2,846 **19.**  $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$ ; 6,9914

**21.** 
$$4T + H - 329$$
;  $129$ °F

**23.** 
$$dz = 3x^2 \ln(y^2) dx + (2x^3/y) dy$$

**25.** 
$$du = e^t \sin \theta dt + e^t \cos \theta d\theta$$

**27.** 
$$dw = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(x dx + y dy + z dz)$$

**29.** 
$$\Delta z = 0.9225$$
,  $dz = 0.9$  **31.**  $5.4 \text{ cm}^2$  **33.**  $16 \text{ cm}^3$ 

**35.** 150 **37.** 
$$\frac{1}{17} \approx 0.059 \Omega$$
 **39.**  $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$ 

# Exercícios 14.5

1. 
$$4(2xy + y^2)t^3 - 3(x^2 + 2xy)t^2$$

3. 
$$\pi \cos x \cos y - (\sin x \sin y)/(2\sqrt{t})$$

5. 
$$e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$$

7. 
$$\partial z/\partial s = 2x + y + xt + 2yt$$
,  $\partial z/\partial t = 2x + y + xs + 2ys$ 

**9.** 
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{4st + \ln t}{1 + (2x + y)^2}, \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2s^2 + s/t}{1 + (2x + y)^2}$$

11. 
$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} = e^r \left( t \cos \theta - \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \theta \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^r \left( s \cos \theta - \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \theta \right)$$

17. 
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

19. 
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}$$
21. 85, 178, 54
$$23. \frac{9}{7}, \frac{9}{7} = 25. 36, 24, 30$$

**21.** 85, 178, 54 **23.** 
$$\frac{9}{7}$$
,  $\frac{9}{7}$  **25.** 36, 24, 30

**27.** 
$$\frac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2 \sqrt{xy}}$$
 **29.**  $\frac{\sin(x - y) + e^x}{\sin(x - y) - xe^y}$ 

31. 
$$\frac{3yz-2x}{2z-3xy}$$
,  $\frac{3xz-2y}{2z-3xy}$ 

33. 
$$\frac{1+y^2z^2}{1+y+y^2z^2}, -\frac{z}{1+y+y^2z^2}$$

37. 
$$\approx -0.33$$
 m/s por minuto

**39.** (a) 
$$6 \text{ m}^3/\text{s}$$
 (b)  $10 \text{ m}^2/\text{s}$  (c)  $0 \text{ m/s}$  **41.**  $-0.27 \text{ L/s}$ 

**43.** (a) 
$$\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\sin\theta$$
,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -(\frac{\partial z}{\partial x})r \sin \theta + (\frac{\partial z}{\partial y})r \cos \theta$$
**49.** 
$$4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (4r^2 + 4s^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x}\partial y + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

#### Exercícios 14.6

45.

**1.** 
$$\approx -0.1 \text{ milibar/mi}$$
 **3.**  $\approx 0.778$  **5.**  $\frac{5}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{4}$ 

7. (a) 
$$\nabla f(x, y) = \langle 5y^2 - 12x^2y, 10xy - 4x^3 \rangle$$

(b) 
$$\langle -4, 16 \rangle$$
 (c)  $172/13$ 

**9.** (a) 
$$\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz} \rangle$$
 (b)  $\langle 1, 12, 0 \rangle$  (c)  $-\frac{22}{3}$ 

**11.** 23/10 **13.** 
$$4\sqrt{2}$$
 **15.** 4/9

17. 
$$9/(2\sqrt{5})$$
 19.  $2/5$  21.  $4\sqrt{2}$ ,  $\langle -1, 1 \rangle$  23.  $1, \langle 0, 1 \rangle$ 

**25.** 
$$\sqrt{3}$$
,  $\langle 1, -1, -1 \rangle$  **27.** (b)  $\langle -12, 92 \rangle$ 

**29.** Todos os pontos da reta 
$$y = x + 1$$
 **31.** (a)  $-40/(3\sqrt{3})$ 

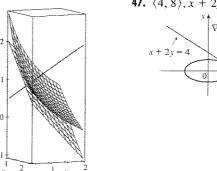
**33.** (a) 
$$32/\sqrt{3}$$
 (b)  $\langle 38, 6, 12 \rangle$  (c)  $2\sqrt{406}$  **35.**  $\frac{327}{13}$ 

**39.** (a) 
$$4x - 2y + 3z = 21$$
 (b)  $\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{6}$ 

**41.** (a) 
$$4x - 5y - z = 4$$
 (b)  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{-1}$ 

**43.** (a) 
$$x + y - z = 1$$
 (b)  $x - 1 = y = -z$ 

**47.** 
$$\langle 4, 8 \rangle, x + 2y = 4$$



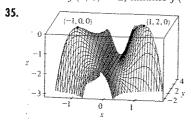
**53.** 
$$(\pm\sqrt{6}/3, \mp2\sqrt{6}/3, \pm\sqrt{6}/2)$$

**59.** 
$$x = -1 - 10t$$
,  $y = 1 - 16t$ ,  $z = 2 - 12t$ 

**63.** Se 
$$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$$
 e  $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ , então  $af_x + bf_y$  e  $cf_x + df_y$  são conhecidas; logo, vamos resolver as equações lineares para  $f_x$  e  $f_y$ .

#### Exercícios 14.7

- 1. (a) f tem um mínimo tocal em (1, 1).
- (b) f tem um ponto de sela em (1, 1).
- 3. Mínimo local em (1, 1), ponto de sela em (0, 0)
- **5.** Máximo  $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$
- 7. Mínimo f(1, 1) = 0, f(-1, -1) = 0, pontos de sela em (0, 0)
- **9.** Pontos de sela em (1, -1), (-1, 1)
- 11. f tem um valor máximo local de 1 em todos os pontos da forma  $(x_0, x_0)$ .
- 13. Nenhum 15. Pontos de sela  $(0, n\pi)$ , n um inteiro
- 17. Mínimo f(0, 0) = 0, pontos de sela em  $(\pm 1, 0)$
- **19.** Máximo f(0, 0) = 2, mínimo f(0, 2) = -2, pontos de sela (±1, 1)
- **21.** Máximo  $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ , mínimo  $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$
- **23.** Mínimos  $f(-1,714,0) \approx -9,200$ ,  $f(1,402,0) \approx 0,242$ , ponto de sela (0.312, 0), ponto mais baixo (-1.714, 0, -9.200)
- **25.** Máximos  $f(-1,267,0) \approx 1,310$ ,  $f(1,629,\pm 1,063) \approx 8,105$ , pontos de sela (-0,259, 0), (1,526, 0),
- pontos de máximo  $(1,629, \pm 1,063, 8,105)$
- **27.** Máximo f(2,0) = 9, mínimo f(0,3) = -14
- **29.** Máximo  $f(\pm 1, 1) = 7$ , mínimo f(0, 0) = 4
- **31.** Máximo f(3,0) = 83, mínimo f(1,1) = 0
- **33.** Máximo f(1, 0) = 2, mínimo f(-1, 0) = -2



- **37.**  $\sqrt{3}$ **39.** (0, 0, 1), (0, 0, -1)**41.**  $\frac{100}{3}$ ,  $\frac{100}{3}$ ,  $\frac{100}{3}$
- **45.**  $\frac{4}{3}$  **47.** Cubo, aresta de comprimento c/12
- 49. Base quadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **51.**  $L^3/(3\sqrt{3})$

#### Exercícios 14.8

- **1.** ≈59, 30 **3.** Máximos  $f(\pm 1, 0) = 1$ , mínimos  $f(0, \pm 1) = -1$
- 5. Máximos  $f(\pm 2, 1) = 4$ , mínimos  $f(\pm 2, -1) = -4$
- 7. Máximo f(1, 3, 5) = 70, mínimo f(-1, -3, -5) = -70
- 9. Máximo  $2/\sqrt{3}$ , mínimo  $-2/\sqrt{3}$
- 11. Máximo  $\sqrt{3}$ , mínimo 1
- **13.** Máximo  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$ ,

mínimo  $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -2$ 

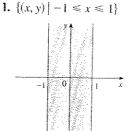
- **15.** Máximo  $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$ , mínimo  $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$
- 17. Máximo 3, mínimo 1
- 19. Máximos  $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{1/4}$ mínimos  $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$
- **25–37.** Veja os Exercícios 37–51 na Seção 14.7.
- **39.** Mais próximo  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , mais afastado (-1, -1, 2)

- **41.** Máximo  $\approx 9,7938$ , mínimo  $\approx -5,3506$
- **43.** (a) c/n (b) Quando  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

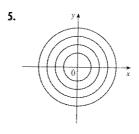
#### Capítulo 14 Revisão 🏻

## Testes Falso-Verdadeiro

- 1. Verdadeiro 3. Falso **5.** Falso
- 9. Falso 11. Verdadeiro.
- Exercícios
- 3.



7. Verdadeiro



**7.** )

- 11. (a)  $\approx 3.5$  °C/m, -3.0 °C/m (b)  $\approx 0.35$  °C/m pela Equação 14.6.9 (A Definição 14.6.2 fornece ≈1,1°C/m.) (c) −0,25
- 13.  $f_x = 1/\sqrt{2x + y^2}$ ,  $f_y = y/\sqrt{2x + y^2}$
- 15.  $g_u = tg^{-1}v, g_v = u/(1 + v^2)$
- 17.  $T_p = \ln(q + e^r), T_q = p/(q + e^r), T_r = pe^r/(q + e^r)$

- 19.  $f_{xx} = 24x$ ,  $f_{xy} = -2y = f_{yx}$ ,  $f_{yy} = -2x$ 21.  $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^lz^m$ ,  $f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$ ,  $f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}$ ,  $f_{yy} = l(l-1)x^ky^{l-2}z^m$ ,  $f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}$ ,  $f_{zz} = m(m-1)x^ky^{l-2}z^m$ ,
- **25.** (a) z = 8x + 4y + 1 (b)  $\frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{4} = 1 z$ **27.** (a) 2x - 2y - 3z = 3 (b)  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{-6}$
- **29.** (a) x + 2y + 5z = 0 (b)  $x 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{5}$
- **31.**  $(\pm\sqrt{2/7}, \pm 1/\sqrt{14}, \mp 3/\sqrt{14})$
- **33.**  $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z 120$ ; 38,656
- **35.**  $e^t + 2(y/z)(3t^2 + 4) 2t(y^2/z^2)$ **37.** -47, 108
- **43.**  $ze^{x\sqrt{y}}(z\sqrt{y}, xz/(2\sqrt{y}), 2)$  **45.**  $\frac{43}{5}$  **47.**  $\sqrt{145}/2, (4, \frac{9}{2})$
- **49.**  $\approx \frac{5}{8}$  nós/mi **51.** Mínimo f(-4, 1) = -11
- **53.** Máximo f(1, 1) = 1; pontos de sela (0, 0), (0, 3), (3, 0)

#### A38 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

**55.** Máximo f(1, 2) = 4, mínimo f(2, 4) = -64

**57.** Máximo f(-1, 0) = 2, mínimos  $f(1, \pm 1) = -3$ , pontos de sela  $(-1, \pm 1)$ , (1, 0)

**59.** Máximo  $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$ , mínimo  $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$ 

61. Máximo 1, mínimo −1

**63.**  $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$ 

**65.**  $P(2-\sqrt{3}), P(3-\sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3}-3)/3$ 

#### Problemas Quentes ©

1.  $L^2W^2$ ,  $\frac{1}{3}L^2W^2$ 

**3.** (a) x = w/3, base = w/3 (b) Sim

9.  $\sqrt{6}/2$ ,  $3\sqrt{2}/2$ 

# Capítulo 15

#### Exercícios 15.1 -

**1.** (a) 288 (b) 144 **3.** (a)  $\pi^2/2 \approx 4.935$ (b) 0

**5.** (a) -6 (b) -3.5 **7.** U < V < L

**9.** (a)  $\approx 248$  (b) 15,5 11. 60

**13.** 3 **15.** 0,6065, 0,5694, 0,5606, 0,5585, 0,5579, 0,5578

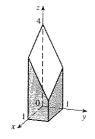
## Exercícios 15.2

1. 9 + 27y,  $8x + 24x^2$ **3.** 10 **5.** 2 **7.** 261,632/45

**9.**  $\frac{21}{2} \ln 2$  **11.** 6 **13.**  $\frac{21}{2}$  **15.** 9 ln 2

17.  $\left[ (\sqrt{3} - 1)/2 \right] - (\pi/12)$  19.  $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$ 

21.

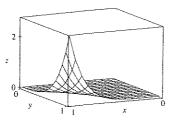


**25.**  $\frac{166}{27}$ **23.** 47,5

27.  $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$ 

**29.** 36

**31.** 21e - 57



33. 💈

35. O teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

#### Exercícios 15.3

**3.**  $\frac{4}{9}e^{3/2} - \frac{32}{45}$  **5.** e - 1 **7.**  $\frac{256}{21}$ 9.  $\frac{1}{2} \ln 2$ 

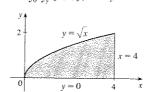
11.  $\frac{1}{2}e^4 - 2e$  13.  $(1 - \cos 1)/2$ 17. 0

19.  $\frac{7}{18}$  21.  $\frac{31}{8}$  23.  $\frac{1}{6}$  25.  $\frac{128}{15}$ 

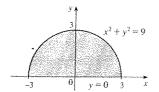
**27.**  $\frac{1}{3}$  **29.** 0, 1,213, 0,713 **31.**  $\frac{64}{3}$ 

**33.** 13.984.735.616/14.549.535 **35.**  $\pi/2$ 

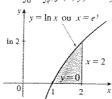
**37.**  $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y) \, dx \, dy$ 



**39.**  $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy dx$ 



**41.**  $\int_0^{\ln 2} \int_x^2 f(x, y) dx dy$ 



**43.**  $(e^9-1)/6$  **45.**  $\frac{1}{4}$  sen 81 **47.**  $(2\sqrt{2}-1)/3$  **49.** 1

**51.**  $0 \le \iint_D \sqrt{x^3 + y^3} dA \le \sqrt{2}$  **55.**  $8\pi$  **57.**  $2\pi/3$ 

#### Exercícios 15.4

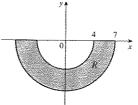
7.

1.  $\int_0^{2\pi} \int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, dr \, d\theta$ 

**3.**  $\int_{-2}^{2} \int_{x}^{2} f(x, y) dy dx$ 

5.  $\int_0^{2\pi} \int_2^5 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, dr \, d\theta$ 

 $33 \pi / 2$ 



**9.** 0 **11.**  $(\pi/2) \sin 9$  **13.**  $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ 

**15.**  $\frac{3}{64}\pi^2$  **17.**  $\pi/12$  **19.**  $\frac{1}{8}(\pi-2)$  **21.**  $81\pi/2$  **23.**  $\frac{4}{3}\pi a^3$ 

**25.**  $(2\pi/3)[1-(1/\sqrt{2})]$ 

**27.**  $(8\pi/3)(64-24\sqrt{3})$  **29.**  $(\pi/4)(e-1)$  **31.**  $4\pi/3$  **33.**  $1800\pi$  pés<sup>3</sup> **35.**  $\frac{15}{16}$  **37.** (a)  $\sqrt{\pi}/4$  (b)  $\sqrt{\pi}/2$ 

**29.**  $(\pi/4)(e-1)$  **31.**  $4\pi/3$ 

# Exercícios 15.5

**1.**  $\frac{64}{3}$  C **3.**  $\frac{4}{3}$ ,  $(\frac{4}{3}, 0)$  **5.** 6,  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ 

7. 
$$\frac{1}{4}(e^2-1)$$
,  $\left(\frac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \frac{4(e^3-1)}{9(e^2-1)}\right)$ 

13. (2a/5, 2a/5) se o vértice for (0, 0) e os lados estiverem ao longo dos eixos positivos.

**15.**  $\frac{1}{16}(e^4-1), \frac{1}{8}(e^2-1), \frac{1}{16}(e^4+2e^2-3)$  **17.**  $\frac{189}{26}, \frac{1269}{28}, \frac{1917}{28}$ 

**19.** 
$$m = \pi^2/8$$
,  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\pi}, \frac{16}{9\pi}\right)$ ,  $I_x = 3\pi^2/64$ ,  $I_y = (\pi^4 - 3\pi^2)/16$ ,  $I_0 = \pi^4/16 - 9\pi^2/64$ 

**21.**  $\rho a^4/3$ ,  $\rho a^4/3$ ;  $a/\sqrt{3}$ ,  $a/\sqrt{3}$ 

**23.** (a)  $\frac{1}{2}$  (b) 0,375 (c)  $\frac{5}{48} \approx 0,1042$ 

**25.** (b) (i)  $e^{-0.2} \approx 0.8187$ 

(ii)  $1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3481$  (c) 2, 5

**27.** (a)  $\approx 0.500$  (b)  $\approx 0.632$ 

**29.** (a)  $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}] dA$ , onde  $D \notin O$ disco com raio 10 mi centrado no centro da cidade.

(b)  $200\pi k/3 \approx 209k$ ,  $200(\pi/2 - \frac{8}{9})k \approx 136k$ , sobre a aresta

#### Exercícios 15.6

1.  $15\sqrt{26}$ 3.  $3\sqrt{14}$ 5.  $12 \text{ sen}^{-1\frac{2}{3}}$ 

7.  $(\pi/6)(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$ 9.  $(2\pi/3)(2\sqrt{2}-1)$ 

**11.**  $a^2(\pi - 2)$  **13.** 13,9783 **15.** (a)  $\approx 1,83$  (b)  $\approx 1,8616$ 

17.  $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16} \ln \left[ (11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70}) \right]$ 

**19.** 3.3213 **23.**  $(\pi/6)(101\sqrt{101}-1)$ 

### Exercícios 15.7

**3.** 1 **5.**  $\frac{1}{3}(e^3-1)$  **7.** 4 **9.**  $\frac{65}{28}$  **11.**  $\frac{1}{10}$  **13.** 8/(3e) **15.**  $16\pi/3$  **17.**  $\frac{16}{3}$  **19.**  $36\pi$ 

**21.** (a)  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dy \, dx$  (b)  $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$ 

**23.** 60,533 25. 27.

 $\int_{-2}^{2} \int_{0}^{6} \int_{-\sqrt{4-x^{2}}}^{\sqrt{4-x^{2}}} f(x, y, z) dz dy dx$ 

 $= \int_0^6 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$ 

 $= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{6} \int_{-\sqrt{4-z^{2}}}^{\sqrt{4-z^{2}}} f(x, y, z) dx dy dz$ 

 $= \int_0^6 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$ 

 $= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{6} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$ 

 $= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{0}^{6} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$ 

**29.**  $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{y} f(x, y, z) dz dy dx$ 

 $= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$ 

 $= \int_0^1 \int_z^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ 

 $= \int_0^1 \int_0^y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$ 

 $= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{z}^{1-x^2} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$ 

 $=\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_z^{1-x^2} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$ 

**31.**  $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$ 

 $= \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$ 

 $= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ 

 $=\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy$ 

 $= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$ 

 $= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{-\infty}^{1-z} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$ 

**33.**  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz$ 

 $= \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy = \int_0^1 \int_0^x \int_z^x f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$ 

 $=\int_0^1 \int_x^1 \int_x^x f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$ 

**35.**  $\frac{79}{30}$ ,  $\left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$ 

**37.** *a*<sup>5</sup>, (7*a*/12, 7*a*/12, 7*a*/12)

**39.** (a)  $m = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$ 

(b)  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

 $\bar{x} = (1/m) \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} x \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$ 

 $\bar{y} = (1/m) \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} y \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$ 

 $\bar{z} = (1/m) \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$ 

(c)  $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-y} (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx$ 

**41.** (a)  $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$  (b)  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde  $\bar{x} = 28/(9\pi + 44)$ ,

 $\bar{y} = 2(15\pi + 64)/[5(9\pi + 44)], \bar{z} = (45\pi + 208)/[15(9\pi + 44)]$ 

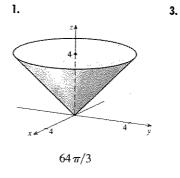
(c)  $(68 + 15\pi)/240$ 

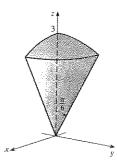
**45.** (a)  $\frac{1}{8}$  (b)  $\frac{1}{64}$  (c)  $\frac{1}{5760}$ **43.**  $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$ 

**47.**  $L^3/8$ 

**49.** A região limitada pelo elipsóide  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 

#### **Exercícios 15.8**





 $(9\pi/4)(2-\sqrt{3})$ 

5.  $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$ **7.** 384π

9.  $\pi(e^6-e-5)$ 11,  $2\pi/5$ 

**13.** (a)  $162\pi$  (b) (0, 0, 15)

**15.**  $\pi Ka^2/8$ , (0, 0, 2a/3)

17.  $4\pi/5$ 

19.  $15\pi/16$ 

**21.**  $(1562/15)\pi$ **23.**  $10\pi$ **25.**  $(0, \frac{525}{296}, 0)$ 

**27.** (a)  $(0, 0, \frac{3}{8}a)$  (b)  $4K\pi a^5/15$ 

**29.**  $(2\pi/3)[1-(1/\sqrt{2})], (0,0,3/[8(2-\sqrt{2})])$ 31.  $5\pi/6$ 

**33.**  $8\pi/35$ **35.**  $243\pi/5$  **37.**  $136\pi/99$ 

#### A40 🗆 CÁLCULO **Editora Thomson**

# Exercícios 15.9

**1.** -14 **3.** 0 **5.** 2*uvw* 

7. O paralelogramo com vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, -2)

**9.** A região limitada pelas retas y = 1, o eixo y = 0

11. -3 13.  $6\pi$  15.  $2 \ln 3$  17. (a)  $\frac{4}{3} \pi abc$  (b)  $1{,}083 \times 10^{12} \text{ km}^3$ 

**21.**  $\frac{3}{5}$  sen 1 **23.**  $e - e^{-1}$ 19.  $\frac{8}{5} \ln 8$ 

#### Capítulo 15 Revisão 🏻

### Testes Falso-Verdadeiro

3. Verdadeiro 1. Verdadeiro 5. Verdadeiro 7. Falso

#### Exercícios

i. ≈64,0 **3.**  $4e^2 - 4e + 3$  **5.**  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 1$  **7.**  $\frac{2}{3}$  9.  $\int_0^{\pi} \int_2^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, dr \, d\theta$ 

11. A região interior ao laço da rosa de quatro pétalas  $r = \sin 2\theta$ no primeiro quadrante.

13.  $\frac{1}{2}$  sen 1 15.  $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$  17.  $\frac{1}{4} \ln 2$ 

**19.** 8 **21.**  $81\pi/5$  **23.** 40,5 **25.**  $\pi/96$ 

**29.** 176 **31.**  $\frac{2}{3}$  **33.**  $2ma^3/9$ 

**35.** (a)  $\frac{1}{4}$  (b)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$ 

(c)  $I_x = \frac{1}{12}$ ,  $I_y = \frac{1}{24}$ ;  $\overline{y} = 1/\sqrt{3}$ ,  $\overline{x} = 1/\sqrt{6}$ 

**37.** (a) (0, 0, h/4) (b)  $\pi a^4 h/10$  **39.**  $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}/3$ 

**41.** 97,2 **43.** 0,0512 **45.** (a)  $\frac{1}{15}$  (b)  $\frac{1}{3}$  (c)  $\frac{1}{45}$ 

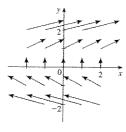
**47.**  $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z) dx dy dz$  **49.**  $-\ln 2$  **51.** 0

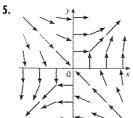
#### Problemas Quentes

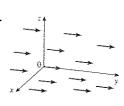
1. 30 3.  $\frac{1}{2}$  sen 1 **7.** (b) 0,90

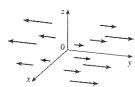
# Capítulo 16

# Exercícios 16.1

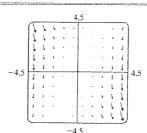








11. II 13. I 15. IV 17. III 19.

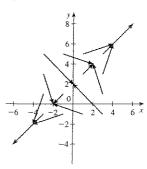


**21.**  $\nabla f(x, y) = \frac{1}{x + 2y} \mathbf{i} + \frac{2}{x + 2y} \mathbf{j}$ 

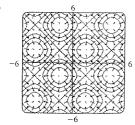
**23.**  $\nabla f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i}$ 

+  $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ **j** +  $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ **k** 

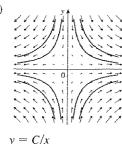
**25.**  $\nabla f(x, y) = (y - 2)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 



A reta y = 2x



**33.** (a)



(b) y = 1/x, x > 0

#### Exercícios 16.2 0

1.  $(17\sqrt{17}-1)/12$ 

**3.** 1638,4

5.  $\frac{464}{5}$  + 9 ln 3 7.  $\frac{17}{3}$ 

**9.** 320 **11.**  $\sqrt{14}(e^6-1)/12$ 

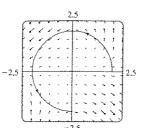
13.  $\frac{1}{5}$  15.  $\frac{97}{3}$ 

17. (a) Positivo (b) Negativo

19.  $-\frac{59}{105}$ 

**21.**  $\frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1$ 

**23.**  $3\pi \pm \frac{2}{3}$ 



**25.** (a) 
$$\frac{11}{8} - 1/e$$
 (b) 1.6

 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(1))$  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(0))$ 

**27.** 
$$\frac{945}{16,777,216}$$
  $\pi$  **29.** 0,052 **31.**  $2\pi k$ ,  $(4/\pi, 0)$ 

**33.** (a)  $\bar{x} = (1/m) \int_C x \rho(x, y, z) ds$ ,

 $\bar{y} = (1/m) \int_C y \rho(x, y, z) ds,$ 

 $\tilde{z} = (1/m) \int_C z \rho(x, y, z) ds$ , onde  $m = \int_C \rho(x, y, z) ds$ 

(b)  $2\sqrt{13} k\pi$ ,  $(0, 0, 3\pi)$ 

**35.**  $I_x = k((\pi/2) - \frac{4}{3}), I_y = k((\pi/2) - \frac{2}{3})$ 

**37.**  $2\pi^2$  **39.** 26 **41.**  $1,67 \times 10^4$  pés-lb

**43.** (b) Sim **45.** ≈22 J

#### Exercícios 16.3 B

1. 40 3.  $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + K$ 

5. Não-conservativo 7.  $f(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x + K$ 

**9.**  $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$  **13.** (a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4y^4$  (b) 4 11. (b) 16

**15.** (a)  $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a)  $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ 19. 2 21. 30 23. Não (b) 0

**25.** Não

**29.** (a) Sim (b) Sim (c) Sim **31.** (a) Sim (b) Sim (c) Não

#### Exercícios 16.4 II

1. 6 3.  $\frac{2}{3}$  7. e-1 9.  $\frac{1}{3}$ 11.  $-24\pi$ 

13.  $\frac{4}{3} - 2\pi$  15.  $\frac{625}{2}\pi$  17.  $-\frac{1}{12}$ 

**19.**  $3\pi$  **21.** (c)  $\frac{9}{2}$  **23.**  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 

#### Exercícios 16.5 🗈

**1.** (a)  $-x^2 \mathbf{i} + 3xy \mathbf{j} - xz \mathbf{k}$  (b) yz

**3.** (a)  $(x - y)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}$  (b)  $1 - 1/(2\sqrt{z})$ **5.** (a) 0 (b) 1

7. (a)  $\langle 1/y, -1/x, 1/x \rangle$  (b) 1/x + 1/y + 1/z

9. (a) Negativo (b) rot F = 0
11. (a) Zero (b) rot F aponta na direção do eixo z, no sentido negativo

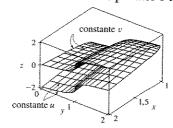
**13.** f(x, y, z) = xyz + K **15.**  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K$ 

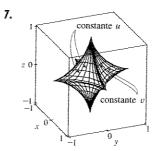
17. Não-conservativo 19. Não

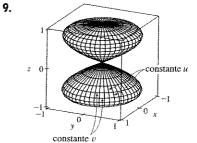
#### Exercícios 16.6 a

1. Parabolóide circular tendo por eixo o eixo z.

3. Cilindro circular tendo por eixo o eixo x







11. IV 13. I 15. II

17. x = 1 + u + v, y = 2 + u - v, z = -3 - u + v

19.  $x = x, z = z, y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$ 

#### A42 🗆 CÁLCULO Editora Thomson

21. 
$$x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
,  $y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ,  $z = 2 \cos \phi$ ,  $0 \le \phi \le \pi/4$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ 

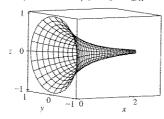
[ou 
$$x = x$$
,  $y = y$ ,  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $2 \le x^2 + y^2 \le 4$ ]

**23.** 
$$x = x, y = 4 \cos \theta, \ z = 4 \sin \theta, \ 0 \le x \le 5, \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

**27.** 
$$x = x, y = e^{-x} \cos \theta$$
.

$$z = e^{-x} \operatorname{sen} \theta, \, 0 \le x \le 3,$$

 $0 \le \theta \le 2\pi$ 



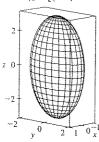
- 29. (a) Direções reversas (b) Números de espirais duplas
- **31.** 3x y + 3z = 3
- **33.** -x + 2z = 1
- **35.**  $4\sqrt{6}\pi$

- **37.**  $(2\pi/3)(2\sqrt{2}-1)$  **39.**  $(\pi/6)(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$

41 
$$(\sqrt{21/2}) \pm \frac{17}{21} [\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln(\sqrt{17})]$$

- **41.**  $(\sqrt{21}/2) + \frac{17}{4} [\ln(2+\sqrt{21}) \ln\sqrt{17}]$ **43.**  $2a^2(\pi-2)$
- **45.**  $\pi(2\sqrt{6}-\frac{8}{3})$  **47.** 13,9783
- **49.** (a)  $\approx 1.83$  (b)  $\approx 1.8616$
- **51.**  $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16} \ln \left[ (11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70}) \right]$

**53.** (b)



(c)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{36} \, \text{sen}^4 u \, \text{cos}^2 v + 9 \, \text{sen}^4 u \, \text{sen}^2 v + 4 \, \text{cos}^2 u \, \text{sen}^2 u \, du \, dv$ **55.** 4,4506

## Exercícios 16.7 a

1. 
$$8(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 33{,}17$$
 3.  $900\pi$  5.  $171\sqrt{14}$ 

3. 
$$900\pi$$
 5.  $171\sqrt{14}$ 

**13.** 
$$16\pi$$
 **15.**  $16\pi$  **17.**  $5\sqrt{5}/48 + 1/240$ 

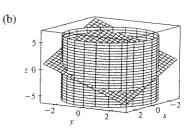
- 19.  $\frac{713}{180}$ 21.  $-\frac{1}{6}$ **23.**  $+\frac{4}{3}\pi$
- **25.** 0 **27.** 48 **29.** 0,1642

- 7.  $\sqrt{3}/249$ .  $364\sqrt{2}\pi/3$  11.  $(\pi/60)(391\sqrt{17}+1)$ 
  - **31.** 3,4895
- **33.**  $\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \left[ P(\partial h/\partial x) Q + R(\partial h/\partial z) \right] dA,$
- onde D = projeção sobre o plano xz

- **35.** (0, 0, a/2)
- **37.** (a)  $I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$  (b)  $4329\sqrt{2} \pi/5$
- **39.**  $194,400\pi$
- **41.**  $8\pi a^3 \varepsilon_0/3$  **43.**  $1248\pi$

#### Exercícios 16.8 ©

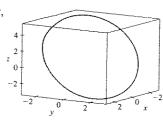
- **3.** 0 **5.** 0
- **7.** -1
- 9.  $80\pi$
- 11. (a)  $81\pi/2$



(c) 
$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t,$$

$$z = 1 - 3(\cos t + \sin t),$$

$$0 \le t \le 2\pi$$



**17.** 16

### Exercícios 16.9 🗆

- 1. Negativo em  $P_1$ , positivo em  $P_2$ **7.** 2
- 7.  $\frac{17}{2}$  9.  $\frac{11}{12} 4/e$  11. 0
- 13.  $32\pi/3$ **15.** 0
- 17.  $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20} \arcsin(\sqrt{3}/3)$
- 19.  $13\pi/20$

#### Capítulo 16 Revisão 🗆

## Testes Falso-Verdadeiro

- 1. Falso 3. Verdadeiro
- 5. Falso
- 7. Verdadeiro

**9.**  $9\pi/2$ 

#### Exercícios

- 1. (a) Negativo (b) Positivo **9.**  $\frac{11}{12} - 4/e$  **11.**  $f(x, y) = e^y + xe^{xy}$  **13.** 0
- 3.  $4\sqrt{5}$
- 5.  $-\pi$

- **25.**  $\frac{1}{6}(27-5\sqrt{5})$  **27.**  $\pi(391\sqrt{17}+1)/60$

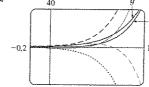
- **29.**  $-64\pi/3$  **33.**  $-\frac{1}{2}$  **37.** -4

## Capítulo 17

#### Exercícios 17.1 🗆

- 1.  $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$
- 3.  $y = e^{-4x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$
- **5.**  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$
- 9.  $y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$
- 7.  $y = c_1 \cos(x/2) + c_2 \sin(x/2)$ 11.  $y = c_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$
- **13.**  $y = e^{-t/2} [c_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{3}t/2)]$

15.



Todas as soluções aproximam-se de 0 quando  $x \to -\infty$  e aproximam-se de  $\pm \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

17. 
$$y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$$
 19.  $y = e^{x/2} - 2xe^{x/2}$ 

**21.** 
$$y = 3\cos 4x - \sin 4x$$
 **23.**  $y = e^{-x}(2\cos x + 3\sin x)$ 

**25.** 
$$y = 3\cos(\frac{1}{2}x) - 4\sin(\frac{1}{2}x)$$
 **27.**  $y = \frac{e^{x+3}}{e^3 - 1} + \frac{e^{2x}}{1 - e^3}$ 

29. Sem solução

31. 
$$y = e^{-2x}(2\cos 3x - e^{\pi} \sin 3x)$$

33. (b) 
$$\lambda = n^2 \pi^2 / L^2$$
, n um inteiro positivo;  $y = C \operatorname{sen}(n \pi x / L)$ 

#### Exercícios 17.2 🗆

1. 
$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}$$

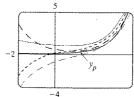
3. 
$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{40} \cos 4x - \frac{1}{20} \sin 4x$$

**5.** 
$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{10}e^{-x}$$

7. 
$$y = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$$

**9.** 
$$y = e^x(\frac{1}{2}x^2 - x + 2)$$





As soluções são todas assintóticas a  $y_p = e^x/10$  quando  $x \to \infty$ . Exceto para  $y_p$ , todas as soluções aproximamse ou de ∞ ou de -∞ quando

**13.** 
$$y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\sin x$$

15. 
$$y_p = Ax + (Bx + C)e^{9x}$$

17. 
$$y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 3x]$$

19. 
$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x$$

**21.** 
$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$$

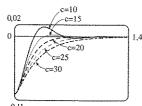
**23.** 
$$y = (c_1 + x) \sin x + (c_2 + \ln \cos x) \cos x$$

**25.** 
$$y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$$

25. 
$$y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$$
  
27.  $y = [c_1 - \frac{1}{2} \int (e^x/x) dx]e^{-x} + [c_2 + \frac{1}{2} \int (e^{-x}/x) dx]e^x$ 

## Exercícios 17.3 🗆

1.  $x = 0.36 \sin(10t/3)$ 



**11.**  $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6\cos 20t + 3\sin 20t) + \frac{3}{125}$  $I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t} \operatorname{sen} 20t$ 

**13.**  $Q(t) = e^{-10t} \left[ \frac{3}{250} \cos 20t - \frac{3}{500} \sin 20t \right]$  $-\frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\sin 10t$ 

## Exercícios 17.4

**1.** 
$$c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$$
 **3.**  $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0 e^{x^{3/3}}$ 

**5.** 
$$c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

7. 
$$c_0 + c_1 x + c_0 \frac{x^2}{2} + c_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!}{2^{2n-2} n! (n-2)!} x^{2n-2}$$

9. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$$

11. 
$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \dots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!} x^{3n+1}$$

#### Capítulo 17 Revisão 🗆

#### Testes Falso-Verdadeiro

1. Verdadeiro 3. Verdadeiro

## Exercícios

1. 
$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$$
 3.  $y = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)$ 

5. 
$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1)$$

7. 
$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} (x+1) \sin x$$

**9.** 
$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} x e^{-2x}$$

11. 
$$y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$$
 13.  $y = (e^{4x} - e^x)/3$ 

11. 
$$y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$$
  
13.  $y = (e^{4x} - e^x)/3$   
15.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 

17. 
$$Q(t) = -0.02e^{-10t}(\cos 10t + \sin 10t) + 0.03$$

**19.** (c) 
$$2\pi/k \approx 85 \text{ min}$$
 (d)  $\approx 17.600 \text{ mi/h}$ 

## **Apêndices**

## Exercícios G

**1.** 
$$8-4i$$
 **3.**  $13+18i$  **5.**  $12-7i$  **7.**  $\frac{11}{13}+\frac{10}{13}i$ 

**9.** 
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
 **11.**  $-i$  **13.**  $5i$  **15.**  $12 + 5i$ ;  $13$ 

17. 
$$4i$$
, 4 19.  $\pm \frac{3}{2}i$  21.  $-1 \pm 2i$ 

**23.** 
$$-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$$
 **25.**  $3\sqrt{2} \left[\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)\right]$ 

**27.** 
$$5\left[\cos\left[tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right] + i \sin\left[tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right]\right]$$

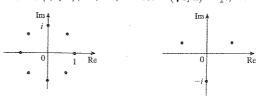
**29.** 
$$4[\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)], \cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6), \frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)]$$

31. 
$$4\sqrt{2} \left[\cos(7\pi/12) + i \sin(7\pi/12)\right]$$
,

$$(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i \sin(13\pi/12)], \frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)]$$

**33.** 
$$-1024$$
 **35.**  $-512\sqrt{3} + 512i$ 

**37.** 
$$\pm 1$$
,  $\pm i$ ,  $(1/\sqrt{2})(\pm 1, \pm i)$  **39.**  $\pm (\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$ ,  $-i$ 



**41.** 
$$i$$
 **43.**  $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$  **45.**  $-e$ 



# Índice Analítico

| A                                        | Beisebol                                     | Capacidade de suporte, 619                |
|------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Aberta, região, 1061                     | posição para revezamento, 580                | Característica, equação, 1139             |
| Absolutamente, série, convergente, 738   | velocidade de arremesso, 612                 | Carbono-14, datação de, 617               |
| Absoluto, máximo e mínimo, 951           | Beisebol e Cálculo, 618                      | Cardióide, 668                            |
| valores, 952                             | Bernoulli                                    | Carga, 996, 1014                          |
| Aceleração, 870                          | equação diferencial de, 633                  | densidade de, 1014                        |
| Adição de vetores, 798                   | James, 633                                   | densidade de, 996                         |
| Afélio, 692                              | John, 597, 650                               | para um circuito, 1124                    |
| Algébrica, função,                       | Bessel                                       | Cassini, Giovanni, 675                    |
| Alternadas                               | Friedrich, 748                               | Cauchy, Augustin-Louis, 989               |
| séries, 733, 738                         | função de, 748                               | Cauchy-Schwarz, Designaldade de, 813      |
| séries harmônicas, 735                   | Bézier, curvas de, 650-664                   | Centro de massa, 1026, 1063, 1094         |
| Teorema da Estimativa das Séries, 736    | Bézier, Pierre, 664                          | Centróide de um sólido, 1026              |
| Testes das Séries, 734                   | Bifólio, 674                                 | Choque absorvido, 1124, 1152              |
| Amortecedor de choque, 1156              | Binomial                                     | Ciclóide, 654                             |
| Amortecidas, vibrações, 1152             | série, 770, 771                              | Cilíndricas, coordenadas, 838, 1030       |
| Amortecimento, constante de, 1153        | Binomial                                     | Cilindro, 831                             |
| Angular, momento, 878                    | Teorema, 770                                 | parabólico, 831-832                       |
| Ângulos diretores, 809                   | descoberta por Newton, 773                   | Circulação de um campo vetorial, 1108     |
| Ângulos entre vetores, 807, 808          | Binormal                                     | Círculo de curvatura, 866                 |
| Apolúnio, 686                            | vetor, 866                                   | Cissóide, 654, 674                        |
| Aproximação                              | Brahe, Tycho, 875                            | Clairaut                                  |
| pela Desigualdade de Taylor, 762         | Braquistócrona, problema da, 650             | Alexis, 914                               |
| Aproximação Linear, 927                  | Bruxa de Maria Agnesi, 654                   | Teorema de, 914                           |
| Aproximação para um plano tangente, 921, |                                              | Cobb, Charles, 887, 916                   |
| 922                                      | C                                            | Cobb-Douglas, função produção de, 887,    |
| Arco                                     | $C^1$ , transformação, 1038                  | 916, 969                                  |
| comprimento de, 658, 678, 861            | Cadeia, regra da, para várias variáveis, 929 | Cocleóide, 693                            |
| Área                                     | Calculadora gráfica, 649, 672                | Coeficiente de atrito estático, 846       |
| da superfície, 661                       | Calor                                        | Coeficiente de atrito, 846                |
| de um setor de um círculo, 675           | índice de, 907, 924                          | Coeficiente de uma série de potência, 747 |
| de uma superfície de revolução, 658      | condutividade do, 1102                       | Cometas, órbitas dos, 692                 |
| em coordenadas polares, 1084             | equação de condução do calor, 919            | Comparação,                               |
| pelo Teorema de Grenn, 1084              | fluxo de, 1102                               | Teste da, 728                             |
| sobre uma curva paramétrica, 658         | Caminho, 1080                                | para séries, 729                          |
| Argumento de um número complexo, A7      | Campo                                        | Complementar, equação, 1144               |
| Aritmética-geométrica, média, 710        | conservativo, 1078                           | Completitividade, Axioma da, 707          |
| Árvore, grafo da, 932                    | elétrico, 1057                               | Complexo conjugado, A6                    |
| Assintota de uma hipérbole, 684          | força, 1057                                  | Componente                                |
| Astróide, 655                            | gradiente, 1058                              | função, 1042                              |
| Autônoma, equação diferencial, 592       | gravitacional, 1057                          | de um vetor, 800, 810                     |
| Auxiliar, equação, 1139                  | velocidade, 1057                             | Componentes                               |
| Axioma da completitividade, 707          | vetor, 1054                                  | funções, 848                              |
| •                                        | Campos                                       | Composição de funções, 904                |
| В                                        | escalares, 1054                              | Composição de funções, continuidade da,   |
|                                          | Canônica, base, dos vetores, 793             | 903                                       |
| Bactérias, crescimento das, 624          | Cantor                                       | Compostos, juros, 614                     |
| Bactérias, crescimento das, 607          | conjunto, 720                                | Comprimento                               |
| Base padrão, 803                         | Georg, 720                                   | de um vetor, 801                          |

| de uma curva no espaço, 861                                                                                                                        | Coordenadas cilíndricas,                                                                                                                                                                                                                                | Deslocamento, de um vetor, 811                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| de uma curva paramétrica, 660                                                                                                                      | equações de conversão para, 831                                                                                                                                                                                                                         | Determinante, 804                                                                                                                                                                                                      |
| de uma curva polar, 678                                                                                                                            | Coordenado(s)                                                                                                                                                                                                                                           | Diferenciação                                                                                                                                                                                                          |
| Computacionais,                                                                                                                                    | eixo(s), 793                                                                                                                                                                                                                                            | de uma função vetorial, 858                                                                                                                                                                                            |
| sistemas algébricos, 650, 1089                                                                                                                     | planos, 793                                                                                                                                                                                                                                             | de uma série de potência, 753                                                                                                                                                                                          |
| para fazer gráfico de sequência, 968                                                                                                               | Coplanares, vetores, 818                                                                                                                                                                                                                                | implícita, 934                                                                                                                                                                                                         |
| Computador,                                                                                                                                        | Coriolis, aceleração de, 881                                                                                                                                                                                                                            | parcial, 907, 915                                                                                                                                                                                                      |
| fazendo gráfico com, 672, 851                                                                                                                      | Cornu, espiral de, 663                                                                                                                                                                                                                                  | termo a termo, 753                                                                                                                                                                                                     |
| Conchóides, 651, 674                                                                                                                               | Corpo negro, 782                                                                                                                                                                                                                                        | Diferencial                                                                                                                                                                                                            |
| Condicionalmente, série, convergente, 739                                                                                                          | Corrida de patins, 1024                                                                                                                                                                                                                                 | equação, 581, 585                                                                                                                                                                                                      |
| Condutividade, 1102                                                                                                                                | Corrida na rampa, 1036                                                                                                                                                                                                                                  | de Bernoulli, 633                                                                                                                                                                                                      |
| Cone, 835                                                                                                                                          | Cosseno, função, 692                                                                                                                                                                                                                                    | de primeira ordem, 597                                                                                                                                                                                                 |
| Conexa, região, 1061                                                                                                                               | Crescente, sequência, 706                                                                                                                                                                                                                               | de segunda ordem, 585, 1138                                                                                                                                                                                            |
| Confronto, Teorema do, para uma                                                                                                                    | Crescimento, Lei do, Natural, 608                                                                                                                                                                                                                       | linear, 628                                                                                                                                                                                                            |
| seqüência, 703                                                                                                                                     | Crítico, ponto, 951, 962                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                        |
| Cônica,                                                                                                                                            | Crítico, vibração, amortecimento, 1153                                                                                                                                                                                                                  | logística, 711                                                                                                                                                                                                         |
| seção                                                                                                                                              | Cunha esférica, 1032                                                                                                                                                                                                                                    | não-homogênea, 1138                                                                                                                                                                                                    |
| equação polar, 689                                                                                                                                 | Curva(s)                                                                                                                                                                                                                                                | ordem da, 585                                                                                                                                                                                                          |
| seções                                                                                                                                             | aberta, 1061                                                                                                                                                                                                                                            | parcial, 915                                                                                                                                                                                                           |
| deslocadas, 685                                                                                                                                    | comprimento da, 861                                                                                                                                                                                                                                     | separável, 597                                                                                                                                                                                                         |
| Cônicas,                                                                                                                                           | conexa, 1061                                                                                                                                                                                                                                            | homogênea, 1138                                                                                                                                                                                                        |
| seções, 680, 687                                                                                                                                   | de Bézier, 650, 664                                                                                                                                                                                                                                     | solução da, 585                                                                                                                                                                                                        |
| excentricidade, 688                                                                                                                                | de catástrofe em forma de rabo de                                                                                                                                                                                                                       | solução geral da, 585                                                                                                                                                                                                  |
| diretriz, 688                                                                                                                                      | andorinha, 654                                                                                                                                                                                                                                          | autônoma, 592                                                                                                                                                                                                          |
| foco, 688                                                                                                                                          | de contorno, 1121                                                                                                                                                                                                                                       | Diferencial, 925                                                                                                                                                                                                       |
| Cônicas transladadas, 689                                                                                                                          | de nível, 890                                                                                                                                                                                                                                           | Diferenciável, função, 923                                                                                                                                                                                             |
| Conjugados, propriedades dos, A6                                                                                                                   | do aprendizado, 588                                                                                                                                                                                                                                     | Direção                                                                                                                                                                                                                |
| Conjunto fechado, 957                                                                                                                              | do aprendizagem, 633                                                                                                                                                                                                                                    | campo de, 619                                                                                                                                                                                                          |
| Conjunto limitado, 959                                                                                                                             | de fronteira, 1121                                                                                                                                                                                                                                      | números que dão a, 823                                                                                                                                                                                                 |
| Conservação de energia, 1078                                                                                                                       | fechada, 1081                                                                                                                                                                                                                                           | Direcional, derivada, 939, 943, 944                                                                                                                                                                                    |
| Conservativo, campo vetorial, 1058                                                                                                                 | Curvatura, 863                                                                                                                                                                                                                                          | de uma função temperatura, 940                                                                                                                                                                                         |
| Constantes da mola, 1155                                                                                                                           | no ponto P, 663                                                                                                                                                                                                                                         | maximizando a, 944                                                                                                                                                                                                     |
| Contínua(s)                                                                                                                                        | Cúspide, 651, 857                                                                                                                                                                                                                                       | Direções                                                                                                                                                                                                               |
| composição de juros, 618                                                                                                                           | - cuspsuo, 651, 657                                                                                                                                                                                                                                     | campo de, 590                                                                                                                                                                                                          |
| Contínuas                                                                                                                                          | т.                                                                                                                                                                                                                                                      | Direita, regra da mão, 793, 815                                                                                                                                                                                        |
| expansão em frações, 710<br>Continuidade                                                                                                           | D                                                                                                                                                                                                                                                       | Diretores, cossenos, 809                                                                                                                                                                                               |
| de uma função, 849                                                                                                                                 | De Moivre, Abraham, A9                                                                                                                                                                                                                                  | Diretriz, 680, 688                                                                                                                                                                                                     |
| de uma função de duas variáveis, 904                                                                                                               | Decaimento                                                                                                                                                                                                                                              | Distância                                                                                                                                                                                                              |
| de uma função de três variáveis, 905                                                                                                               | Lei do,                                                                                                                                                                                                                                                 | entre planos, 828                                                                                                                                                                                                      |
|                                                                                                                                                    | Natural, 608                                                                                                                                                                                                                                            | entre ponto e plano, 821, 827                                                                                                                                                                                          |
| Continuidade de função vetorial, 850<br>Contorno                                                                                                   | radioativo, 611                                                                                                                                                                                                                                         | entre ponto e reta, 820                                                                                                                                                                                                |
| curva de, 1105                                                                                                                                     | Decrescente,                                                                                                                                                                                                                                            | entre pontos no espaço, 795                                                                                                                                                                                            |
| problema de, 1143                                                                                                                                  | seqüência, 706                                                                                                                                                                                                                                          | fórmula da, em três dimensões, 795                                                                                                                                                                                     |
| Convergência                                                                                                                                       | Definida, integral, de uma função a valores                                                                                                                                                                                                             | Divergência                                                                                                                                                                                                            |
| absoluta, 738                                                                                                                                      | vetoriais, 847                                                                                                                                                                                                                                          | de um campo vetorial, 1090, 1124                                                                                                                                                                                       |
| condicional, 739                                                                                                                                   | Densidade                                                                                                                                                                                                                                               | de uma seqüência, 701                                                                                                                                                                                                  |
| de uma seqüência, 701                                                                                                                              | de um sólido, 1026                                                                                                                                                                                                                                      | de uma série infinita, 712                                                                                                                                                                                             |
| de uma série, 712                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                        |
| intervalo de, 749                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                        |
|                                                                                                                                                    | de uma lâmina, 1008                                                                                                                                                                                                                                     | Teorema da, 1124                                                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                    | de uma lâmina, 1008<br>Dependente, variável, 885, 932                                                                                                                                                                                                   | Teorema da, 1124<br>Teste para, 716                                                                                                                                                                                    |
| raio de, 749                                                                                                                                       | de uma lâmina, 1008<br>Dependente, variável, 885, 932<br>Derivada(s)                                                                                                                                                                                    | Teorema da, 1124<br>Teste para, 716<br>Divergente                                                                                                                                                                      |
| raio de, 749<br>Convergente                                                                                                                        | de uma lâmina, 1008<br>Dependente, variável, 885, 932<br>Derivada(s)<br>de ordem maior, 913                                                                                                                                                             | Teorema da, 1124<br>Teste para, 716<br>Divergente<br>seqüência, 701                                                                                                                                                    |
| raio de, 749<br>Convergente<br>seqüência, 701                                                                                                      | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837                                                                                                                               | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712                                                                                                                                                  |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712                                                                                                 | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943                                                                                                          | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767                                                                                                                |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717                                                                            | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746                                                                            | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850                                                                                                       |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794                                                         | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da,                                                                | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905                                                                            |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794 cilíndrica, 838, 1030                                   | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da, maximizando a, 944                                             | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905 Douglas, Paul, 887, 916                                                    |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794 cilíndrica, 838, 1030 esférica, 839, 1030               | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da, maximizando a, 944 normal, 1095                                | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905 Douglas, Paul, 887, 916 Dupla                                              |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794 cilíndrica, 838, 1030 esférica, 839, 1030 x, 794        | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da, maximizando a, 944 normal, 1095 notação, 909                   | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905 Douglas, Paul, 887, 916 Dupla integral, 993, 994                           |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794 cilíndrica, 838, 1030 esférica, 839, 1030               | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da, maximizando a, 944 normal, 1095 notação, 909 parcial, 907, 909 | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905 Douglas, Paul, 887, 916 Dupla integral, 993, 994 propriedades de, 986, 998 |
| raio de, 749 Convergente seqüência, 701 série, 712 propriedades da, 717 Coordenada(s), 794 cilíndrica, 838, 1030 esférica, 839, 1030 x, 794 y, 794 | de uma lâmina, 1008 Dependente, variável, 885, 932 Derivada(s) de ordem maior, 913 de uma função a valores vetoriais, 837 direcional, 938, 943 de uma série de potência, 746 domínio da, maximizando a, 944 normal, 1095 notação, 909                   | Teorema da, 1124 Teste para, 716 Divergente seqüência, 701 série, 712 Divisão de série de potência, 767 DNA, 850 Domínio de uma função, 905 Douglas, Paul, 887, 916 Dupla integral, 993, 994                           |

| sobre retângulos, 981                  | Escalar, 799                             | Foguetes, ciência dos, 970                |
|----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| mudança de variável na, 1042           | múltiplo, de um vetor, 799               |                                           |
| em coordenadas polares, 1001           | produto, 806                             | Fólio de Descartes, 696                   |
| soma de Riemann, 981                   | em forma de componente, 806              | Fonte, 1128                               |
| * - * -                                |                                          | Força, campo de, 1057                     |
| 17                                     | propriedades do, 807                     | Forçadas, vibrações, 1154                 |
| E                                      | equação, 825                             | Forma de andorinha, curva catastrófica    |
| Eixo(s)                                | projeção, 810                            | em, 654                                   |
| coordenados, 793                       | Escalares, 1054                          | Formas vetoriais do Teorema de Green,     |
| x, 793                                 | campos, 1054                             | 1095, 1096                                |
| y, 793                                 | Escoadouro, 1115                         | Fórmula de Euler, A11                     |
| z, 793                                 | Esfera, equação da, 796                  | Frenet-Serret, fórmulas de, 869           |
| Elétrica, carga, 1026                  | Esférica, coordenada, 839, 1032          | fronteira, 1131                           |
| Elétrico                               | Espaço                                   | lisa, 857                                 |
|                                        | tridimensional, 793                      | lisa por partes, 857                      |
| campo de força, 1057                   | curva no, 849, 851                       | lisa por trechos, 1062                    |
| carga sobre um circuito, 1137          | Esperados, valores, 1014                 | maIha, 1084                               |
| fluxo, 1102                            | Estacionário, estado da solução, 1157    | no espaço, 837, 838                       |
| circuíto, 631, 1155                    | Estimando a soma de uma série, 731, 736, | orientação da, 1082                       |
| Eliminação constante do remédio, 642   | 741, 724                                 | paramétrica, 641, 838                     |
| Elipse, 682, 688                       |                                          | polar, 667                                |
| diretriz, 689                          | Estratégia para testar séries, 745       | simples, 1082                             |
| eixo principal, 682                    | Estrofóides, 694                         | Fubini                                    |
| equação polar, 689                     | Euler                                    | Guido, 989                                |
| excentricidade, 688                    | constante de, 728                        |                                           |
| focos, 682, 688                        | método de, 592, 621                      | Teorema de, 989, 1021                     |
| propriedade da reflexão, 683           | Excentricidade, 688                      | Função(ões),                              |
| vértice, 682                           | Exponencial (ais)                        | componente, 848                           |
|                                        | crescimento, 607                         | composta, 905                             |
| Elipsóide, 833                         | decaimento, 607                          | comprimento de arco, 862                  |
| Elíptico, parabolóide, 833             | função série de potência para, 760       | contínua, 849, 903                        |
| Energia                                | complexas, A11                           | de duas variáveis, 885                    |
| cinética, 618, 1079                    | Extremo, Teorema do Valor, 957           | de Gompertz, 627                          |
| conservação da, 1078                   |                                          | de n variáveis, 894                       |
| potencial, 1079                        | ***                                      | de três variáveis, 894, 942               |
| Epiciclóide, 655                       | $\mathbf{F}$                             | de várias variáveis, 885, 894, 927        |
| Equação(s)                             | Família                                  | densidade conjunta, 1012, 1026            |
| coelho-lince, 580, 638                 | de hipociclóides, 655                    | densidade de probabilidade, 1012          |
| de Laplace, 915, 1092                  |                                          | diferenciável, 923                        |
| de um plano, 825                       | de soluções, 584                         | domínio de, 885                           |
| de uma esfera, 796                     | de superfícies, 843                      | gradiente de, 942                         |
| de uma reta no espaço, 822, 823        | Fase                                     | gráfico de, 888, 889                      |
| diferencial (ver Diferencial, equação) | Plano de, 636                            | harmônica, 915                            |
| logística, 619                         | trajetórias de, 636                      | homogênea, 937                            |
|                                        | retrato de, 636                          | implícita, 934                            |
| do calor, 919, 920                     | Fechada, superfície, 1099                | limite de, 900, 903                       |
| linear, 825                            | Fibonacci, 710                           | linear, 888                               |
| logística, 584                         | seqüência de, 700                        | polinomial, 904                           |
| diferencial, 711                       | Final                                    | potência, 752, 1058                       |
| Lotka-Volterra, 635                    | ponto, de uma curva, 648                 |                                           |
| onda, 915                              | Floco de neve, 789                       | produção Cobb, 916, 969                   |
| paramétrica, 647, 822, 849, 1096       | curva, 779                               | Cobb-Douglas, 887                         |
| polar, 667                             | Fluido, fluxo do, 1044                   | racional, 904                             |
| predador-presa, 635                    | Fluxo, 1102                              | representações como uma série de          |
| da Onda, 915                           | linha de, 1060                           | potências de, 752                         |
| escalar de um plano, 835               | elétrico, 1118                           | valor máximo ou mínimo da, 951, 956       |
| Equilíbrio Equilíbrio                  | Foco                                     | valor médio de, 984, 1029                 |
| ponto de, 636                          |                                          | valor vetorial, 848                       |
| soluções de, 584, 635                  | de uma elipse, 688                       | variação da, 885                          |
| Equipotenciais, curvas, 898            | de uma parábola, 680                     | vetor, 848                                |
| Erro(s)                                | de uma seção cônica, 688                 | Bessel, 698, 748, 1163                    |
| estimados para séries alternadas, 736  | Focos                                    | imagem de, 887                            |
| na aproximação de Taylor, 775          | de uma elipse, 682                       | Fundamental, Teorema, do Cálculo, versões |
| aproximação de Tayloi, 113             | de uma hipérbole, 684                    | para dimensões superiores, 1131           |
|                                        |                                          |                                           |

| G                                                        | Hooke loi do 1151                                      | ¥                                                   |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
|                                                          | Hooke, lei de, 1151<br>Horizontal, plano, 794          | J                                                   |
| Galileu, 649, 650                                        | Huygens, 650                                           | <b>j</b> , 802                                      |
| Gases, lei dos, 908                                      | 11d golla, 050                                         | Jacobi, Carl, 1041                                  |
| Gause, G. F., 624<br>Gauss                               | т                                                      | Jacobiano, 1041, 1044                               |
| Karl Friedrich, 1124                                     | I                                                      | Juros, compostos continuamente, 614                 |
| lei de, 904                                              | i (número imaginário), A5                              |                                                     |
| Teorema de, 1124                                         | i, 802, 822                                            | K                                                   |
| Gauss, óptica de, 780                                    | Imagem, 1038                                           | k. 802                                              |
| Geometria do tetraedro, 821                              | Implícita                                              | Kepler                                              |
| Geométrica, série, 712                                   | diferenciação, 934                                     | Johannes, 875                                       |
| Geratriz de uma superfície, 831                          | função, 934                                            | lei de, 688, 875, 879                               |
| Gompertz, função, 627                                    | Teorema da Função, 934<br>Importância do, 947          | Kirchhoff, leis de, 620, 633, 1155                  |
| Gourdon, Xavier, 762                                     | Impulso de uma força, 619                              |                                                     |
| Grad —, 941                                              | Inclinações, campo de, 590                             | L                                                   |
| Gradiente                                                | Incompressível, campo de velocidade, 1092              |                                                     |
| campo do vetor, 1058                                     | Incremento, 923, 927                                   | Lagrange                                            |
| vetor, 941, 943                                          | Independência de caminho, 1080                         | Joseph, 964                                         |
| importância do vetor, 947                                | Independente, variável, 885, 932                       | multiplicadores de, 963, 964, 967                   |
| Gráfica, calculadora, 658, 672                           | Indeterminados, coeficientes, 1132, 1136               | Lâmina, 1008                                        |
| Gráfico(s)                                               | Índice de sensação térmica, 888, 919, 948              | Laplace                                             |
| de uma curva paramétrica, 648<br>de uma superfície, 1093 | Inércia, momento de, 1010, 1026, 1058                  | equações de, 915, 1092                              |
| polar, 667, 672                                          | Infinita (sequência) (ver Sequência)                   | operador de, 1092<br>Pierre, 915                    |
| de uma função, 888, 889                                  | Infinita, série (ver Série)                            | Lei                                                 |
| por computadores, 672, 851                               | Inicial                                                | da Conservação de Energia, 1079                     |
| Gravitacional, campo, 1057                               | condição, 587                                          | do crescimento natural, 608                         |
| Green                                                    | ponto, de uma curva paramétrica, 648                   | do decaimento natural, 608                          |
| George, 1082, 1110                                       | Problema de Valor, 587, 1142<br>Integração,            | de conservação do momento angular, 878              |
| identidades de, 1095                                     | de uma série de potência, 753                          | Leibniz, Gottfried Wilhelm, 597, 690, 773           |
| Teorema de, 1081                                         | revertendo a ordem da, 998                             | Limaçons, 672                                       |
| formas vetoriais, 1093, 1094                             | termo a termo, 753                                     | Limitada, seqüência, 706                            |
| Gregory                                                  | parcial, 988                                           | Limitado, conjunto, 957                             |
| James, 755                                               | Integral(is)                                           | Limite(s)                                           |
| série de, 755                                            | dupla, 981, 993, 994                                   | de duas variáveis, 903                              |
| •                                                        | iterada, 988                                           | de três variáveis, 904                              |
| Н                                                        | superfície, 1093, 1099                                 | de uma função a valor vetorial, 848                 |
|                                                          | tabela de, contracapa                                  | de uma função, 900                                  |
| Harmônica                                                | Teste(s) da, 721                                       | de uma seqüência, 701                               |
| função, 915                                              | tripla, 1020, 1021, 1022                               | leis de, para sequência, 702                        |
| série, 715                                               | linha, 1053, 1060, 1061, 1064                          | superior mínimo, 707<br>Teste da Comparação do, 730 |
| Hecht, Eugene, 779<br>Hélice, 849                        | múltipla, 1038<br>de uma função vetorial, 847, 859     | Linear                                              |
| Helicóide, 1108                                          | definida de funções a valores vetoriais,               | aproximação, 922, 923, 927                          |
| Hipérbole, 683, 688                                      | 860                                                    | equação, 825                                        |
| assíntota, 684                                           | definida, 847, 979                                     | diferencial, 628, 1138                              |
| diretriz da, 688                                         | Integrante, fator, 628                                 | função, 888                                         |
| equação da, 684                                          | Intermediária, variável, 932                           | combinação, 1138                                    |
| equação polar da, 689                                    | Intersecção                                            | Linearidade, 986                                    |
| excentricidade da, 688                                   | de gráficos polares, 677                               | Linearização, 923                                   |
| focos da, 684, 688                                       | de três cilindros, 966, 1037                           | Linearmente, solução, independente, 1139            |
| ramos da, 684                                            | Intervalo de convergência, 749                         | Linha (as)                                          |
| reflexão, propriedades da, 687                           | Inversa                                                | aerodinâmica, 1047                                  |
| vértices da, 684                                         | transformação, 1039                                    | de correnteza, 1060                                 |
| Hiperbólico, parabolóide, 834                            | da função trigonométrica, envolvente, 654              | integral de, 1060, 1061, 1064                       |
| Hiperbolóide, 835                                        | Involuta, 664                                          | de campos vetoriais, 1054                           |
| Hiperesfera, 1030<br>Hipociclóide, 655                   | Irrotacional, campo de vetores, 1091<br>Isotermas, 898 | Teorema Fundamental para, 1059                      |
| Homogênea, Equação diferencial, 1138,                    | Isotérmicas, 898                                       | com relação ao comprimento do arco,                 |
| 1154                                                     | Iterada, integral, 988                                 | 1064                                                |
| - ~~ '                                                   |                                                        | no espaço, 1052                                     |

| Lisa                                                      | polar, 1011                                             | Onda, equação da, 915                              |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| curva, 857                                                | segundo, 1010                                           | Óptica                                             |
| superfície, 1100                                          | Monótona                                                | de Gauss, 780                                      |
| Lissajous, figuras de, 654                                | Monotônica                                              | de primeira ordem, 780                             |
| Litotripsia, 683                                          | sequência, 706                                          | Órbita, 875                                        |
| Local, máximo e mínimo, 951<br>Logística                  | Teorema da Sequência, 707                               | Ordem                                              |
| equação de diferença, 711                                 | Movimento                                               | de uma equação diferencial, 585                    |
| equação de diferencial, 584, 619                          | no espaço, 869, 875                                     | revertendo da integração, 998                      |
| sequências, 711                                           | das luas e planetas, 847                                | Ordem maior, derivadas, 913                        |
| Logístico, modelo, 619                                    | de satélites, 847                                       | Ordenada tripla, 794                               |
| LORAN, sistema de, 686                                    | Mudança de variáveis<br>em integrais duplas, 1003, 1042 | Oresme, Nicole, 716                                |
| Lotka-Volterra, equações de, 635                          | em integrais múltiplas, 1038                            | Orientação                                         |
| 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1                   | em integrais triplas, 1044                              | de uma curva, 1081                                 |
| M                                                         | Múltipla, integral, 1038                                | de uma superfície, 1098, 1099                      |
| M                                                         | Multiplicação de séries de potências, 767               | Orientada, superfície, 1098<br>Ortogonal(is)       |
| Maclaurin                                                 | Multiplicador                                           | vetores, 809                                       |
| Colin, 759                                                | de Lagrange, 964, 967                                   | trajetória, 600                                    |
| série de, 759                                             | efeito, 719                                             | superfície, 950                                    |
| Magnitude de um vetor, 799                                |                                                         | projeção, 812                                      |
| Malhas, curvas de, 1084                                   | N                                                       | Osculador                                          |
| Marginal, propensão, a consumir ou a                      |                                                         | círculo, 866                                       |
| economizar, 719                                           | Não-homogênea, equação diferencial, 1138,               | plano, 866                                         |
| Massa, 1008, 1026, 1063, 1094                             | 1144                                                    | Ostrogradsky, Mikhail, 1124                        |
| centro de, 1008, 1026, 1063, 1094                         | Natural, Lei do Crescimento, 608                        | Ótipca de terceira ordem, 780                      |
| Matemática, indução, 708<br>Máximo e mínimo absoluto, 957 | Newton                                                  | Ovais de Cassini, 675                              |
| Máximo e mínimo, valores, 951, 956                        | Lei da Gravitação de, 875, 1044                         |                                                    |
| Médio                                                     | Lei de Resfriamento de, 588, 613                        | P                                                  |
| Teorema do Valor, para integrais duplas,                  | sir Isaac, 690, 773, 875                                |                                                    |
| 1049                                                      | Segunda Lei de, 872, 875, 1151<br>Nicomedes, 651        | Padrão de ventos na baía de São Francisco,         |
| valor, de uma função, 984, 1029                           | Nível(is)                                               | 1053                                               |
| Meia-vida, 612                                            | de uma pressão barométrica, 872, 948                    | para Integral de linha, 1059<br>Parábola, 680, 688 |
| Método                                                    | de curva(s), 890                                        | diretriz da, 680                                   |
| dos Mínimos Quadrados, 961                                | de temperatura média do mundo, 891                      | eixo da, 680                                       |
| dos Multiplicadores de Lagrange, 967                      | de uma intensidade magnética, 872                       | equação da, 681                                    |
| Misturas, problemas de, 605                               | superfície de, 895                                      | equação polar da, 689                              |
| Möbius, tira de, 1105                                     | plano tangente à, 945                                   | foco da, 680, 688                                  |
| Modelando                                                 | Nó trevo, 851                                           | vértice da, 680                                    |
| com equações diferenciais, 581                            | Normal                                                  | Parabólico, cilindro, 831-832                      |
| crescimento da população, 581, 608, 619,                  | componente, da aceleração, 873                          | Parabolóide, 833                                   |
| .625, 642                                                 | derivada, 1095                                          | Paralelepípedo, 818                                |
| custo de produção, 887, 916, 969                          | plano, 866                                              | Paralelogramo, Lei do, 799, 813                    |
| movimento de uma mola, 584                                | reta, 946                                               | Paralelos, planos, 826 Paralelos, vetores, 799     |
| vibração da membrana, 698, 748                            | vetor, 825, 866                                         | Paramétrica(s)                                     |
| Modelo(s), matemático(s),                                 | Número(s) complexo(s), A5                               | curva, 647, 849                                    |
| comparação do crescimento natural versus logístico, 618   | argumento de, A7                                        | equações, 641                                      |
| crescimento sazonal, 627                                  | forma polar de, A7                                      | da reta, 822                                       |
| predador-presa, 635                                       | igualdade de, A5<br>módulo de, A6                       | de uma curva espacial, 849                         |
| von Bertalanffy, 642                                      | multiplicação de, A5, A8                                | de uma reta no espaço, 862                         |
| Gompertz, função de, 627                                  | parte imaginária de, A5                                 | de uma superfície, 1096                            |
| Módulo, A6                                                | parte real de, A5                                       | superfície, 1094, 1096, 1099                       |
| Mola, constante da, 584, 1151                             | potências de, A9                                        | Parametrização de uma curva no espaço, 862         |
| Momento                                                   | raiz quadrada principal de, A6                          | Parâmetro, 647, 822, 849                           |
| de inércia, 1010, 1026, 1058                              | raízes de, A10                                          | Parcial(is)                                        |
| de um objeto, 619                                         | divisão de, A6, A8                                      | derivada, 907, 910                                 |
| de um sólido, 1026                                        | , -, -,                                                 | de uma função com três ou mais variáveis, 894      |
| de uma lâmina, 1008                                       |                                                         | notações para, 909                                 |
| em torno de um eixo, 1008                                 | O                                                       | regras para determinar, 910                        |
| em torno de um plano, 1026                                | Octante, 793                                            | segunda, 913                                       |
|                                                           |                                                         | =                                                  |

| equação diferencial, 915                          |
|---------------------------------------------------|
| integração, 989                                   |
| soma(s), de uma série, 712                        |
| Periélio, 692                                     |
| Perilúnio, 686                                    |
| Perpendiculares, vetores, 809                     |
| Planck, Lei de, 783<br>Planetário, movimento, 875 |
| Plano(s), 825                                     |
| coordenados, 793                                  |
| equação do, 822, 825                              |
| horizontal, 794                                   |
| normal. 866                                       |
| paralelo, 826                                     |
| tangente a superfície, 921, 945, 946, 1099        |
| recortados, 832                                   |
| Polar(es)                                         |
| coordenadas, 665                                  |
| eixo, 665                                         |
| equação(ões),                                     |
| gráfico de, 667                                   |
| de cônicas, 665, 689                              |
| Polar, forma, de um número complexo, A7           |
| retângulo, 1002                                   |
| Polinomial, função, de duas variáveis, 904        |
| Polinômio de Taylor de grau n, 760                |
| Pólo, 665                                         |
| Ponto                                             |
| amostra, 980                                      |
| Ponto médio, regras do,                           |
| para integral dupla, 983                          |
| para integral tripla, 1028                        |
| População, crescimento da, 609                    |
| da bactéria, 624                                  |
| de peixe, 580, 626                                |
| de modelos, 581<br>do mundo, 610                  |
| de bactérias, 607                                 |
| Por partes, curva lisa, 857                       |
| Por trechos, curva lisa, 1062                     |
| Posição vetor, 800                                |
| Positiva                                          |
| função, 981                                       |
| orientação                                        |
| de uma curva, 1105, 1081                          |
| de uma superfície, 1099                           |
| Potência                                          |
| Potência série de, 747                            |
| coeficientes de, 747                              |
| divisão de, 767                                   |
| integração de, 753                                |
| intervalo de convergência, 749                    |
| multiplicação de, 767                             |
| raio de convergência, 749                         |
| diferenciação de, 753                             |
| representações de funções como, 752               |
| Potencial                                         |
| energia, 1079                                     |
| função, 1058<br>Predador 634                      |
| FREDRICK DAM                                      |

Predador-presa, modelo, 635

| Presa, 634                                 |
|--------------------------------------------|
| Primeira                                   |
| Equação diferencial de, ordem, 628         |
| ordem, óptica de, 780                      |
| Primeiro octante, 793                      |
| Principal eixo da elipse, 682              |
| Principal vetor normal unitário, 866       |
| Princípio da superposição, 1147            |
| Princípio de Arquimedes, 1133              |
| Probabilidade, 1012                        |
| função densidade, 1012                     |
| Produto                                    |
| escalar, 806, 807                          |
| Produto misto, 818                         |
| triplo, 818                                |
| escalar, 817                               |
| vetorial, 818                              |
| Produto vetorial, propriedades do, 817     |
| Projeção, 794, 810                         |
| Projétil, 654, 872                         |
| Projeto de um grande receptáculo para lixo |
| minimizando o custo de construção, 949     |
| <i>p</i> -série, 723                       |
|                                            |
| Q                                          |
| -                                          |
| Quadrática, aproximação, 962               |
| Quádrica, superfície, 832                  |
| gráfico da, 834                            |
|                                            |
| R                                          |
| Racional, função, 905                      |
| Radiação das estrelas, 782                 |
| Radiação de corpo negro, 782               |
| Radioativo, decaimento, 611                |
| Raio                                       |
| de convergência, 749                       |
| de rotação, 1012                           |
| Raiz quadrada principal de um número       |
| complexo, A6                               |
| Raiz, Teste da, 742                        |
| Raízes de um número complexo, A10          |
| Ramos da hipérbole, 684                    |
| Rayleigh-Jeans Law, 783                    |
| Razão, Teste da, 740                       |
| Rearranjo de uma série, 743                |
| Doffavão manui-dada da                     |

Reflexão, propriedades da

de uma elipse, 683 de uma hipérbole, 687

Região

aberta, 1061

conexa, 1061

do tipo I, 994

do tipo II, 995

fechada, 957

simples, 1082

sólida simples, 1124

Regrada, superfície, 837

simplesmente conexa, 1062

Regra da mão direita, 793, 815

```
Relação de recursão, 1160
 Relativo, taxa de crescimento, 609
 Representações de um vetor, 800
 Ressonância, 1155
 Resto de uma série de Taylor, 761
 Resto, estimativa do
   para o Teste da Integral, 725
   para o Teste da Razão, 741
   para o Teste de comparação, 732
   para uma série alternada, 736
 Restrição, 965, 969
 Resultante, força, 803, 804
 Reta(s)
 Reta(s) no espaço
   normal, 946
   tangente, 855
   transversas, 834
   equações paramétricas de, 822
   equações simétricas de, 823
      no plano
   equação vetorial de, 822
Retangular, sistema de coordenada, 794
Reversa(s)
   ordem, da integração, 998
  retas, 848
Riemann, soma(s) de, para integral múltipla,
Riemann, soma(s) de, para integral tripla,
 1021
Roberval, Gilles de, 658
Rosa de quatro pétalas, 669
Rotacional de um campo vetorial, 1088
S
Sazonal, modelo de crescimento, 627
Secções transversais, 831
Segunda
  derivada, 857
     parcial, 913
  ordem, equação diferencial de, 585
Segundo, momento de inércia, 1010
Sela do cachorro, 898
Sela do macaco, 898
Sela, ponto de, 952
Semi-espaço, 894
Seno, função, série de potência da, 763
Seno, série de potências para a função,
Separável, equação diferencial, 597
Sequências, 699
Sequência
  convergente, 701
  crescente, 706
  de Fibonacci, 700
  de somas parciais, 712
  decrescente, 706
  divergente, 701
  gráfico da, 704
  limitada, 706
 limite de, 701
```

| monotônica, 706                           | de uma superfície $z = f(x, y)$ , 1017     | Tipo                                                    |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| termos da, 699                            | de uma esfera, 1089                        | 1, região sólida do, 1022                               |
| Série, 711                                | de nível, 895                              | 2, região sólida do, 1023                               |
| absolutamente convergente, 738            | de revolução, representação paramétrica    | 3, região sólida do, 1023                               |
| alternada, 733                            | da, 1099                                   | I, região do plano do, 994                              |
| binomial, 770, 771                        | fechada, 1099                              | II, região do plano do, 995                             |
| coeficiente da, 747                       | gráfico da, 1093                           | Torção, 857                                             |
| condicionalmente convergente, 739         | integral de, 1093                          | Torcida, cúbica, 851                                    |
| convergente, 712                          | de campo de vetores, 1099                  | Toro, 1093                                              |
| de Gregory, 755                           | lisa, 1100                                 | Toróide, espiral, 851                                   |
| de potência, 747                          | orientada, 932                             | Torque, 819                                             |
| divergente, 712                           | paramétrica, 1094, 1096, 1100              |                                                         |
| estratégia para teste, 745                | quádrica, 832                              | Torricelli, Evangelista, 650<br>TotaI, diferencial, 925 |
| geométrica, 712                           | de nível, 895                              |                                                         |
| harmônica, 715                            | de mver, 693                               | Trabalho, 811, 1055                                     |
| infinita, 711                             |                                            | Traços, 831<br>Trajetória, 872                          |
| Maclaurin, 759                            | $\mathbf{T}$                               | Transferência aveva 991                                 |
| p-série, 723                              | T-1 Transformação inversa, 1039            | Transferência, curva, 881                               |
| rearranjo da, 743                         | Tangencial components de agalamação 973    | Transformação, 1038                                     |
| soma da, 712                              | Tangencial, componente, da aceleração, 873 | jacobiano da, 1041                                      |
|                                           | Tangente plano                             | um a um, 1039                                           |
| soma parcial da, 712                      | a uma superfície de nível, 946             | Triangular                                              |
| Taylor, 759                               | a uma superfície $f(x, y, z) = k$ , 1087   | desigualdade, para vetores, 813                         |
| termo da, 704                             | a uma superfície paramétrica, 1100         | Triângulo, Lei do, 799                                  |
| série de potência da, 760                 | a uma superfície $z = f(x, y)$ , 921, 923  | Tridimensional, sistema coordenado, 794                 |
| harmônica alternada, 735, 738             | aproximação, 923                           | Trigonométrica, Série, 747                              |
| trigonométrica, 747                       | Tangente reta                              | Tripla                                                  |
| Setor de um círculo, 675                  | a uma curva paramétrica, 656               | soma, de Riemann, 1021                                  |
| Sierpinski, carpete de, 720               | a uma curva no espaço, 844                 | Tripla integral, 1020, 1021                             |
| Simetria em gráfico polar, 669            | a uma curva polar, 670                     | sobre uma região geral limitada, 1022                   |
| Simétricas, equações, de uma reta, 823    | vetor, 855                                 | em coordenadas esféricas, 1030                          |
| Simples                                   | Tautócrona, problema, 650                  | ponto médio, regra do, para, 1028                       |
| curva, 1063                               | Taylor                                     | aplicações da, 1025                                     |
| movimento harmônico, 1152                 | Brook, 759                                 | em coordenadas cilíndricas, 1030                        |
| região, 1082                              | designaldade de, 761                       | Triplo, produto, 818                                    |
| sólida, 1124                              | polinômio de, 760, 962                     | Trocóide, 653                                           |
| Simplesmente conexa, região, 1062         | série de, 759                              | Turbina hidráulica, otimização da, 971                  |
| Simpson, Thomas, 977                      | Telescópica, soma, 715                     |                                                         |
| Sólida, região, 1127                      | Temperatura-umidade, índice da, 896, 907   | $\mathbf{U}$                                            |
| Sólido                                    | Teorema de De Moivre, A9                   | Ultravioleta, catástrofe do, 783                        |
| volume do, 1036, 1037                     | Teorema do Confronto para sequências, 705  | Um a um, transformação, 1039                            |
| ângulo, 1138                              | Terminal                                   | Unitário, vetor, 803                                    |
| Solução                                   | ponto, de um vetor, 798                    | normal, 866                                             |
| curva, 589                                | velocidade, 604                            | normar, 600                                             |
| soluções da, 1130                         | Termo                                      | ¥.7                                                     |
| da equação predador-presa, 635            | a termo, diferenciação e integração, 753   | $\mathbf{V}$                                            |
| de uma equação diferencial em série, 1159 | de uma seqüência, 699                      | Valor Absoluto, A6                                      |
| Soma                                      | de uma série, 704                          | Variação                                                |
| de uma série geométrica, 713              | Teste da segunda derivada, 954             | de parâmetros, 1149                                     |
| de uma série infinita, 712                | Testes para Convergência e Divergência de  | Variável(is)                                            |
| de vetores, 798                           | Série                                      | aleatória independente, 1014                            |
| Telescópica, 715                          | da Comparação do Limite, 730               | dependente, 885, 932                                    |
| Sorvedouro, 1131                          | da Integral, 722                           | independente, 885, 932                                  |
| Stokes                                    | da Razão, 741                              | intermediária, 932                                      |
| Stokes, sir George, 1118                  | da Série Alternada, 735                    | Velocidade, 869                                         |
| Stokes, Teorema de, 1119                  | da Raiz, 742                               | campo, 1056                                             |
| Suave                                     | para Divergência, 716                      | padrão de vento, 1053                                   |
| Subamortecido, vibração, 1153             | resumos dos testes, 745                    | correntes oceânicas, 1054                               |
| Superamortecido, vibração, 1153           | Tetraedro, 821                             | fluxo do ar, 1054                                       |
| Superfície                                | Thomson, William (lorde Kelvin), 1082,     | vento, 1053                                             |
| área da                                   | 1118                                       | vetorial, 857                                           |
| de uma superfície paramétrica, 658        | Tímpano, vibração do, 692, 748             | padrão dos ventos, 782, 1054                            |

### A52 🗎 ÍNDICE ANALÍTICO Editora Thomson

Verhulst, 584 Vértice(s) de uma elipse, 682 de uma hipérbole, 684 de uma parábola, 680 Vetor força, 1056, 1059 i, jek, 802 gradiente, 930, 941, 947 magnitude do, 801 multiplicação de, 799 múltiplo escalar do, 799 negativo, 799 normal, 848 normal unitário, 866 normal unitário principal, 866 ortogonal, 809 paralelo, 799 perpendicular, 809 posição, 801 produto escalar, 806, 807 produto triplo, 819 produto vetorial de, 813, 819 projeção, 810 propriedades do, 802 representações de, 800 soma de, 798 subtração de, 799 tangente, 855 tangente unitário, 855 tridimensional, 800 unitário, 803 unitário (versor), 803

unitário normal (versor normal), 867 unitário normal principal, 867 unitário tangente (versor tangente), 866 velocidade, 869 zero, 798 Vetor(es), 798 aceleração, 870 adição de, 798 ângulos entre, 807, 808 base, 803 base padrão, 803 bidimensional, 800 binormal, 866 componentes do, 800 comprimento do, 801 coplanares, 818 deslocamento, 811 diferença de, 799 equivalentes, 798 força, 1044 Vetorial(is) projeção, 810 equação de um plano, 825 de uma reta, 822 produto(s), 813 triplo, 818 campo, 1054, 1057 conservativo, 1058, 1079 divergente do, 1088 fluxo do, 1136 gradiente, 1058

incompressível, 1092 irrotacional, 1091 rotacional do, 1088 velocidade, 1056 função a valores, 848 contínua, 849 derivada da, 855 integral da, 847 limite da, 848 Vibração(ões), 1152, 1154 da mola, 1152 de uma membrana de borracha, modelo da, 692 da membrana do tambor, 700, 748 Vínculos, 951, 955 Volterra, Vito, 635 Volume, de hiperesferas, 1030 de um sólido, 981 por integral dupla, 981 por integral tripla, 1025 de hiperesferas, 1030 Von Bertalanffy, modelo de, 642

#### 14/

Wren, sir Christopher, 660

## Z

Zero, vetor, 798



## **Tabelas**



## REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO

## FÓRMULAS OFRAIS

1. 
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

3. 
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

5. 
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$
 (Regra do Produto)

7. 
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$
 (Regra da Cadeia)

$$2. \ \frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

**4.** 
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

**6.** 
$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
 (Regra do Quociente)

**8.** 
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
 (Regra do da Potência)

## FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

$$9. \ \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$11. \ \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$10. \ \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

12. 
$$\frac{d}{dx}(\log_o x) = \frac{1}{x \ln a}$$

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$$13. \ \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

$$14. \ \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

**15.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 ( tg x) = sec<sup>2</sup>x

**16.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (cossec x) = -cossec x co-tg

17. 
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

**18.** 
$$\frac{d}{dx} (\cot x) = -\csc^2 x$$

## FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

**19.** 
$$\frac{d}{dx} (\text{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

**20.** 
$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**21.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (  $tg^{-1}x$ ) =  $\frac{1}{1+x^2}$ 

**22.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (cossec<sup>-1</sup>x) =  $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 

**23.** 
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

**24.** 
$$\frac{d}{dx} (\cot g^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

## FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

**25.** 
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$$

**26.** 
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$27. \ \frac{d}{dx} ( \ \text{tgh} x ) = \text{sech}^2 x$$

**28.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (cossech x) = -cossech x cotgh x

**29.** 
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

**30.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (cotgh x) = -cossech<sup>2</sup>x

## FUNÇÕES INVERSAS HIPERBÓLICAS

**31.** 
$$\frac{d}{dx} \left( \text{senh}^{-1} x \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

**32.** 
$$\frac{d}{dx} \left( \cosh^{-1} x \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

33. 
$$\frac{d}{dx}$$
 (tgh<sup>-1</sup>x) =  $\frac{1}{1-x^2}$ 

**34.** 
$$\frac{d}{dx}$$
 (cossech 'x) =  $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$ 

**35.** 
$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

**36.** 
$$\frac{d}{dx} \left( \text{cotgh}^{-1} x \right) = \frac{1}{1 - x^2}$$

## TABELA DE INTEGRAIS

罗德教制 夏季 克提早在电影发展发展 医二十二次

**47.** 
$$\int \frac{u \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln |a + bu|) + C$$

**48.** 
$$\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3} \left[ (a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2 \ln |a + bu| \right] + C$$

**49.** 
$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

**50.** 
$$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

**51.** 
$$\int \frac{u \, du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2 (a + bu)} + \frac{1}{b^2} \ln |a + bu| + C$$

**52.** 
$$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

**53.** 
$$\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left( a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right) + C$$

**54.** 
$$\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

**55.** 
$$\int \frac{u \, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu} + C$$

## FORMAS TREGONOMÉTRICAS

**63.** 
$$\int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$$

**64.** 
$$\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

**65.** 
$$\int tg^2 u \, du = tg \, u - u + C$$

$$66. \int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$$

**67.** 
$$\int \sin^3 u \ du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

**68.** 
$$\int \cos^3 u \, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \, \sin u + C$$

**69.** 
$$\int tg^3 u \, du = \frac{1}{2} tg^2 u + \ln |\cos u| + C$$

**70.** 
$$\int \cot^3 u \ du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

71. 
$$\int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u + \operatorname{tg} u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

72. 
$$\int \operatorname{cossec}^3 u \, du = -\frac{1}{2} \operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u \right| + C$$

73. 
$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du$$

**74.** 
$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

**75.** 
$$\int \operatorname{tg}^{n} u \, du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u \, du$$

**56.** 
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu} + C$$

57. 
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ se } a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ se } a < 0$$

**58.** 
$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

**59.** 
$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

**60.** 
$$\int u^n \sqrt{a + bu} \, du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[ u^n (a + bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a + bu} \, du \right]$$

**61.** 
$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a + bu}}$$

**62.** 
$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}$$

**76.** 
$$\int \cot g^n u \ du = \frac{-1}{n-1} \cot g^{-1} u - \int \cot g^{-2} u \ du$$

77. 
$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg} u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$$

**78.** 
$$\int \cos^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \cos u \cos^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du$$

**79.** 
$$\int \sin au \sin bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

**80.** 
$$\int \cos au \cos bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

**81.** 
$$\int \operatorname{sen} au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

**82.** 
$$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

83. 
$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C$$

**84.** 
$$\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

**85.** 
$$\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$$

**86.** 
$$\int \sin^n u \cos^m u \, du = -\frac{\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} u \cos^m u \, du$$
$$= \frac{\sin^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n u \cos^{m-2} u \, du$$

FORMAS BÁSICAS

$$1. \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\mathbf{6.} \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

11. 
$$\int \operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cossec} u + C$$

**16.** 
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

2. 
$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$
,  $n \neq -1$  7.  $\int \cos u \, du = \sin u + C$ 

$$7. \int \cos u \, du = \sin u + C$$

12. 
$$\int \operatorname{tg} u \, du = \ln |\sec u| + C$$

17. 
$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} tg^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

3. 
$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$
 8.  $\int \sec^2 u \, du = \lg u + C$ 

$$13. \int \cot g u \, du = \ln |\sin u| + C$$

**18.** 
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$4. \int e^u du = e^u + C$$

$$9. \int \operatorname{cossec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$14. \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + \epsilon$$

**14.** 
$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \lg u| + C$$
 **19.**  $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$ 

$$\int a^{u} du = \frac{1}{\ln a} a^{u} + C$$

$$10. \int \sec u \ \operatorname{tg} \ u \, du = \sec u + C$$

**15.** 
$$\int \operatorname{cossec} u \, du = \ln |\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$$
 **20.**  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$ 

**20.** 
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

FORMAS ENVOLVENDO  $\sqrt{x^2+x^2}, x>0$ 

**21.** 
$$\int \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$$

**22.** 
$$\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{8} \left( a^2 + 2u^2 \right) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left( u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

**23.** 
$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

**24.** 
$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$$

**25.** 
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$$

**26.** 
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$$

27. 
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

**28.** 
$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

**29.** 
$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

FORMAS ENVOLVENDO  $\sqrt{a^2-\mu^2}, \, a>0$ 

**30.** 
$$\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

**31.** 
$$\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

**32.** 
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

33. 
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

**34.** 
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

**35.** 
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

**36.** 
$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$37.\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$38.\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

FORMAS ENVOLVENDO  $\sqrt{a^2-a^2},\,a>0$ 

**39.** 
$$\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

**40.** 
$$\int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{8} \left( 2u^2 - a^2 \right) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

**41.** 
$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{|u|} + C$$

**42.** 
$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**43.** 
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

**44.** 
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

**45.** 
$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

**46.** 
$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

## FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

**87.** 
$$\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$$

**88.** 
$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$$

**89.** 
$$\int tg^{-1}u \, du = u tg^{-1}u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + C$$

**90.** 
$$\int u \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1 - u^2}}{4} + C$$

**91.** 
$$\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1 - u^2}}{4} + C$$

## FORMAS EXPONENCIAL & LOBASTANICA

**96.** 
$$\int ue^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$$

**97.** 
$$\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

**98.** 
$$\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$$

**99.** 
$$\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$$

## FORMAS HIPSERGLICAS

103. 
$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$

104. 
$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

**105.** 
$$\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln \cosh u + C$$

106. 
$$\int \cosh u \, du = \ln | \sinh u | + C$$

107. 
$$\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{tg}^{-1} | \operatorname{senh} u | + C$$

## FORMAS ENVOLVENDO $\sqrt{2au - u^2}$ , a > 0

**113.** 
$$\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u - a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left( \frac{a - u}{a} \right) + C$$

114. 
$$\int u\sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$$

**115.** 
$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a}\right) + C$$

116. 
$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$$

117. 
$$\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left( \frac{a - u}{a} \right) + C$$

118. 
$$\int \frac{u \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$$

119. 
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{u + 3a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a}\right) + C$$

**120.** 
$$\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

**92.** 
$$\int u \, \operatorname{tg}^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \, \operatorname{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

**93.** 
$$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} \, du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \ n \neq -1$$

**94.** 
$$\int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} \, du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \ n \neq -1$$

**95.** 
$$\int u^n \operatorname{tg}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[ u^{n+1} \operatorname{tg}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} \, du}{1+u^2} \right], \ n \neq -1$$

$$100. \int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

**101.** 
$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

**102.** 
$$\int \frac{1}{u \ln u} du = \ln |\ln u| + C$$

108. 
$$\int \operatorname{cossech} u \, du = \ln \left| \operatorname{tgh} \frac{1}{2} u \right| + C$$

109. 
$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$$

110. 
$$\int \operatorname{cossech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$$

111. 
$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

112. 
$$\int \operatorname{cossech} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cossec} u + C$$